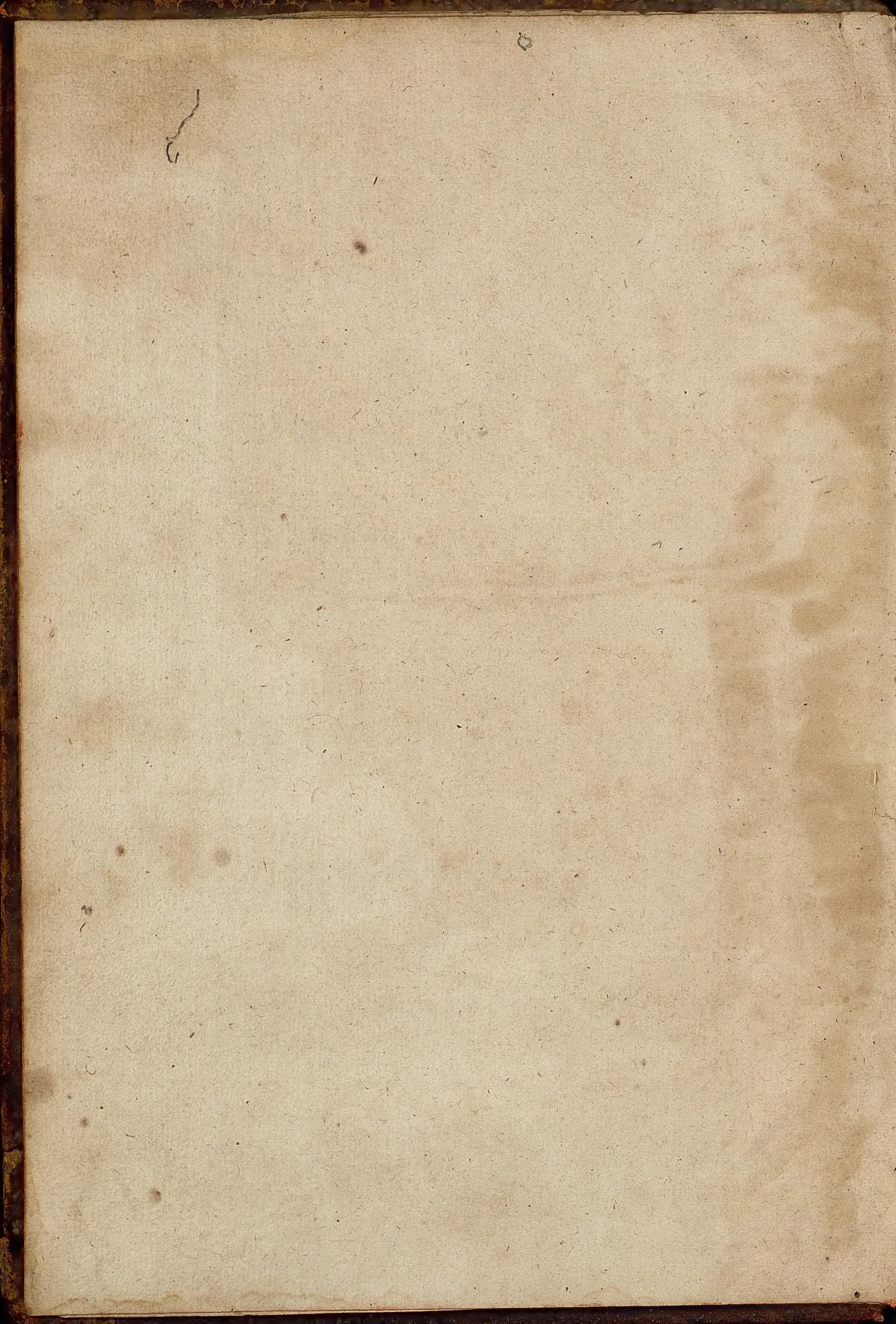


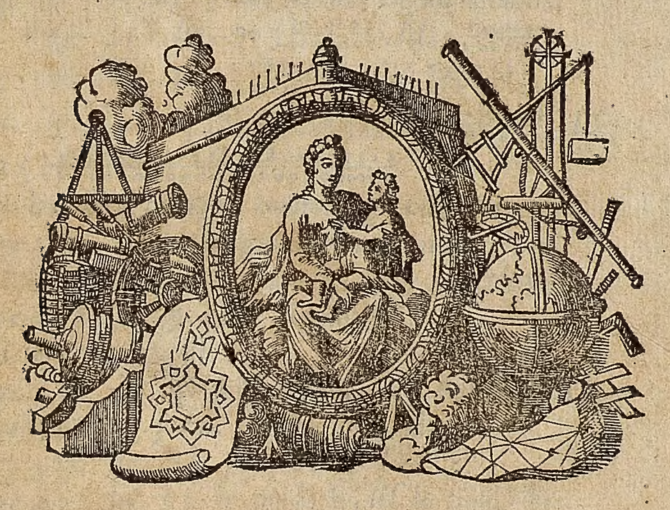


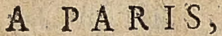
NOUVELLE MECANIQUE OU STATIQUE,

DONT LE PROJET FUT DONNÉ EN M. DC. LXXXVII.

Ouvrage posthume de M. VARIGNON, *des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, Lecteur du Roy en Philosophie au College Royal, & Professeur des Mathématiques au College Mazarin.*

TOME SECOND.



A PARIS,

Chez CLAUDE JOMBERT, ruë S. Jacques, au coin de la ruë des Mathurins, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XXV.

Avec Approbation & Privilege du Roy.

TABLE

DES SECTIONS CONTENUES dans ce Volume.

Fautes à corriger.

Page 315. *lig.* 3. au dessus, *lis.* au dessous.

Page 358. *lig.* 9. $3\frac{1013093}{2000000}$, *lis.* $3\frac{1009093}{2000000}$.

Pag. 360. *lig.* 18. $3\frac{1013093}{2000000}$, *lis.* $\frac{1009093}{2000000}$.

Ibid. lig. 23. $15\frac{59190816934137450578881}{70500000000000000000000}$, *lis.* $15\frac{237326705726549802315524}{283000000000000000000000}$.

Ibid. lig. dern. corrigez comme dessus ligne 23.

Page 361. *lig.* 2. *corrigez encore de même.*

Ibid. lig. 3. cinq septiémes, *lis.* trois huitiémes.

Page 368. *lig.* 9. ainsi, *lis.* aussi.

Ibid. lig. 14. eu, *lis.* en.

Page 411. *lig.* 3. AM à MA, *lis.* AN à MA.

Page 413. *lig. prem.* suivie, *lig.* suive.

Page 420. *lig.* 28. *s*APO, *lis.* *s*APQ.

Page 421. *lig.* 33. le poids E, *lis.* le poids F.

Page 422. *lig.* 34. NC. *lis.* NK.

ORDRE DES FIGURES.

TOME II.

SECTION IV.

SECTION VII.

SECTION VIII.

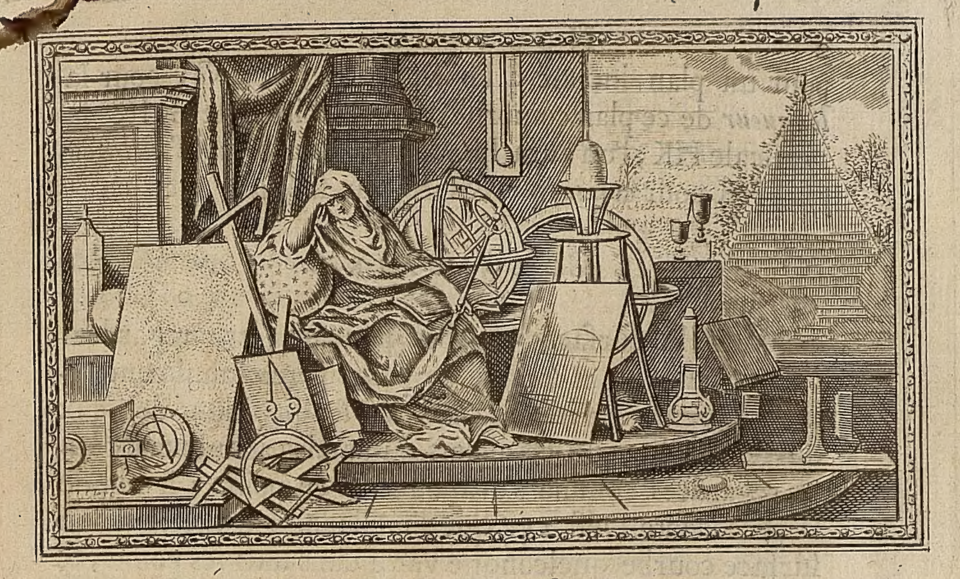
SECTION IX.

SECTION X.

SECONDE PARTIE.
Problêmes.

MACHINES
sans frottement.

EXAMEN
de l'Opinion de M. Borelli.



NOUVELLE MECANIQUE.

TOME SECOND.

SECTION VI.

Des Poids soûtenus sur des surfaces inclinées.

DEFINITION XXV.



N plan qui n'est ni vertical, ni horisontal, s'appelle un *plan incliné*; l'angle qu'il fait avec l'horison s'appelle son *angle d'inclinaison*; la verticale comprise entre son extrémité superieure & l'horisontale qui passe par l'inferieure, s'appelle sa *hauteur*; & la partie de cette horisontale comprise entre ce plan & sa hauteur, s'appelle sa *base*.

Suivant cela, si des surfaces S, V, on prend la moyenne FIG. 204.

pour un plan incliné à l'horiſon GK, & HG, pour la *longueur* de ce plan compriſe entre l'horiſontale GH& la verticale HK, l'on aura HGK pour ſon *angle d'inclinaiſon*, HK pour ſa *hauteur*, & GK pour ſa *baſe*.

COROLLAIRE.

Toutes les ſurfaces courbes pouvant être regardées comme faites d'une infinité de petits plans infiniment petits differemment inclinez ſuivant les directions de ceux qui les touchent en ces points ou parties infiniment petites regardées comme s'évanouiſſant en points ; il ſuit de la précedente Déf. 25. que l'inclinaiſon d'une ligne ou ſurface courbe quelconque varie dans tous ſes points, & que ſon inclinaiſon en chacun d'eux eſt toûjours celle de ſa tangente droite ou de ſon plan touchant en ce point : de ſorte qu'en chaque point O de la ſurface courbe SOV, cette ſurface peut paſſer pour le plan incliné HG qui la touche en ce point O, ayant là HGK pour ſon angle d'inclinaiſon, HK pour ſa hauteur, & GK pour ſa baſe, en prenant HG pour la longueur de ce plan.

DEFINITION XXVI.

On appellera ici & dans la ſuite, *baſe* d'un corps ou d'un poids, ce qu'il aura de ſa ſurface appliquée à celle ſur laquelle il ſe trouvera : par exemple, ici O ſera la *baſe* du poids EO, ſoit que O ſoit un point, ou une ſurface, ſelon la figure & la poſition de ce poids.

Suivant ce langage, un poids aura autant de *baſes* qu'il touchera de ſurfaces differentes en des endroits differens ; c'eſt pour cela que dans la ſuite nous lui donnerons deux *baſes*, lorſqu'il ſera ſoûtenu entre deux ſurfaces, une pour chacune.

Ce langage extraordinaire n'eſt que pour abreger nos expreſſions, & rendre par-là nos démonſtrations plus courtes & moins embarraſſées.

DEFINITION XXVII.

Si du point A de concours des directions quelconques AM, AR, du poids EO & de la puissance R qui le retiendroit en équilibre sur la surface quelconque SV, on imagine une perpendiculaire AD à cette surface, à laquelle on va voir (*Th. 26. Corol.* 1. 2.) que pour cet équilibre cette perpendiculaire doit passer par quelqu'un des points O de la base du poids; & si d'un point quelconque D de cette perpendiculaire AD, on mene une autre perpendiculaire DM à la direction AM de ce poids EO. La force qu'on a vû dans les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & qu'on va voir encore dans les part. 1. 2. du Th. 26. devoir résulter du concours d'action de ce poids EO & de la puissance R sur la surface SV suivant AD, sera appellée la *charge* de cette surface; & la résistance directement opposée que (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 2.) cette surface y fera, s'appellera sa *résistance totale*, ou sa *résistance directe*, ou simplement sa *résistance*; ce qu'elle en fera (*Lem.* 3. *Corol.* 6. 7.) de M vers A suivant la direction MA du poids EO, s'appellera sa *résistance verticale*; & on appellera sa *résistance horisontale* ce qu'elle en fera de même (*Lem.* 3. *Corol.* 6. 7.) de D vers M suivant DM.

Les efforts suivant AM, MD, directement opposez & égaux à ces résistances verticale & horisontale, s'appelleront aussi les *charges* des plans GK, HK, ausquels ces efforts sont (*Hyp.*) perpendiculaires.

AVERTISSEMENT.

Les surfaces, soit planes, soit courbes, s'appelleront SV dans la suite, pour faire quadrer chaque démonstration à toutes à la fois avec moins de figures & de discours: on prendra HG pour la longueur de la plane ou du plan touchant de la courbe au point O de sa charge; & par consequent (*Déf.* 25. *& son Corol.*) la verticale HK pour sa hauteur, & l'horisontale KG pour sa base.

On prend ici à l'ordinaire pour une surface inclinée

quelconque, & pour sa base horisontale, les sections SV, GK, faites par un même plan vertical qui les coupe perpendiculairement toutes deux : il en sera de même de la hauteur HK de cette surface.

Enfin lorsqu'il s'agira de deux surfaces inclinées entrelles, on les supposera toûjours avoir de telles sections de leurs bases en ligne droite.

THEOREME XXVI.

Fondamental de la presente Section 6.

Fig. 205. 206. 207. 208. *Quelques soient la surface inclinée SV, le poids mobile EON, la puissance R qui lui est appliquée, & les directions FC, ER, de ce poids & de cette puissance ; & consequemment aussi quelqu'angle RAC que ces deux directions fassent entrelles : soit imaginé un parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, pris sur les directions ER, FC, de la puissance R & du poids EON depuis le point A de concours de ces mêmes directions.*

I. *S'il y a équilibre entre cette puissance R & ce poids EON, soûtenu par elle sur la surface SV, & que la diagonale AD de ce parallelogramme BACD soit perpendiculaire à cette surface, & la seule qu'on lui puisse ainsi mener du point A (la raison de cette exception paroîtra dans le Scholie suivant) cette diagonale AD passera toûjours par quelque point O de la base du poids EON ; & l'impression ou la charge résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, sur la surface SV, sera toûjours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallelogramme BACD.*

II. *En ce cas d'équilibre sur quelque surface SV que ce soit, sans en excepter presentement aucune, si les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD sont entr'eux comme la puissance R & la pesanteur du poids EON, sur les directions desquelles on suppose ces côtez ; la diagonale AD de ce parallelogramme sera perpendiculaire à cette surface SV en quelque point O de*

la base du poids EON ; & la charge ou impression résultante du concours d'action de ces deux forces sur cette surface, sera encore à chacune d'elles comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans le parallelogramme BACD.

III. *Reciproquement sur quelque surface que ce soit encore, si le parallelogramme BACD a encore ses côtez AB, AC, entr'eux en raison de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, sur les directions desquelles on suppose ces côtez ; & que la diagonale AD de ce parallelogramme soit perpendiculaire à cette surface quelconque SV en quelque point O de la base du poids EON : ce poids sera toûjours alors soûtenu sur cette surface par la puissance R en équilibre avec lui.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir que pour que la puissance R soûtienne le poids EON sur la surface quelconque inclinée SV, l'impression ou la force résultante du concours d'action de cette puissance & de la pesanteur de ce poids sur lui, doit être dirigée suivant une perpendiculaire menée du point A à cette surface, laquelle perpendiculaire passe par la base de ce poids. Donc cet équilibre étant ici supposé entre la puissance R & le poids EON sur cette surface SV ou HG, & la diagonale AD y étant aussi supposée perpendiculaire à cette même surface, & la seule qu'on y puisse mener du point A ; l'impression résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON sur lui, doit être ici suivant cette diagonale AD, & cette diagonale passer par la base de ce poids EON. Donc aussi (*Lem.* 3. *Corol.* 4.) cette force ou impression de A vers D suivant AD perpendiculaire en O à la surface SV, qui en ce cas d'équilibre la soûtient ainsi toute entiere, c'est-à-dire, la charge de cette surface en ce point O, résultante sur elle du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, doit être ici à chacune de ces deux forces generatrices de celle-là, comme cette diago-

nale AD eſt à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Puiſque (*Hyp.*) la puiſſance R & la peſanteur du poids EON ſont ici entr'elles comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD; l'impreſſion réſultante de leur concours d'action ſur ce poids, doit être (*Lem.* 3. *part.* 4. *&* *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers D ſuivant la diagonale AD de ce parallelogramme comme (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) ſi ce corps au lieu d'être pouſſé ou tiré par ces deux forces à la fois, ne l'étoit en ce ſens que par une ſeule qui fût égale à ce qu'il lui en réſulte du concours d'action de ces deux-là. Donc dans le cas d'équilibre ici ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids EON ſur la ſurface SV, cette diagonale doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) perpendiculaire à cette ſurface en quelque point O de la baſe de ce poids; & (*Déf.* 27.) la charge de cette ſurface, égale (*Ax.* 4.) à cette force ou impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON, que cette ſurface ſoûtient toute entiere d'une réſiſtance directement oppoſée, être (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 2.) à chacune de ces deux forces generatrices de celle-là, comme cette diagonale AD à chacun des côtez AB, AC, qui leur répondent ſur leurs directions dans le parallelogramme BACD, ainſi que dans la précedente part. 1. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Puiſque l'on ſuppoſe encore ici la puiſſance R & la peſanteur du poids EON en raiſon des côtez AB, AC, du parallelogramme BACD, pris ſur leurs directions; & que de plus la diagonale AD de ce parallelogramme eſt perpendiculaire à la ſurface SV ou HG en quelque point O de la baſe du poids EON; l'impreſſion réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur de ce poids EON ſur ce corps, doit être ici (*Lem.* 3. *part.* 4. *&* *Corol.* 1. *nomb.* 1.) de A vers D ſuivant cette diagonale AD, & conſequemment être auſſi

(*Hyp.*) perpendiculaire à la surface SV par quelqu'un des points O de la base du poids EON. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) ce poids doit être ici en équilibre avec la puissance R sur cette surface SV. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

PART. I. Au lieu de la surface SV imaginons pour un moment une puissance T, qui avec une corde ZT dirigée suivant DA prolongée de ce côté-là, soûtienne avec la puissance R le poids EON presentement soûtenu avec des cordes seulement. Il est manifeste que puisque (*Hyp.*) la droite TD est perpendiculaire en O à la surface SV, & la seule (*Hyp.*) qu'on lui puisse mener par le point A; non seulement cette surface SV ne peut suppléer la puissance T, & soûtenir en sa place avec la puissance R le poids EON, à moins (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) que cette perpendiculaire AO ne passe par quelque point de la base de ce poids; mais encore qu'alors la résistance ou (*Déf.* 27.) la charge de cette surface ou de son point O seroit (*princip. gener. Corol.* 2.) égale à la puissance T. Or cette puissance T (à la place de la résistance de cette surface SV) soûtenant ainsi avec la puissance R le poids EON, ou (ce qui revient au même) se trouvant ainsi soûtenue par le concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, comme si elle étoit un poids dirigé suivant AT, & soûtenu avec des cordes AR, AC, par deux puissances R, C, dont celle-ci (C) fût égale à la pesanteur du poids EON, & de même direction AC que cette pesanteur : cette puissance T (dis-je) ainsi soûtenue, seroit alors (*Th.* 1. *part.* 3. 4.) à la puissance R & à la pesanteur du poids EON, comme la diagonale AD du parallelogramme BACD est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. Donc non seulement cette diagonale AD perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la surface SV restituée au lieu de la puissance T, doit passer ici par la base du poids EON; mais encore la charge de cette

surface y doit être aussi à la puissance R & à ce poids EON, comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur les directions de cette puissance R & de ce poids EON. *Ce qu'il falloit encore* 1°. *démontrer*.

PART. II. En supposant encore ici la puissance T au lieu de la surface SV, dont elle supplée la résistance en équilibre (*Hyp.*) avec la puissance R & le poids EON, comme si cette puissance T étoit un poids soûtenu seulement avec des cordes AR, AC, par deux puissances R, C, dont la seconde (C) fût égale à la pesanteur du poids EON, & de même direction AC que cette pesanteur; la part. 4. du Th. 1. fait voir que puisque (*Hyp.*) les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD sont ici entr'eux comme la puissance R & la pesanteur du poids EON, la direction TA de la puissance T doit être en ligne droite avec la diagonale AD de ce parallelogramme. Or les Corol. 8. 9. du Lem. 3. font voir aussi qu'afin que la surface SV supplée cette puissance T par sa résistance, la direction TA prolongée de cette même puissance T doit être perpendiculaire en quelque point O de la base du poids EON. Donc en ce cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV remise en sa place au lieu de la puissance T, la diagonale AD du parallelogramme BACD doit être perpendiculaire à cette surface SV en quelque point O de la base du poids EON, & la résistance de cette surface alors égale (*princ. gen. Cor.* 2.) à la puissance T, être aussi pour lors (*Th.* 1. *part.* 4.) à la puissance R & au poids EON, comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD est à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *démontrer*.

PART. III. Puisqu'on suppose encore ici les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD sur les directions de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, & en raison de ces deux forces; la part. 6. du Th. 1. fais voir qu'une puissance T appliquée au poids EON par le moyen

d'une

d'une corde ZT dirigée ſuivant la diagonale DA prolongée de ce parallelogramme, & qui ſeroit à la puiſſance R & à ce poids EON, comme cette diagonale AD eſt à chacun des côtez correſpondans AB, AC, de ce parallelogramme, demeureroit en équilibre avec cette puiſſance R & ce poids EON ainſi ſoûtenu avec des cordes ZT, ER, par ces deux puiſſances T, R. Donc ſi au lieu de la puiſſance T, de qui la direction TD paſſe (*Hyp.*) par le point O de la ſurface du poids EON, une autre ſurface immobile SV ſe preſente pour ſoûtenir ce poids par une baſe dans laquelle ſoit ce point O, & perpendiculairement à cette direction TD ou AD; cette ſurface SV (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) ſoûtiendra effectivement le poids EON en équilibre avec la puiſſance R. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *démontrer.*

Ce qu'on voit ici des ſurfaces convexes SV, s'entendra ſans peine des concaves: tout ce qui précede ſe démontrera préciſément de même. Les cas où le point A de concours des directions de la puiſſance R & du poids EON ſe trouveroit hors l'étendue de ce poids, ſe réſoudront auſſi comme les précedens: le Lem. 3. *& ſes Corollaires font voir que la diverſité quelconque des ſituations de ce point A, ne doit rien changer aux raiſonnemens précedens, non plus qu'aux conſequences qu'on en va déduire; c'eſt-à-dire, que tout cela doit également convenir à toutes les ſituations poſſibles du point A de concours des directions du poids EON & de la puiſſance R. C'eſt pourquoi on n'en exprime point ici les figures, de peur d'en multiplier inutilement le nombre.*

On n'exprime point non plus la figure d'aucune ſurface horiſontale, parce que la ligne de direction de quelque poids que ce ſoit, lui étant toûjours perpendiculaire, il ſe ſoûtient deſſus de lui même, & ſans le ſecours d'aucune puiſſance, par la même raiſon qu'il en a beſoin (comme on vient de le voir) pour demeurer en repos ſur quelqu'autre ſurface que ce ſoit. Le preſent Th. 26. *ne laiſſe pourtant pas de s'étendre encore juſques-là, ainſi qu'on le verra dans les Corollaires.*

COROLLAIRE I.

La part. 2. fait voir qu'aucun poids EON ne peut être soûtenu par aucune puissance R sur aucune surface SV, à moins que la diagonale AD du parallelogramme BADC qui auroit ses côtez AB, AC, en raison de cette puissance & de la pesanteur de ce poids sur leurs directions, ne tombe perpendiculairement sur cette surface, & ne passe en même tems par quelqu'un des points de la base de ce poids.

COROLLAIRE II.

Mais aussi suivant la partie 3. dès que l'un & l'autre arrivera, la puissance R appliquée alors à ce poids EON, ne manquera pas de le soûtenir sur cette surface SV.

COROLLAIRE III.

Lorsque le poids ne touche la surface qu'en un point ; comme lorsqu'il ne s'y appuye que sur un de ses angles, ou que sur un point de la convexité de sa courbure, selon qu'il est angulaire, ou d'une surface courbe ; alors n'y ayant qu'une seule perpendiculaire possible à cette surface sur la base de ce poids ainsi réduite à un point, il suit du Corol. 1. qu'il n'y a point de puissance capable de le soûtenir en cet état, à moins que le concours des lignes de direction de cette puissance & de la pesanteur de ce poids, ne se fasse en quelque point de cette perpendiculaire, c'est-à-dire, à moins que la direction de cette puissance ne passe par le point où cette perpendiculaire & la direction du poids se rencontrent ; & qu'ainsi lorsque ce poids est spherique, ces deux lignes passant toûjours par son centre, il n'y a point de puissance capable de le soûtenir sur quelque surface inclinée que ce soit, à moins que la ligne de direction de cette puissance ne passe aussi par le centre de cette Sphere.

La raison de cela vient, suivant le Corol. 1. de ce que lorsqu'un corps ne touche ou ne s'appuye que par un seul

de ses points sur la surface inclinée, le concours de sa direction & de celle de la puissance qui lui est appliquée, ne se peut faire aussi qu'en un seul point d'où l'on puisse mener une perpendiculaire à la surface par la base de ce poids. Il en est tout autrement lorsque le poids est de figure & de situation à toucher en plusieurs points la surface inclinée, parce qu'alors on y peut trouver aussi plusieurs points d'où l'on peut tirer de telles perpendiculaires à cette surface par la base de ce poids.

COROLLAIRE IV.

Il n'y a point non plus de puissance R quelle qu'elle soit, qui puisse soûtenir aucun poids EON sur quelque surface SV que ce puisse être, à moins que la direction AR de cette puissance ne se trouve dans le complement NAO (à deux angles droits) de l'angle CAO compris entre la direction AC de ce poids, & la droite AO menée du point A perpendiculairement à la surface SV. Car,

1°. Si cette direction AR de la puissance R, se confondoit avec AN, elle ne feroit plus aucun angle avec AC: ainsi (*Ax.* 4. *&* *Lem.* 3. *Corol.* 2.) cette puissance R porteroit seule tout le poids EON sans le secours de la surface SV; ce qui est contre l'hypothese.

2°. Si cette ligne AR de direction de la puissance R, se confondoit avec AO, ou si elle sortoit de l'angle NAO, la diagonale AD du parallelogramme BACD, se trouveroit alors vers G obliquement à HG; ce qui feroit necessairement (*Lem.* 3. *Corol.* 7. 8. 9.) tomber le poids EON de ce côté-là; ce qui est encore contre l'hypothese.

Donc la direction AR de la puissance R doit toûjours se trouver dans le complement NAO de l'angle CAO: de sorte que le complement à deux droits est tout l'espace du mouvement que cette direction AR peut avoir, c'est-à-dire, tout l'espace dans lequel doivent être comprises toutes les directions AR des puissances R capables de soûtenir le poids EON sur le point O de la surface SV.

Par un raisonnement à peu près semblable, on prouvera qu'en cas d'équilibre la direction AC du poids ne peut jamais se rencontrer dans l'angle RAO.

COROLLAIRE V.

En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, le plan BAC, ou le parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, qui (*Hyp.*) leur sont proportionnels sur leurs directions, est toûjours perpendiculaire à cette surface; puisque (*part.* 2.) la diagonale AD de ce parallelogramme l'est toûjours à cette même surface SV.

COROLLAIRE VI.

En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, la part. 1. fait voir que si la diagonale AD d'un parallelogramme BACD fait de côtez pris sur les directions de cette puissance & de ce poids, la charge de cette même surface, qui lui résulte du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, sera toûjours alors à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD est à chacun des côtez AB, AC, qui répondent sur leurs directions dans le parallelogramme BACD; & consequemment que dans cette part. 1. ces côtez AB, AC, de ce parallelogramme sont toûjours entr'eux comme la puissance R & le poids EON, ainsi qu'on l'a supposé dans la part. 2. D'où l'on voit que le parallelogramme BACD fait de côtez AB, AC, pris sur les directions de la puissance R & de la pesanteur du poids EON, doit toujours être ici le même, soit qu'on y suppose ces côtez en raison de ces forces comme dans la part. 2. ou qu'on en suppose la diagonale perpendiculaire à la surface SV par la base du poids EON.

COROLLAIRE VII.

Les part. 1. 2. font voir qu'en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface SV, l'im-

pression que cette puissance & la pesanteur de ce poids font ensemble sur cette surface, c'est-à-dire, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, est toûjours à chacune de ces forces comme la diagonale AD du parallelogramme BACD, perpendiculaire à cette surface, est à chacun des deux côtez AB, AC, qui leur répondent sur leurs directions dans ce parallelogramme BACD; l'on aura toûjours alors cette charge de la surface SV, la puissance R, & la pesanteur du poids EON, en raison des trois parties AD, AB, AC, de leurs directions, ou (à cause que BD=AC dans le parallelogramme BACD) en raison des trois côtez AD, AB, BD, du triangle BAD. Donc une quelconque de ces trois forces sera toûjours moindre que la somme des deux autres, chacun des trois côtez d'un triangle quelconque étant toûjours plus petit que les deux autres pris ensemble.

COROLLAIRE VIII.

Ç'a donc été une méprise que de dire, comme a fait un Auteur du premier ordre, qu'*il est certain que le poids O ne pese sur le plan AD que la difference qui est entre la force qu'il faut à le soûtenir sur ce plan, & celle qu'il faut pour le soûtenir en l'air; comme s'il pese cent livres, & qu'il n'en faille que quarante pour le soûtenir sur le plan AD, ce plan en porte soixante seulement.* A ce compte ce poids de 100 livres seroit égal à la somme de 40+60 faite de la puissance requise pour le soûtenir sur le plan AD, & de la charge de ce plan; ce que le précedent Corol. 7. fait voir être faux, aussi-bien que cette proposition d'un autre Auteur: *Gravitatio in planum horisontale ad gravitationem in planum inclinatum, est ut secans AD ad excessum secantis supra radium AB*; laquelle expression ne signifie en Latin que ce qu'on vient de voir en François de l'autre Auteur. FIG. 205.

COROLLAIRE IX.

Fig. 205. 206. 207. 208.

Puisque (*Corol.* 7.) en cas d'équilibre entre la puissance R & la pesanteur du poids EON sur la surface quelconque SV, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, cette puissance R, & cette pesanteur du poids EON, sont toûjours entr'elles comme les trois côtez AD, AB, BD, du triangle BAD ; & que ces trois côtez sont toûjours entr'eux (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme les sinus des trois angles ABD, ADB, BAD, qui leur sont opposez dans ce triangle, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) comme les sinus des trois angles BAC, CAD, BAD, complemens ou égaux à ceux-là : la charge de cette surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON sur elle, doit toûjours être à chacune de ces deux forces en cas d'équilibre entr'elles (*Hyp.*) sur cette surface SV, comme le sinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, est à chacun des sinus des angles CAD, BAD, que ces directions reciproquement prises, font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la surface SV.

COROLLAIRE X.

Donc en cas d'équilibre la puissance R est toûjours aussi au poids EON, comme le sinus de l'angle CAD est au sinus de l'angle BAD, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que leurs directions font avec la perpendiculaire AD menée de leur concours A à la surface SV sur laquelle on les suppose ici en équilibre.

COROLLAIRE XI.

De ce que suivant les part. 1. 2. la charge de la surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R & de la pesanteur du poids EON en équilibre sur elle, est alors à chacune de ces deux forces comme la diagonale AD du parallelogramme BACD (fait comme dans celle qu'on voudra des part. 1. 2.) est à chacun de ses côtez AB,

AC, pris sur leurs directions ; il est visible que plus l'angle BAC (compris entre ces directions) sera grand, la diagonale AD en étant d'autant moins grande (quoiqu'en raison differente) par rapport aux mêmes côtez AB, AC, de ce parallelogramme BACD, moins aussi sera grande la charge de la surface SV, sur laquelle la même puissance R & le même poids EON seront ainsi en équilibre entr'eux ; & que cet angle BAC peut augmenter à tel point que cette charge sera si petite qu'on voudra, sans cependant (*Lem. 9. part. 3.*) pouvoir devenir moindre que la difference du poids & de la puissance : le cas de la moindre charge sera lorsque la direction de cette puissance R, directement opposée à celle du poids EON, rendra (*Déf. 11.*) l'angle BAC infiniment obtus : auquel cas la surface inclinée SV ou HG se trouvera horisontale, & le poids EON plus grand de cette valeur que la puissance R ; ou s'il lui est égal, cette charge sera nulle, & la surface SV se trouvera au contraire verticale, cette égalité, qui exige par tout (*Corol. 8.*) les angles BAD, CAD, égaux entr'eux, exigeant ainsi AD horisontale, & consequemment HG (sa perpendiculaire en O) verticale lorsque l'angle BAC est infiniment obtus.

On entend ici par une surface horisontale *ou* verticale, *un plan qui le soit, ou bien un point d'une surface courbe, dont le plan touchant en ce point, soit horisontal ou vertical.*

COROLLAIRE XII.

Le précedent Corol. 11. peut encore se déduire du Corol. 7. par le moyen du Corol. 2. du Lem. 7. Car ce Corol. 7. fait voir en general qu'en cas d'équilibre entre la puissance R & la pesanteur du poids EON sur la surface SV, la charge de cette surface, résultante du concours d'action de ces deux forces sur elle, est toûjours à chacune de ces deux forces, comme le sinus de l'angle BAC compris entre leurs directions, est à chacun des sinus des angles CAD, BAD, que ces directions reciproquement prises, font avec la perpendiculaire AO ou AD

menée de leur concours A à cette ſurface SV. Or lorſque l'angle BAC eſt infiniment obtus, c'eſt-à-dire (*Lem.* 6. *Corol.* 4.) lorſque les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD ſe trouvent en ligne droite ; la diagonale AD de ce parallelogramme ſe trouvant alors confondue avec un de ces deux côtez, ſçavoir, avec celui qui exprime la plus grande des deux forces, dont ils ſont les directions, & conſequemment (*Déf.* 11.) un des deux angles CAD, BAD, ſe trouvant alors infiniment aigu, le Corol. 2. du Lem. 7. fait voir qu'alors le ſinus de l'angle infiniment obtus BAC, doit être égal à la difference des ſinus de ces deux-là. Donc auſſi pour lors la charge de la ſurface SV, réſultante du concours d'action de la puiſſance R & de la peſanteur du poids EON en équilibre entr'eux (*Hyp.*) ſur elle, doit être égale à la difference de ces deux forces ; & le reſte comme dans le précedent Corol. 11.

Il ſuit de tout ce qui précede, que la charge d'une ſurface inclinée quelconque, ſur laquelle un poids auſſi quelconque eſt ſoûtenu par quelque puiſſance que ce ſoit, n'eſt pas toûjours la même, mais qu'elle varie avec l'angle que font entr'elles les directions du poids & de la puiſſance, & augmente à meſure que cet angle devient plus aigu.

Pour abreger nos expreſſions, la charge réſultante du concours d'action de la puiſſance R & du poids EON ſur la ſurface SV en cas d'équilibre entr'eux ſur cette ſurface, étant (démonſtrat. de la part. 2.) *ſuivant AO perpendiculaire à cette même ſurface en O ; ce point O de cette ſurface SV, lequel ſoûtient ainſi cette charge toute entiere, ſera appellée dans la ſuite* le point ſur lequel le poids EON eſt ſoutenu, *quand même ce poids toucheroit cette ſurface en d'autres points. C'eſt auſſi de cette maniere qu'il faut entendre cette expreſſion, s'il nous eſt arrivé de nous en être déja ſervis.*

COROLLAIRE XIII.

Il ſuit auſſi du Corol. 10. qu'il faut d'autant moins de force R pour ſoûtenir un poids EON ſuivant la même

direction AR sur quelque surface SV que ce soit, que cette surface, si elle est plane, ou que son plan touchant au point O, auquel la perpendiculaire AO la rencontre, est plus incliné, ou que l'angle d'inclinaison de ce plan avec l'horison est plus petit, quoiqu'en raison differente; parce que la raison du sinus de l'angle CAD au sinus de l'angle BAD en est d'autant moindre; & comme cet angle d'inclinaison, tel qu'est HGK dans les Fig. 205. 206. Fig. 205. 206. peut diminuer à l'infini, la force R qu'il faut pour soûtenir un poids quelconque EON suivant la même direction AR sur quelque surface SV que ce soit, peut aussi diminuer à l'infini: de sorte que lorsque cette surface sera infiniment inclinée, c'est-à-dire, horisontale, du moins dans le point où la perpendiculaire AO la rencontre, cette force R sera nulle, ou réduite à zero, c'est-à-dire, qu'il n'en faudra plus alors pour soûtenir le poids EON sur cette surface. La raison en est évidente; puisque la résistance de cette surface alors perpendiculaire à la direction de ce poids, lui étant directement opposée, en soûtiendra seule (*ax.* 4.) toute la pesanteur.

COROLLAIRE XIV.

Cela se peut encore démontrer sans le secours des sinus, si l'on considere, par exemple, dans les Fig. 205. 206. dont le plan HG soit aussi le touchant d'une surface courbe en celui O de ses points sur lequel le poids EON est soûtenu: si l'on considere, dis-je, que les perpendiculaires AD en O sur HG, & AC en P sur l'horisontale GK, rendent toûjours les angles HGK, CAD, égaux entre-eux; & qu'ainsi à mesure que le premier d'inclinaison HGK diminuera par l'approche du plan HG vers l'horison GK, l'autre CAD diminuera aussi par l'approche de la diagonale AD du parallelogramme BACD vers son côté vertical AC, ou du côté AC vers AD, si l'équilibre se fait sur un même point O de la surface HG ou SV: ce qui changeant ce parallelogramme en un autre d'un moindre rapport de AB (supposée de direction constante)

à AC, le poids EON successivement soûtenu sur le même plan HG (*Hyp.*) par differentes puissances R dirigées toutes suivant la même direction AR, les exigera pour cela (*part.* 1.) toûjours moindres à mesure que l'angle d'inclinaison HGK diminuera, & enfin nulles lorsque cet angle le sera, c'est-à-dire, lorsque ce plan HG sera horisontal, ou que la surface SV le sera au point touché par ce plan, sur lequel point ce même poids EON seroit ainsi successivement soûtenu par differentes puissances R toutes de même direction AR.

COROLLAIRE XV.

Au contraire pour soûtenir ce poids EON sur le même point O d'une surface quelconque toûjours également inclinée en ce point, mais suivant differentes directions AR des puissances R capables de l'y soûtenir chacune suivant la sienne; il suit du Corol. 10. qu'il leur faut d'autant plus de force que l'angle DAB partie (*Corol.* 4.) de l'angle DAN, comprise entre la perpendiculaire AO à la surface SV, & la direction AB de la puissance R qui soûtient ce poids EON, differe davantage de l'angle droit; parce que le sinus de cet angle DAB en étant (*Déf.* 9.) d'autant moindre, la raison du sinus de l'angle CAD (*Hyp.*) toûjours le même, en sera d'autant plus grande à celui-là: & comme cet angle DAB peut être plus ou moins grand qu'un angle droit, & en differer de plus en plus jusqu'à ce que AB (*Corol.* 4.) se confonde avec AN ou avec AO, sans que AB sorte de l'angle NAO; la puissance R qui soûtient (*Hyp.*) ce poids EON, doit (*Corol.* 10.) augmenter ou diminuer de part & d'autre jusques-là; mais differemment selon que AB s'approche de AN ou de AO. Car,

1°. Cette puissance R ne peut jamais être plus grande (*Corol.* 4. 10.) par l'approche de cette direction AB vers AN, qui rende l'angle DAB plus grand qu'un droit, que lorsque cette direction AB se confond avec AN, puisque

l'angle DAB (alors égal à DAN) differant pour lors de l'angle droit le plus qu'il en puisse differer de ce côté-là, sans que AB sorte (*Corol.* 4.) de l'angle DAN, la raison du sinus de l'angle DAC au sinus de DAB, c'est-à-dire (*Corol.* 10.) la raison de la puissance R au poids EON, se trouve la plus grande qu'elle puisse être en cas de l'angle DAB plus grand qu'un droit. Mais cet angle DAB se trouvant alors complement de CAD à deux droits, & consequemment (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) de même sinus que lui; la puissance R devroit alors (*Corol.* 10.) être égale au poids EON qu'elle soûtiendroit. Donc cette puissance R, qui par l'approche de sa direction AR vers AN depuis l'angle droit avec AO, doit toûjours augmenter, ne le peut que jusqu'à se trouver égale au poids EON qu'elle soûtiendroit sur le point O de la surface SV: sçavoir, lorsque AB seroit confondue avec AN, & que la puissance R seroit ainsi d'une direction directement contraire à celle du poids EON; auquel cas il est visible (*ax.* 4.) que cette puissance soûtiendroit seule le poids sans le secours de la surface SV, qui alors ne porteroit plus rien.

2°. Au contraire cette puissance R peut augmenter à l'infini par l'approche de sa direction AR vers AO; parce que la raison du sinus de l'angle CAD au sinus de BAD augmentant à mesure que la ligne AB s'approche de AO en s'éloignant de la situation où elle feroit un angle droit avec AO; cette puissance R peut aussi (*Corollaire* 10.) augmenter de ce côté-là jusqu'à ce que (*Corol.* 4.) sa direction AB concoure avec AO en se confondant avec elle. Or en ce cas l'angle BAD (*Déf.* 11. *&* *Corol.* 3. *du Lem.* 6.) se trouvant infiniment petit, la raison du sinus de l'angle fini CAD au sinus de cet infiniment petit BAD, sera (*Déf.* 9.) infinie; & consequemment aussi (*Cor.* 10.) celle de la puissance R au poids EON en équilibre (*Hyp.*) avec elle sur le point O de la surface SV, c'est-à-dire, que cette puissance R devroit pour lors être infinie pour soûtenir ainsi le poids fini quelconque EON sur le point O de la surface HG ou SV. Donc cette puissance R peut

effectivement augmenter à l'infini dans le mouvement que la direction AR peut avoir depuis la situation où elle feroit un angle droit avec AO perpendiculaire à cette surface, jusqu'au concours de ces deux mêmes lignes en une, & demeurer cependant toûjours en équilibre avec le même poids EON sur le même point O d'une surface inclinée quelconque SV.

On vient de supposer dans ce Corol. 15. *& on le supposera toûjours dans la suite, conformément au Corol.* 4. *qu'en cas d'équilibre entre la puissance quelconque R & le poids EON sur la surface aussi quelconque SV, la direction AB de cette puissance R ne peut jamais être au dehors de l'angle DAN; parce que si cette direction AB passoit dans quelqu'un des angles NAC, CAO, l'impression résultante du concours d'action de la puissance quelconque R & de la pesanteur du poids EON sur ce poids, devant* (Lem. 3. Corol. 2.) *le porter suivant une ligne qui du point A passeroit aussi à travers de cet angle, sans pouvoir jamais être perpendiculaire à la surface SV sur laquelle AO l'est déja* (Hyp.) *& l'unique qui s'y puisse mener du point A par la base du poids EON; ce poids ne pourroit jamais alors* (Lem. 3. Corol. 8. & Th. 26. Corol. 1.) *faire équilibre sur cette surface avec la puissance R, quelle qu'elle fût; ce qui seroit contre la presente hypothése, dans laquelle on les y suppose en équilibre. C'est, dis-je, pour cela qu'on vient de supposer dans le précedent Corol.* 15. *& qu'on supposera toûjours dans la suite, qu'en cas d'équilibre entre une puissance R & un poids quelconque EON sur une surface aussi quelconque SV, la direction AB ou AR de cette puissance R ne peut jamais sortir de l'angle DAN compris entre la direction AC du poids EON prolongée vers N, & la perpendiculaire AO ou AD menée du point A sur la surface SV* (*par la base du poids EON*) *à laquelle, dans le present Th.* 26. *& dans tous ses Corollaires on suppose qu'on n'en peut mener qu'une seule du point A, pour la raison qu'on en dira dans le Scholie suivant, de peur de digression dans ce Théoreme-ci.*

COROLLAIRE XVI.

Tout le contenu du précedent Corol. 15. peut encore être démontré ſans le ſecours des ſinus. Imaginons d'abord la direction AR de la puiſſance R, perpendiculaire à la droite AX qu'on ſuppoſe l'être en O à la ſurface SV ou HG par la baſe du poids EON en équilibre ſur ce point O avec la puiſſance R; & conſequemment que le côté CD du parallelogramme BACD ſoit perpendiculaire à la diagonale AD de ce parallelogramme. Il eſt manifeſte que cette perpendiculaire CD eſt la plus courte de toutes les droites CD, C*d*, C*δ*, &c. qu'on peut mener du même point C ſur cette diagonale prolongée, & que les plus éloignées de CD ſont les plus grandes. Par conſequent la puiſſance R qui ſoûtiendroit le poids EON en O ſur la ſurface quelconque SV, ſuivant AR, devant être à ce poids (*Corol. 6.*) comme AB ou CD eſt à AD, ſeroit ici la plus petite qui l'y pût ſoûtenir, & moindre que toute autre qui l'y ſoûtiendroit ſuivant toute autre direction A*r* ou A*ρ*, &c. parallele à C*d* ou C*δ*, &c. cette nouvelle puiſſance en *r* ou en *ρ*, &c. devant alors (*Cor. 6.*) être à ce même poids EON en raiſon de C*d* ou C*δ*, &c. côté du parallelogramme *b*AC*d* ou *β*AC*δ*, &c. à ſon autre côté AC, le même pour tous ces parallelogrammes comme le poids EON eſt ici (*Hyp.*) toujours le même à ſoûtenir par chacune de ces puiſſances placées en R, *r*, *ρ*, &c. ſur le même point O de la ſurface SV. Donc, Fig. 12.

1°. Le côté C*d* du parallelogramme *b*AC*d* augmentant à meſure que l'angle AC*d* ou ſon égal NA*r* ſe trouve plus aigu, & cela juſqu'à ce que ce côté C*d* confondu avec CA, lui ſoit égal; la puiſſance en *r* pour ſoûtenir le poids EON ſur le même point O de la ſurface SV ſuivant une direction A*r* parallele à C*d*, doit toujours augmenter juſqu'à ce que cette direction A*r* ſoit confondue avec AN, ou ſa parallele C*d* avec CA; & à cet inſtant de confuſion être égale au poids EON, ſans pouvoir devenir plus grande de ce côté, C*d* ne pouvant devenir plus

grande que CA par l'approche de sa parallele Ar vers AN, au-delà de laquelle elle ne peut (*Corol.* 4.) passer en sortant de l'angle DAN sans rompre l'équilibre supposé. Donc depuis la situation de sa direction AR perpendiculaire à AO, cette puissance R en r, doit toujours augmenter par l'approche de sa nouvelle direction Ar vers AN, jusqu'à ce que cette direction Ar se trouve confondue avec AN; & à cet instant de confusion se trouver égale au poids EON, sans pouvoir être plus grande de ce côté-là, ainsi qu'on l'a déja vû dans le nomb. 1. du précedent Corol. 15.

2°. Au contraire, lorsque la direction Aρ de la puissance R en ρ, s'éloigne de la situation AR perpendiculaire à AO, en s'approchant de AO; cette puissance en ce cas d'équilibre avec le poids EON sur le point O de la surface SV, devant être (*Corol.* 6. à ce poids comme Aβ ou Cδ à AC, il est visible que plus la direction AC de cette puissance en ρ, sera près de AO, sa parallele Cδ en devenant d'autant plus grande, quoiqu'en raison differente; cette puissance en ρ en devra être d'autant plus grande pour soûtenir le même poids EON suivant cette direction Aρ sur le même point O de la surface SV; & être enfin infinie lorsque cette direction Aρ se trouvera confondue avec AX, sa parallele Cδ se trouvant alors infinie. C'est aussi ce qu'on a déja vû dans le nomb. 2. du précedent Corol. 15.

COROLLAIRE XVII.

FIG. 208. 209. 210. Les nomb. 1. 2. du précedent Corol. 16. font voir non seulement que pour soûtenir un même poids EON sur le même point O d'une surface quelconque SV toûjours également inclinée, suivant differentes directions AR, Ar, Aρ, &c. des puissances capables de l'y soûtenir chacune suivant la sienne, il leur faut d'autant plus de force que les angles rAO, ρAO, &c. de leurs directions avec AO, different davantage de l'angle droit RAO, ainsi qu'on l'a déja vû dans le Corol. 15. mais encore

que lorſque les differences *r*AR, ρAR, &c. en ſeront égales; ces forces (*Corol. 6.*) le ſeront auſſi entr'elles, les côtez C*d*, Cδ, des parallelogrammes *b*AC*d*, βACδ, alors également éloignez de CD perpendiculaire (*Hyp.*) ſur AX, ſe trouvant alors égaux entr'eux.

COROLLAIRE XVIII.

Il ſuit encore des Corol. 15. 16. que de toutes les directions AR, A*r*, Aρ, &c. ſuivant leſquelles differentes puiſſances peuvent chacune ſuivant la ſienne ſoûtenir un même poids EON ſur un même point O d'une ſurface quelconque SV toûjours également inclinée; la direction AR perpendiculaire à AO; ou parallele au plan GH, qui ſoit auſſi le plan touchant en O de la ſurface SV propoſée, ſi cette ſurface eſt courbe, eſt celle qui exige la moindre de toutes ces puiſſances pour l'y ſoûtenir; & que la perpendiculaire AO à ce plan, eſt de toutes ces directions celle qui exige la plus grande de toutes ces puiſſances: la premiere ſuivant AR, doit être à ce poids EON (*Corol.* 10.) comme la longueur GH de ce plan eſt à ſa hauteur HK; & la ſeconde ſuivant AO, devroit (*nomb. 2. des Corol.* 15. 16.) être infinie.

COROLLAIRE XIX.

Pour les ſurfaces planes HG paralleles à la direction AC du poids EON, & pour les points des ſurfaces courbes SV, d'où l'on peut mener des plans touchans qui ſoient auſſi perpendiculaires à l'horiſon: la ligne de direction AR de la puiſſance R qui ſoûtient ce poids EON ſur ou contre ces plans, ou ces points de ſurfaces courbes, ne pouvant (*Corol.* 4.) s'éloigner de la ſituation où elle feroit perpendiculaire à AO, qu'en s'approchant de cette même AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à la ſurface HG ou SV, puiſque l'angle NAO en ce cas eſt droit; cette puiſſance R ne peut auſſi augmenter (*Cor.* 15. 16.) que dans ce mouvement de ſa direction, depuis AN, où elle feroit égale au poids EON, juſqu'en AO, où elle de- Fig. 207. 208.

voit être infinie pour soutenir ce poids fini quelconque EON contre le point O de la surface HG ou SV verticale en ce point, suivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) à cette surface en ce même point O.

Il est à remarquer que suivant l'avis qui précede le Corol. 13. lorsqu'on dit ici qu'un poids est soûtenu sur ou contre le même point d'une surface, l'on ne prétend pas dire qu'il ne la rencontre jamais qu'en un seul point : l'on entend seulement que la droite AD, qui du concours A des directions de ce poids EON & de la puissance R en équilibre avec lui sur cette surface quelconque SV, tombe perpendiculairement sur cette même surface, la rencontre toûjours dans le même point O tant que ce poids est soûtenu dessus, quoique ce soit suivant differentes directions de puissances. La raison de cette précaution est évidente du côté des surfaces courbes, dont tous les points ont chacun un plan touchant d'une direction particuliere. Pour du côté des surfaces planes, on la reconnoîtra dans les Corol. 35. 36. 37. où l'on verra que dans l'hypothese du concours des lignes de direction des poids en quelque point de la Terre que ce soit, ils ne pesent pas toûjours également sur ces plans, quoique la direction de la puissance appliquée à chacun d'eux, demeure toûjours la même, & quand même ces poids seroient de pesanteur constante, c'est-à-dire, chacun de pesanteur absolue toûjours la même, malgré le Corol. 37. du Th. 21. Au contraire ils pesent toûjours également chacun sur le même point de quelque surface que ce soit, & la charge de cette surface y est toûjours la même, à moins qu'on ne change la direction de la puissance, ou la situation de cette surface. C'est pour cela que dans les sept précedens Corol. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. où l'on examine separément le changement que peuvent causer dans l'action du poids sur une surface, & dans la charge de cette surface, les differentes inclinaisons de la même ou de differentes surfaces sur lesquelles ce poids seroit soûtenu, & les differentes directions des puissances qui l'y soûtiendroient, on a regardé ce poids comme appliqué non seulement à une même surface de même inclinaison, mais aussi toûjours au même point de cette surface.

COROL.

COROLLAIRE XX.

Puiſqu'en cas d'équilibre entre la puiſſance R & le poids EON ſur quelque ſurface SV que ce ſoit, ſi du concours A des directions ER, FC, de cette puiſſance & de ce poids, on mene une perpendiculaire AO à cette ſurface, de laquelle perpendiculaire prolongée on prenne de A vers O une partie quelconque AD, ſur laquelle (comme diagonale) on faſſe un parallelogramme BACD compris entre ces directions; la puiſſance R, la peſanteur du poids EON, & la charge réſultante de leur concours d'action ſur cette ſurface SV, ſont entr'elles (*Corol.* 7.) en raiſon des trois côtez AB, BD, AD, du triangle BAD, ou comme les trois côtez CD, CA, AD, de ſon ſemblable CDA dans le parallelogramme BACD : il eſt manifeſte dans l'hypotheſe ordinaire où l'on regarde les verticales AC, HK, comme paralleles entr'elles, & comme faiſant l'une & l'autre des angles droits en P, K, avec l'horiſontale GK, de même que AO (*Hyp.*) en O avec HG, & dans laquelle par conſequent les trois triangles AOQ, GPQ, GKH, ſont ſemblables entr'eux, les deux premiers ayant les angles égaux en Q, & l'angle G étant commun aux deux derniers : il eſt, dis-je, manifeſte dans cette hypotheſe, Fig. 105. 206.

I. Que ſi la direction AR de la puiſſance R eſt parallele à la longueur HG du plan touchant en O de la ſurface quelconque SV, c'eſt-à-dire, ſi l'angle DAB, ou ſon égal ADC eſt droit; la reſſemblance qui ſe trouve alors entre les triangles DAC & le triangle OAQ qu'on vient de voir ſemblable ici au triangle KGH, y rendant auſſi les triangles DAC, KGH, ſemblables entr'eux; & conſequemment auſſi les trois côtez CD, CA, AD, du premier de ces deux-ci, en raiſon des trois homologues HK, HG, KG, du ſecond; la puiſſance R, la peſanteur du poids EON, & la charge réſultante de leur concours d'action ſur la ſurface SV, ſeront ici entr'elles en raiſon de ces trois côtez HK, HG, KG, du triangle KGH,

c'est-à-dire, comme la hauteur HK du plan HG, sa longueur HG, & sa base KG, sont entr'elles. De sorte qu'ici,

1°. La puissance R est au poids EON, comme la hauteur HK du plan HG est à sa longueur HG.

2°. La même puissance R est à la charge de la surface SV, résultante du concours d'action de la puissance R, & de la pesanteur du poids EON sur cette surface, comme la hauteur HK du plan HG est à sa base KG.

3°. La pesanteur du poids EON est à cette même charge de la surface SV ou HG, comme la longueur HG du plan de ce nom est à sa base KG.

4°. L'effort d'un poids quelconque EON pour descendre le long d'un plan incliné HG, & en vertu duquel ce poids commenceroit effectivement à descendre, si on l'abandonnoit à lui-même, étant égal (*Ax.* 4.) à la puissance R, qui dirigée parallelement à la longueur HG de ce plan, retiendroit ce poids en repos sur ce même plan; on voit (*nomb.* 1. 2. 3.) que cet effort, qu'un Auteur * appelle *Momentum liberum*, ce poids & ce que ce poids libre en feroit de perpendiculaire sur ce plan HG, doivent toûjours être entr'eux comme sont ici la puissance R, & ce poids EON, & la charge de la surface SV.

* Vitalis Jordanus.

II. Si la direction AR de la puissance R est parallele à la base KG du plan HG, c'est-à-dire, si l'angle BAC est droit, & consequemment aussi tous les autres angles du parallelogramme BACD, comme le sont (*Hyp.*) les angles en P, K; la ressemblance qui se trouve alors entre le triangle CDA, & le triangle QOA, qu'on vient de voir semblable ici au triangle HKG, y rendant aussi les triangles CDA, HKG, semblables entr'eux, & consequemment les trois côtez CD, CA, AD, du premier de ces deux-ci, en raison des trois homologues HK, KG, HG, du second; la puissance R, la pesanteur du poids EON, & la charge résultante du concours d'action perpendiculaire sur la surface SV, seront ici entr'elles en raison de ces trois côtez HK, HG, KG, du triangle HKG, c'est-

à-dire, comme la hauteur HK du plan HG, sa base KG, & sa longueur HG, sont entr'elles. De sorte qu'ici,

1°. La puissance R est au poids EON, ou à sa pesanteur, comme la hauteur HK du plan HG est à sa base HG.

2°. La puissance R est à la charge de la surface SV, résultante du concours d'action perpendiculaire de cette puissance & du poids EON sur cette surface, comme la hauteur HK du plan HG est à sa longueur HG.

3°. La pesanteur du poids EON est à cette même charge de la surface SV, comme la base KG du plan HG est à sa longueur HG.

III. Si presentement on suppose deux puissances R, *r*, qui soûtiennent successivement un même poids EON sur le même point O de la même surface SV, la premiere (R) suivant une direction parallele à la longueur HG du plan, & la seconde (*r*) suivant une direction parallele à la base KG de ce plan; les nomb. 1. des deux précedens art. 1. 2. font voir ensemble que la premiere (R) de ces deux puissances sera ici à la seconde (*r*) comme la base KG du plan HG sera à sa longur HG. Car (*art.* 1. *nomb.* 1. R. EON : : HK. HG. Et (*art.* 2. *nomb.* 1.) EON. *r* : : KG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. *r* : : KG. HG. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXI.

Dans la même hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, soient deux poids P, *p*, soûtenus par deux puissances R, *r*, sur deux plans inclinez de longueurs L, *l*, desquels les hauteurs soient H, *h*, les bases B, *b*, & les charges C, *c*, résultantes chacune du concours d'action perpendiculaire de chaque poids & de chaque puissance sur chaque surface ou plan: Soient (dis-je) appellées

Les longueurs des plans,	L, *l*.
Leurs hauteurs,	H, *h*.
Leurs bases,	B, *b*.

Leurs charges, C; c.
Les poids, ou leurs pesanteurs, P, p.
Les puissances qui les soûtiennent sur ces plans, R, r.

Ces noms supposez, il suit de l'art. 1. du précedent Corol. 20. que si les directions des puissances R, r, sont paralleles aux longueurs L, l, des plans sur lesquels elles soûtiennent les poids P, p,

1°. L'on aura (*Cor. 20. art. 1. nomb. 1.*) R. P : : H. L $=\frac{P\times H}{R}$. Et r. p : : h. l $=\frac{p\times h}{r}$. Donc L. l : : $\frac{P\times H}{R}$. $\frac{p\times h}{r}$. D'où résulte $\frac{L\times p\times h}{r}=\frac{l\times P\times H}{R}$, ou $L\times R\times p\times h=l\times r\times P\times H$. Ce qui donne tous les rapports possibles de deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité; quelques autres rapports qu'on suppose entre les six autres grandeurs prises ainsi deux à deux comparables entr'elles.

2°. L'on aura aussi (*Corol. 20. art. 1. nomb. 2.*) R. C : : H. B $=\frac{C\times H}{R}$. Et r. c : : h. b $=\frac{c\times h}{r}$. Donc B. b : : $\frac{C\times H}{R}$. $\frac{c\times h}{r}$. D'où résulte $\frac{B\times c\times h}{r}=\frac{b\times C\times H}{R}$, ou $B\times R\times c\times h=b\times r\times C\times H$. Ce qui donne tous les rapports possibles des huit grandeurs qui entrent en cette égalité, en les prenant deux à deux comparables entr'elles, comme dans le précedent nomb. 1.

3°. L'on aura de plus (*Corol. 20. art. 1. nomb. 3*). C. P : : B. L $=\frac{P\times B}{C}$. Et c. p : : b. l $=\frac{p\times b}{c}$. Donc L. l : : $\frac{P\times B}{C}$. $\frac{p\times b}{c}$. D'où résulte $\frac{L\times p\times b}{c}=\frac{l\times P\times B}{C}$, ou $L\times C\times p\times b=l\times c\times P\times B$. Ce qui donne aussi tous les rapports possibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles, comme dans les précedens nomb. 1. 2.

COROLLAIRE XXII.

Les noms demeurans les mêmes que dans le précedent Corol. 21. auſſi-bien que l'hypotheſe des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans ; il ſuit auſſi de l'art 2. du Corol. 20. que ſi les directions des puiſſances R, r, ſont paralleles aux baſes B, b, des plans ſur leſquels elles ſoutiennent les poids P, p ;

1°. L'on aura (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1.) $R.P :: H.B = \frac{P\times H}{R}$. Et $r.p :: h.b = \frac{p\times h}{r}$. Donc $B.b :: \frac{P\times H}{R}.\frac{p\times h}{r}$. D'où reſulte $\frac{B\times p\times h}{r} = \frac{b\times P\times H}{R}$, ou $B\times R\times p\times h = b\times r\times P\times H$. Ce qui donne tous les rapports poſſibles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, en les prenant deux à deux quelconques comparables entr'elles, comme dans les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 1.

2°. L'on aura auſſi *Corol.* 20. *art.* 2. *nomb.* 2.) $R.C :: H.L = \frac{C\times H}{R}$. Et $r.c :: h.l = \frac{c\times h}{r}$. Donc $L.l :: \frac{C\times H}{R}.\frac{c\times h}{r}$ D'où reſulte $\frac{L\times c\times h}{r} = \frac{l\times C\times H}{R}$, ou $L\times R\times c\times h = l\times r\times C\times H$. Ce qui donne auſſi tous les rapports poſſibles entre deux quelconques comparables entr'elles des huit grandeurs qui entrent dans cette égalité, quelques ſoient les rapports ſuppoſez des ſix autres de ces huit grandeurs, ainſi priſes deux à deux comparables entr'elles.

3°. L'on aura auſſi (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 3.) $P.C :: B.L = \frac{C\times B}{P}$. Et $p.c :: b.l = \frac{c\times b}{p}$. Donc $L.l :: \frac{C\times B}{P}.\frac{c\times b}{p}$. D'où reſulte $\frac{L\times c\times b}{p} = \frac{l\times C\times B}{P}$, ou $L\times P\times c\times b = l\times p\times C\times B$. Ce qui donne comme ci-deſſus tous les rapports poſſibles entre deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs compriſes dans cette égalité.





COROLLAIRE XXIII.

Les noms demeurant encore les mêmes que dans les précedens Corol. 21. & 22. aussi-bien que l'hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans; il suit encore du Corol. 20. que si des deux puissances R, *r*, une d'entr'elles, par exemple, R, a sa direction parallele à la longueur L de son plan, & l'autre *r* parallele à la base *b* du sien;

I. L'on aura (*Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) H. L :: R. P $= \frac{L \times R}{H}$. D'où résulte L $= \frac{P \times H}{R}$. L'on aura aussi (*Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1. 2. 3.) *h*. *b*. :: *r*. *p* $= \frac{b \times r}{h}$. De plus *r*. *c* :: *h*. *l* $= \frac{c \times h}{r}$. De plus encore *p*. *c* :: *b*. *l* $= \frac{c \times b}{p}$. Donc,

1°. L'on aura ici P. *p* :: $\frac{L \times R}{H}$. $\frac{b \times r}{h}$. D'où résulte $\frac{P \times b \times r}{h} = \frac{p \times L \times R}{H}$, ou P×H×*b*×*r* = *p*×*h*×L×R.

2°. L'on aura aussi L. *l* :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{c \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times h}{r} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou L×R×*c*×*h* = *l*×*r*×P×H.

3°. L'on aura de plus L. *l* :: $\frac{P \times H}{R}$. $\frac{c \times b}{p}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times b}{p} = \frac{l \times P \times H}{R}$, ou L×R×*c*×*b* = *l*×*p*×P×H.

II. Le nomb. 2. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera R. C :: H. B $= \frac{C \times H}{R}$. D'où résulte aussi H $= \frac{B \times R}{C}$. Et les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront pa-

reillement $r.p::h.b=\frac{p\times h}{r}$. Deplus $c.r::l.h=\frac{l\times r}{c}$. Deplus encore $c.p::l.b=\frac{p\times l}{c}$. Donc,

1°. L'on aura ici $B.b::\frac{C\times H}{R}.\frac{p\times h}{r}$. D'où résulte $\frac{B\times p\times h}{r} = \frac{b\times C\times H}{R}$, ou $B\times R\times p\times h=b\times r\times C\times H$.

2°. L'on aura aussi $B.b::\frac{C\times H}{R}.\frac{p\times l}{c}$. D'où résulte $\frac{B\times p\times l}{c} = \frac{b\times C\times H}{R}$, ou $B\times R\times p\times l=b\times c\times C\times H$.

3°. L'on aura de plus $H.h::\frac{B\times R}{C}.\frac{l\times r}{c}$. D'où résulte $\frac{H\times l\times r}{c}=\frac{h\times B\times R}{C}$, ou $H\times C\times l\times r=h\times c\times B\times R$.

III. Le nomb. 3. de l'art. 1. du Corol. 20. donnera $P.C::L.B=\frac{C\times L}{P}$. D'où résulte aussi $L=\frac{B\times P}{C}$. Et les nomb. 1. 2. 3. de l'art. 2. du même Corol. 20. donneront pareillement $r.p::h.b=\frac{p\times h}{r}$. De plus $r.c::h.l=\frac{c\times h}{r}$. De plus encore $c.p::l.b=\frac{p\times l}{c}$. Donc,

1°. L'on aura ici $B.b::\frac{C\times L}{P}.\frac{p\times h}{r}$. D'où résulte $\frac{B\times p\times h}{r} = \frac{b\times C\times L}{P}$, ou $B\times P\times p\times h=b\times r\times C\times L$.

2°. L'on aura aussi $B.b::\frac{C\times L}{P}.\frac{p\times l}{c}$. D'où résulte $\frac{B\times p\times l}{c} = \frac{b\times C\times L}{P}$, ou $B\times P\times p\times l=b\times c\times C\times L$.

3°. L'on aura de plus L. l : : $\frac{B \times P}{C}$. $\frac{c \times h}{r}$. D'où résulte $\frac{L \times c \times h}{r}$ $= \frac{l \times B \times P}{C}$, ou $L \times C \times c \times h = l \times r \times B \times P$.

Toutes les équations trouvées pour le cas du present Corol. 23. dans les nomb. 1. 2. 3. de ses art. 1. 2. 3. donneront (comme celles des précedens Corol. 21. 22.) tous les rapports entre deux quelconques comparables entr'elles, des huit grandeurs comprises dans chacune de ces égalitez. On ne s'arrête point ici à détailler ces rapports particuliers, non plus que dans les Corol. 21. 22. ce détail étant facile aux moindres Géométres qui auront la curiosité d'y entrer.

COROLLAIRE XXIV.

Fig. 205. 206. En cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur la surface quelconque SV dans la même hypothese des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, si après avoir prolongé RA, ou le plan HG, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en M dans les Fig. 205. 206. lequel plan GH soit le touchant de la surface courbe SV en celui O de ses points sur lequel le poids EON seroit soûtenu par la puissance R : si, dis-je, après cela on considere que les angles en O, K, sont droits, & que l'angle G (*Corol.* 20.) est toûjours égal à l'angle DAC ; l'on aura (*Déf.* 9. *Corol.* 1. 2.) le sinus de l'angle BAD, ou de son égal, ou complement MAO, au sinus total : : MO. AM. Et ce sinus total au sinus de l'angle DAC, ou de son égal G : : GH. HK. Donc (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) le sinus de l'angle BAD se trouvera être au sinus de l'angle DAC : : MO×GH. AM×HK. Donc en general en cas d'équilibre entre la puissance R & le poids EON sur un point quelconque O de la surface inclinée SV ou HG ; ce poids EON dans la presente hypothese de sa direction parallele à la hauteur HK de ce plan HG, quelle que soit la direction de la puissan-

ce

ce R, sera aussi toûjours (*Corol.* 10.) à cette puissance R :: MO×GH. AM×HK.

COROLLAIRE XXV.

Donc lorsque la direction AR de la puissance R sera parallele à la longueur du plan GH, les lignes MO, AM, alors infinies, se trouvant pour lors égales entr'elles ; le poids EON sera à cette puissance R :: GH. HK. c'est-à-dire, comme la longueur du plan GH est à sa hauteur, ainsi qu'on l'a déja vû d'une autre maniere dans le nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20.

COROLLAIRE XXVI.

Puisqu'en general (*Corol.* 18. 19.) de toutes les puissances R capables de soûtenir un même poids EON sur un même point O de quelque surface fixe SV que ce soit, la moindre est toûjours celle dont la direction AR seroit parallele à GA ; il suit du précedent Cor. 25. & du nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20. que dans l'hypothese des directions des poids paralleles aux hauteurs des plans, la moindre de toutes ces puissances R seroit aussi celle qui seroit à ce même poids EON, comme la hauteur HK du plan GH est à sa longueur HG.

Voilà jusqu'ici tout autant de Corollaires des part. 1. 2. du present Th. 25. en voici presentement quelques-uns de sa part. 3. après quoi on en verra aussi de toutes ses trois parties ensemble. Nous y prendrons ſ pour la marque ou la caracteristique des sinus, jusqu'à ce que nous avertissions du contraire.

COROLLAIRE XXVII.

Quelles que soient les directions ER, FC, de la puissance R & du poids EON, auquel elle est appliquée sur la surface inclinée quelconque SV, si la perpendiculaire AO à cette surface en O, menée du concours A de ces directions, passe par la base du poids EON, & qu'il soit à la puissance R comme le sinus de l'angle RAO au sinus FIG. 205. 206. 207. 208.

de l'angle CAO, c'est-à-dire, en raison reciproque des sinus des angles que leurs directions font avec AO; il suit de la part. 3. que cette puissance R soûtiendra ce poids EON en équilibre sur le point O de la surface SV.

Pour le voir, soit sur la diagonale AD, partie quelconque de AO prolongée vers D, la parallelogramme BACD, dont les côtez AB, AC, soient sur les directions de la puissance R & du poids EON. L'angle ADB étant égal à son alterne CAD, si l'on prend *f* pour la caracteristique des sinus, l'on aura pour lors *f*BAD. *f*ADB :: *f*BAD. *f*CAD :: *f*RAO. *f*CAO (*Hyp.*) :: EON. R. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) *f*BAD. *f*ADB :: BD. AB :: AC. AB. Donc on aura aussi pour lors EON. R :: AC. AB. c'est-à-dire, le poids EON à la puissance R, comme le côté AC est au côté AB du parallelogramme BACD, qui (*constr.*) les a sur les directions de ce poids & de cette puissance, ayant aussi (*Hyp.*) sa diagonale AD perpendiculaire en O à la surface SV, & par la base de ce même poids. Donc (*part.* 3.) la puissance R soûtiendra ici en équilibre ce poids EON sur ce point O de cette surface quelconque SV, ainsi qu'il le falloit faire voir.

COROLLAIRE XXVIII.

FIG. 210. Il suit de-là que toute puissance R qui peut soûtenir un poids quelconque EON sur quelque point O d'une surface inclinée quelconque SV, suivant une ligne de direction AR, ou A*ρ*, qui fasse au point A avec AR perpendiculaire à AO, ou parallele à la longueur HD du plan touchant en O la surface en question, un angle RA*r*, ou RA*ρ*, moindre que RAN, l'y peut soûtenir encore sur le même point O suivant une autre ligne de direction A*ρ*, ou A*r*, laquelle passant de l'autre côté de cette perpendiculaire AR, fasse avec elle un angle RA*ρ*, ou RA*r*, égal au premier RA*r*, ou RA*ρ*, c'est-à-dire, que si les deux angles quelconques RA*r*, RA*ρ*, sont égaux entre-eux, & chacun moindre que l'angle RAN, la puissance

capable de soûtenir le poids EON suivant Ar sur le point O de la surface inclinée quelconque SV, l'y soûtiendra aussi suivant $A\rho$, & reciproquement.

Car il est visible qu'on auroit alors $rAO + \rho AO = 2 \times RAO$, c'est-à-dire, les deux angles rAO, ρAO, égaux ensemble à deux droits RAO; & qu'ainsi chacun de ces deux-là seroit le complement de l'autre à deux droits; & consequemment aussi (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) que le sinus de l'un seroit pour lors le sinus de l'autre. Donc alors le sinus de l'angle CAO seroit en même raison au sinus de chacun des angles rAO, ρAO. Donc aussi (*Corol.* 10. 27.) la même puissance R, qui dirigée suivant celle qu'on voudra des lignes Ar, $A\rho$ soûtiendroit le poids EON sur le point O de la surface SV, l'y soûtiendroit aussi suivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux quelconques rAR, ρAR, avec AR (*Hyp.*) perpendiculaire sur AO, ou parallele à GH, & chacun moindre que RAN.

COROLLAIRE XXIX.

Cela peut encore se démontrer sans le secours des sinus: car tant que les directions Ar, $A\rho$, feront des angles égaux de part & d'autre avec AR, leurs paralleles Cd, $C\delta$, en feront aussi d'égaux avec CD parallele à AR. Par consequent CD étant perpendiculaire en D sur AO prolongée vers X, comme l'est (*Hyp.*) AR en A sur la même AO, les lignes Cd, $C\delta$, seront égales entr'elles, & consequemment aussi Ab, $A\beta$, côtez qui leur sont oppposez dans les parallelogrammes $bACd$. $\beta AC\delta$. Donc (*part.* 2. 3.) la puissance R, qui dirigée suivant une quelconque des lignes Ar, $A\rho$, pourroit soûtenir le poids EON sur un point quelconque O d'une surface fixe inclinée quelconque SV, pourroit aussi l'y soûtenir suivant l'autre de ces deux directions, tant qu'elles feront des angles égaux de part & d'autre avec AR, & chacun moindre que l'angle RAN. Tout cela s'accorde avec la fin du Corol. 17.

Chacun de ces deux derniers Corollaires 28. 29. fait assez voir que tout ce qu'ils contiennent, seroit encore vrai, quand même chacun des angles rAR, ρAR, seroit égal à RAN: mais la puissance R dirigée suivant Ar, se trouvant alors l'être suivant AN directement à contre-sens du poids EON, le soûtiendroit alors seule (nomb. 1. des Corol. 15. 16.) *sans le secours de la surface SV; ce qui ne seroit plus de la presente hypothese, dans laquelle on suppose cette puissance & ce poids en équilibre entr'eux sur cette surface. Le cas où l'angle seroit plus grand que RAN de ce côté-là, y seroit encore plus contraire; puisqu'alors (suivant la reflexion qui est entre les Corol. 15. 16.) il n'y auroit plus du tout d'équilibre entre cette puissance & ce poids, bien loin de le soûtenir sur la surface SV, ainsi qu'on le suppose ici.*

COROLLAIRE XXX.

Puisque (*Corol.* 28.) de toutes les directions A*r*, AR, Aρ, &c. suivant lesquelles differentes puissances peuvent, chacune suivant la sienne, soûtenir un même poids EON sur le même point O d'une surface quelconque SV toûjours également inclinée en ce point O; la direction AR, perpendiculaire à AO, ou parallele au plan GH, est celle qui exige la moindre de toutes ces puissances pour l'y soutenir: puisqu'aussi (*Corol.* 10. 18.) cette moindre puissance R dirigée suivant AR, est alors à ce même poids EON, comme le sinus de l'angle CAO ou CAD est au sinus de DAR supposé droit, c'est-à-dire, comme le sinus de l'angle CAD est au sinus total; il est visible que toute autre puissance dirigée suivant celle qu'on voudra des autres directions A*r*, Aρ, &c. comprises aussi dans l'angle DAN, & en équilibre avec le même poids EON sur le même point O de la même surface fixe SV, sera à ce poids en plus grande raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total, ou que OQ à AQ; & consequemment aussi (en supposant la direction FC du poids EON parallele à la hauteur HK du plan HG) en plus grande raison que HK à HG, cette hypothese rendant les triangles rectangles

AOQ, GPQ, GKH, ſemblables entreeux ; & en general pour quelque hypotheſe que ce ſoit de paralleliſme ou de concours entr'elles des verticales FC, HK, en raiſon d'autant plus grande (*Corol.* 15. 16.) que la direction A*r*, ou A*ρ*, de cette puiſſance, fera un angle RA*r*, ou RA*ρ*, plus grand avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, ou parallele à HG, ſans ſortir de l'angle OAN.

COROLLAIRE XXXI.

Cela étant, & d'un autre côté (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) la puiſſance requiſe ici pour ſoûtenir le poids EON ſur le point O de la ſurface SV ſuivant une direction A*r*, ou A*ρ*, non perpendiculaire à AO, devant être d'autant moindre que ce poids (quoiqu'en raiſon differente) que l'angle RA*r* ou RA*ρ*, de cette direction avec AR perpendiculaire (*Hyp.*) à AO, ſera moindre que l'angle RAN ; il ſuit en general qu'une même puiſſance peut ſoûtenir un même poids ſur un même point d'une ſurface inclinée fixe quelconque ſuivant deux directions differentes, pourvû qu'elle ſoit moindre que ce poids, & qu'elle lui ſoit cependant en plus grande raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ; c'eſt-à-dire, dans l'hypotheſe ordinaire des poids de directions paralleles aux hauteurs des plans, pourvû que cette puiſſance moindre que ce poids, lui ſoit cependant en plus grande raiſon que le ſinus d'inclinaiſon G du plan GH au ſinus total, ou (*Déf.* 9. *Corol.* 1. & *Lem.* 8. *Corol.* 2.) que la hauteur HK de ce plan à ſa longueur HG.

COROLLAIRE XXXII.

En tout autre cas, c'eſt-à-dire, lorſque cette puiſſance eſt plus grande que ce poids, ou du moins lorſqu'elle lui eſt égale, ou bien lorſqu'elle lui eſt en même raiſon que le ſinus de l'angle CAD au ſinus total ; elle ne peut le ſoûtenir ſur le même point O de la ſurface fixe SV, que ſuivant une ſeule direction. Car en ſuppoſant toûjours l'angle RAO ou RAD droit,

1°. Si cette puissance étoit plus grande que le poids EON, avec lequel on la suppose ici en équilibre sur le point O de la surface SV, la direction de cette puissance non seulement ne pourroit être (*Corol.* 15. 16.) que dans l'angle droit RAD, telle qu'est ici Aρ; mais encore cette direction Aρ y seroit unique, ne pouvant faire avec AD qu'un angle ρAD, dont le sinus soit à celui de CAD comme le poids EON à cette puissance, ainsi qu'il est requis (*Corol.* 10.) pour leur équilibre supposé sur le point O de la surface fixe SV.

2°. Si cette puissance étoit égale à ce poids EON, des deux directions également éloignées de AR, suivant lesquelles elle pourroit (*Corol.* 17.) successivement soûtenir ce poids; il y en auroit necessairement une (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) suivant AN, suivant laquelle cette puissance soûtiendroit (*nomb.* 1. *des Corol.* 15. 16.) seule ce poids sans le secours de la surface SV; ce qui seroit ici contre l'hypothese.

3°. Si cette puissance étoit au poids en même raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD, elle ne pourroit le soûtenir (*Corol.* 10.) que suivant AR.

4°. Enfin si cette puissance étoit à ce poids EON en moindre raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total ou de l'angle (*Hyp.*) droit RAD; elle ne pourroit plus du tout (*Corol.* 10.) faire équilibre avec ce poids sur la surface SV, ne pouvant y avoir d'angle, au sinus duquel celui de l'angle constant CAD puisse être en moindre raison qu'au sinus total, c'est-à-dire, de sinus plus grand que le total.

Donc (*nomb.* 1. 2. 3. 4.) lorsque cette puissance est plus grande que le poids EON, ou qu'elle lui est égale, ou bien lorsqu'elle lui est en même raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total; elle ne peut soûtenir ce poids quelconque sur un même point quelconque de quelque surface fixe que ce soit, que suivant une seule direction, ainsi qu'on le vient d'avancer, & suivant aucune (*nomb.* 3.)

lorsque cette puissance est au poids EON en moindre raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total.

Au contraire (*Corol.* 3.) elle le peut toûjours soûtenir sur ce même ponit de cette même surface fixe, suivant deux directions differentes également éloignées de AR perpendiculaire à AO, ou parallele au plan HG, tant qu'elle est moindre que ce poids, & qu'elle lui est cependant en plus grande raison que le sinus de l'angle CAD au sinus total.

Jusqu'ici nous n'avons regardé le même poids que comme appliqué au même endroit de quelque surface que ce soit, ou que comme appliqué au même point d'un plan qui la toucheroit en ce point lorsqu'elle est courbe ; ce qu'on a vû pour toutes sortes de surfaces revenir au même que si ce poids n'eût été appliqué qu'au même point d'une plane, ou d'un plan incliné quelconque : de sorte que ce poids sur differens points d'une même surface courbe, y doit être consideré comme sur differens plans touchans de cette surface en ces differens points ; ce qui étant compris dans ce qui précede de poids quelconques soûtenus chacun sur un même point aussi quelconque de quelque surface que ce soit, il ne nous reste plus qu'à considerer ce poids successivement soûtenu sur differens points d'un plan incliné. Mais parce que hors l'hypothese ordinaire des directions des graves toutes paralleles entr'elles, ce poids n'auroit plus (Th. 21. Cor. 37.) *la même pesanteur sur ces differens points d'un même plan, quand même tous ses points y conserveroient chacun la sienne, c'est-à-dire, la même pour chacun de ces points ; nous n'appellerons ici* mêmes poids *que ceux qui seront de pesanteurs égales aux differens endroits où nous les placerons, quelques differens qu'ils soient d'ailleurs entr'eux, pour rendre encore ce qui suit general pour toutes les hypotheses imaginables des directions des graves.*

COROLLAIRE XXXIII.

Soit presentement un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même pesanteur en differens points d'un même plan incliné HG sur lesquels points ces corps soient Fig. 211. 212.

soûtenus par deux puissances R, P, des directions quelconques ER, FP, qui concourent en A, B, avec les directions AB, BD, de ces poids, lesquelles concourent entre-elles en quelque point D que ce soit, lequel soit (si l'on veut) le centre de la Terre. Des points A, B, de concours des directions des puissances & des poids qu'elles soûtiennent, soient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, au plan HG; soient aussi les directions des poids prolongées vers N, M.

Cela fait, le Corol. 10. fait voir qu'en ce cas d'équilibre entre les puissances R, P, & les poids EON, FQM, qu'elles soûtiennent sur les points O, Q, du plan HG; que la puissance R sera à la puissance P en raison composée de la directe des sinus des angles DAO, DBQ, que les directions des poids qu'elles soûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, au plan GH; & de la reciproque des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions de ces puissances font avec ces mêmes perpendiculaires; c'est-à-dire (en prenant *ſ* pour la marque ou la caracteristique des sinus) R. P : : *ſ*DAO×*ſ*PBQ. *ſ*DBQ×*ſ*RAO.

Car en ce cas d'équilibre, ce Corol. 10. donne R. EON : : *ſ*DAO. *ſ*RAO. & FQM. P : : *ſ*PBQ. *ſ*DBQ. Donc les poids EON, FQM, étant pris ici pour leurs pesanteurs supposées égales entr'elles en O, Q; si l'on multiplie par ordre les termes de ces deux analogies, l'on aura ici R. P : : *ſ*DAO×*ſ*PBQ. *ſ*DBQ×*ſ*RAO. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XXXIV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, se trouvant ainsi paralleles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S, l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à son alterne ASB, outre DBQ=DBS. Donc (*Corol.* 33.) l'on aura pareillement ici R. P : : *ſ*ASB× *ſ*PBQ. *ſ*DBS×*ſ*RAO. Mais (*Léf.* 9. *Cor.* 2.) *ſ*ASB=*ſ*BSD, & (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) *ſ*BSD. *ſ*DBS : : DB. DS. Donc aussi R. P : : BD×*ſ*PBQ. DS×*ſ*RAO.

COROLLAIRE XXXV.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé entre les puiſſances R, P, & les poids EON, FQM, ſuppoſez de même peſanteur ſur differens points O, Q, d'un même plan HG d'inclinaiſon quelconque ; le Corol. 33. donne R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit ; les angles RAO, PBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAO, ſPBQ, l'on aura pour lors R. P :: ſDAO. ſDBQ. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon des ſinus des angles DAO, DBQ, que les directions des poids EON, FQM, qu'elles ſoûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, au plan GH.

2°. Si ce ſont les directions des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ; les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſDAO, ſDBQ, l'on aura pour lors R. P :: ſPBQ. ſRAO. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles RAO, PBQ, que leurs directions ER, FP, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH.

3°. Enfin ſi les directions des puiſſances ſont paralleles entr'elles, & celles des poids paralleles auſſi entr'elles, non ſeulement les angles RAO, PBQ, mais encore les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux comme dans les deux précedens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors R=P, c'eſt-à-dire, que les puiſſances ſeront alors égales entr'elles, auſſi-bien que (*Hyp.*) les poids.

COROLLAIRE XXXVI.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé le Corol. 34. donne R. P :: BD×ſPBQ. DS×ſRAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puissances R, P, sont paralleles entr'elles, & les directions des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce soit, ainsi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 35. les angles RAO, PBQ, se trouvant encore ici comme là, égaux entr'eux, & consequemment aussi leurs sinus ʃRAO, ʃPBQ, l'on aura pour lors R. P :: BD. DS.

2°. Si ce sont les directions AD, BD, des poids EON, FQM, qui soient paralleles entr'elles, & non celles des puissances R, P, qui soûtiennent ces poids sur les points O, Q, du plan HG, ainsi que dans le nomb. 2. du précedent Corol. 35. Cette hypothese rendant (*Lem.* 6. *Corol.* 1.) l'angle D infiniment aigu, & consequemment (*nom.* 6. *Corol.* 2.) BD, SD, toutes deux infinies & égales entr'elles, leur difference se trouvant alors infiniment petite ou nulle par rapport à elles : l'on aura pour lors R. P :: ʃPBQ. ʃRAO. c'est-à-dire, les puissances R, P, en raison reciproque des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions des poids EON, FMQ, qu'elles soûtiennent, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH, ainsi qu'on l'a déja vû pour cette hypothese dans le nomb. 2. du précedent Corol. 35.

3°. Enfin si (comme dans le nomb. 3. du précedent Corol. 35.) les directions des puissances sont paralleles entre-elles, & celles des poids paralleles aussi entr'elles ; cette hypothese rendant non seulement BD=SD, comme dans le précedent nomb. 2. mais encore les angles RAO, PBQ, égaux entr'eux, comme dans le nomb. 1. l'on aura encore ici R=P, ainsi que cette même hypothese l'a déja donné dans le nomb. 3. du précedent Corol. 35.

COROLLAIRE XXXVII.

Le Corol. 37. du Th. 21. a fait voir que dans l'hypothese des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, par exemple, au centre de la Terre, chacun de ces corps peseroit plus ou moins, ou (si l'on veut) tireroit plus ou moins fortement le fil sans pesanteur auquel

il seroit verticalement suspendu, selon qu'il se trouveroit alors plus ou moins éloigné de ce point de concours, quand même chacun des siens peseroit également à toutes distances de celui-là : de sorte qu'en appellant *Pesanteur absolue* de chacun de ces poids ce que le fil vertical, ou la force qui le retiendroit, en auroit à soûtenir à chaque distance où le poids se trouveroit du point de concours des directions de tous les siens ; la pesanteur absolue de ce même corps se trouveroit variable dans cette hypothese, c'est-à-dire, plus ou moins grande, selon que ce corps se trouveroit plus ou moins éloigné de ce concours : de sorte, dis-je, que dans cette hypothese des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, des corps differens d'ailleurs pourroient être de même pesanteur absolue par la seule varieté de leurs distances à ce point, sçavoir, le moindre en masse être égal en pesanteur au plus grand, par son plus grand éloignement de ce point de concours.

Voilà, dis-je, ce que le Corol. 37. du Th. 21. fait voir. Voici presentement ce qui suit du nomb. 1. des deux derniers Corol. 35. 36. Ils font voir de plus qu'un même corps, ou deux differens EON, FQM, de même pesanteur absolue, sur deux differens points O, Q, d'un même plan incliné HG, par de-là lequel les directions des graves concourreroient en quelque point D que ce fût, y peseroient encore plus ou moins, selon qu'ils y seroient plus ou moins éloignez de ce point D : en sorte qu'il faudroit ici une plus grande force à la puissance R pour soûtenir le poids EON en O, suivant quelque direction ER que ce fût, qu'à la puissance P pour le soûtenir en Q suivant une direction FP parallele à ER, quand même il seroit de même pesanteur absolue en O, Q : puisque le nomb. 1. du Corol. 35. donneroit alors R. P : : ſDAO. ſDBQ : : ſBSA. ſDBS. & que le nomb. 1. du Corol. 36. donneroit aussi pour lors R. P : : BD. DS. c'est-à-dire, de part & d'autre, la puissance R plus grande que la puissance P.

Tout cela fait voir que l'hypothese des directions des graves EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce soit, aussi-bien que celles de leurs parties, y doit causer une double variabilité de pesanteur par rapport aux puissances R, P, requises pour le soûtenir suivant des directions paralleles sur des points O, Q, d'un plan HG, differemment éloignez du point D : c'est-à-dire, une double raison de diminution de pesanteur dans le plus proche FQM du point D, & une double d'augmentation dans le plus éloigné EON de ce point ; puisque quand il n'y auroit point ici de plan HG, ni d'autre surface pour soûtenir les poids FQM, EON, chacun d'eux (*Th.* 21. *Corol.* 37.) peseroit absolument moins en Q qu'en O, & que quand même ils y auroient les mêmes pesanteurs absolues, & qu'ils y peseroient également sans s'appuyer sur le plan HG, ils peseroient encore (*nomb.* 1. *des Corol.* 36. 37.) moins en Q qu'en O, y étant soûtenus par des puissances P, R, de directions paralleles entr'elles, c'est-à-dire, que nonobstant cette égalité de pesanteurs absolues, il faudroit encore par cette nouvelle raison une moindre puissance pour le soûtenir en Q qu'en O, suivant des directions paralleles entr'elles pendant que celles qu'il auroit en ces points, concourreroient en D.

On voit présentement que dans l'hypothese des directions des graves concourantes en quelque point que ce soit, il y a bien de la difference entre un poids soûtenu sur un même plan, & un poids soûtenu sur le même point d'un plan, ou de toute autre surface quelconque. C'est aussi pour cela qu'on a pris soin cidessus de ne les pas confondre, & de faire remarquer cette difference dans la reflexion qui suit le Corol. 19. *où il s'agissoit, comme presque par tout jusqu'ici des directions quelconques des graves en general : je dis* presque, *n'y ayant que peu d'endroits où on les ait regardez comme paralleles entr'elles, & où on en a averti le Lecteur. Quant à ce cas particulier des directions des graves paralleles entr'elles, le Corollaire suivant va faire voir que cette difference s'y évanoüit sur un même plan ; & qu'un même poids y doit peser également sur tous les points*

de ce plan ; en sorte qu'une même puissance l'y peut successivement soûtenir sur differens points suivant une même direction quelconque, c'est-à-dire, suivant des directions quelconques toutes paralleles aussi entr'elles. En effet,

Il est à remarquer que lorsqu'en cas d'équilibre on supposera dans la suite les directions des poids paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, ou celles des puissances paralleles aussi entr'elles vers tel côté qu'on voudra, & de même lorsqu'on supposera ces directions tant des poids que des puissances à volonté ; il faudra toûjours excepter les cas où les directions des poids seroient dans les angles RAO, PBQ, & où celles des puissances seroient hors des angles NAO, MBQ ; puisque suivant le Corol. 4. & la reflexion italique qui le suit, l'équilibre supposé seroit impossible dans l'un & dans l'autre de ces deux cas.

COROLLAIRE XXXVIII.

Si les directions des poids, & celles de tous leurs points étoient toutes paralleles entr'elles, chacun de ces poids seroit non seulement par tout (*Th.* 21. *Corol.* 39.) de même pesanteur absolue, mais encore peseroit également (*nomb.* 3. *Corol.* 35. 36.) sur tous les points d'un même plan incliné ; c'est-à-dire, que non seulement un même poids seroit alors de même pesanteur absolue en differens points d'un même plan incliné, mais encore qu'une même puissance le pourroit successivement soûtenir sur tous ces differens points quelconques suivant des directions paralleles entr'elles.

La part. 1. du present Th. 26. fait voir de plus que tous ces differens points d'un même plan incliné, seroient toûjours alors également chargez du concours d'action de la puissance & du poids sur eux, c'est-à-dire, que les charges perpendiculaires résultantes de ce concours d'action sur chacun des points de ce plan incliné, seroient alors toutes égales entr'elles.

COROLLAIRE XXXIX.

FIG. 211. 212. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Corol. 33. c'est-à-dire, les poids EON, FQM, étant de même pesanteur absolue, & le reste tel qu'on voudra, si l'on appelle O, Q, les differentes charges perpendiculaires en ces points du plan HG, résulrantes chacune du concours d'action de la puissance & du poids supposez en équilibre sur chacun de ces points O, Q, de ce plan HG; le Corol. 9. donnera O. EON :: ſRAD. ſRAO. & le poids FQM ou son égal (*Hyp.*) EON. Q :: ſPBQ. ſPBD. Donc (en multipliant par ordre) O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſPBD×ſRAO. C'est-à-dire (dans la presente hypothese des poids égaux) que les differentes charges O, Q, du plan GH aux points de ces noms, sont entr'elles en raison composée de la directe des sinus des angles totaux RAD, PBD, & de la reciproque des sinus des angles partiaux RAO, PBQ, quelques soient l'inclinaison de ce plan HG, & les directions des poids & des puissances qui lui causent ces deux charges. Donc,

I. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans sortir (*Corol.* 4.) des angles NAO, MBQ, quelles que soient encore les directions des poids EON, FQM, ainsi que dans le nomb. 1. des Corol. 35. 36.

1°. Les perpendiculaires (*part.* 1. 2.) AO, BQ, au plan HG, étant aussi paralleles entr'elles, & ces deux parallelismes rendant les angles RAO, PBQ, égaux entr'eux, & consequemment aussi ſRAO=ſPBQ, l'on aura ici O. Q :: ſRAD. ſPBD. c'est-à-dire, les differentes charges O, Q, du plan HG, en raison des sinus des angles RAD, PBD, compris chacun entre les directions de chaque puissance, & chaque poids soûtenu par elle sur ce plan.

2°. Donc si l'on prolonge RA jusqu'à la rencontre en X de BD prolongée, le parallelisme supposé entre les directions AR, BP, des puissances R, P, rendant l'angle

PBD=RXD=AXD, & consequemment ſPBD=ſAXD, outre (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) ſRAD=ſXAD ; l'on aura pareillement ici O.Q::ſXAD. ſAXD (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: XD. AD. c'eſt-à-dire, les differentes charges en O, Q, du plan HG, en raiſon des côtez XD, AD, du triangle AXD.

3°. D'où l'on voit que la charge O du plan HG, doit être ici plus ou moins grande par rapport à ſa charge Q, ſelon que l'angle RAD (toûjours égal à PBQ) ſera plus ou moins petit ; puiſque l'angle XAD en devenant plus ou moins grand, le côté XD du triangle AXD en doit devenir auſſi plus ou moins grand par rapport à ſon autre côté AD.

II. Si outre les directions AR, BP, des puiſſances R, P, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce ſoit, ſans ſortir (*Corol.* 4.) des angles NAO, MBQ, l'on veut (comme dans le nomb. 3. des Corol. 35. 36.) que les directions AD, BD, des poids (*Hyp.*) égaux EON, FQM, ſoient auſſi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra ; ſans entrer dans les angles RAO, PBQ ; ces deux parallelismes joints à celui qui eſt (*part.* 1. 2.) entre les droites AO, BQ, rendant les angles RAD=PBD, RAO=PBQ, & conſequemment auſſi leurs ſinus ſRAD =ſPBD, ſRAO=ſPBQ, l'on aura ici O=Q, c'eſt-à-dire, les charges en O, Q, du plan HG égales entr'elles, de même que le ſont (*Hyp.*) les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, & (*nomb.* 3. *des Corol.* 35. 36.) les puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ſur ces points auſſi égales entr'elles.

Voilà juſqu'ici depuis le Corol. 33. *incluſivement pour un même ou pour differens poids de même peſanteur abſolue, ſucceſſivement ſoûtenus ſur differens points d'un même plan incliné par des puiſſances quelconques dirigées à volonté, ſans ſortir* (Corol. 4.) *des angles NAO, MBQ. Voici preſentement pour des poids de differentes peſanteurs abſolues, ſucceſſivement ſoûtenus ſur tous ces differens points par une mê-*

me ou par differentes puissances égales dirigées encore à volonté comme ci-dessus.

COROLLAIRE XL.

Soient presentement les poids EON, FQM, de pesanteurs absolues differentes quelconques appellées aussi EON, FQM, & encore successivement soûtenus sur differens points O, Q, d'un même plan incliné aussi quelconque GH par une même puissance, ou par deux R, P, égales entr'elles, dirigées encore comme l'on voudra, sans sortir (*Cor.* 4.) des angles NAO, MBQ. En quelque point D que concourent les directions des poids EON, FQM, par de-là le plan HG sans entrer dans les angles RAO, PBQ; le Corol. 10. fait encore voir qu'en ce cas d'équilibre la pesanteur absolue du poids EON sera à celle du poids FQM en raison composée de la directe des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puissances R, P, qui les soûtiennent, font avec les perpendiculaires AO, BQ, menées des points A, B, au plan HG, & de la reciproque des sinus des angles DAO, DBQ, que les directions de ces poids font avec ces mêmes perpendiculaires, c'est-à-dire, EON. FQM :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO.

Car en ce cas d'équilibre ce Corol. 10. donne EON. R :: ſRAO. ſDAO. & P. FQM :: ſDBQ. ſPBQ. Donc les puissances R, P, étant ici supposées égales entr'elles, ou la même quelconque, l'on y aura (en multipliant par ordre les termes de ces deux analogies) EON. FQM :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. ainsi qu'on le vient de dire.

COROLLAIRE XLI.

Or (ainsi que dans le Corol. 34.) les perpendiculaires AO, BQ, se trouvant paralleles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S; l'on aura l'angle DAO ou SAO égal à son alterne ASB, outre DBQ=DBS. Donc (*Corol.* 39.) l'on aura pareillement

ici EON. FQM : : ʃRAO×ʃDBS. ʃPBQ×ʃASB. Mais (*Déf. 9. Corol. 2.*) ʃASB=ʃBSD, & (*Lem. 8. Corol. 2.*) ʃDBS. ʃBSD : : DS. BD. Donc auſſi EON. FQM : : DS×ʃRAO. BD×ʃPBQ.

COROLLAIRE XLII.

Puiſque dans l'équilibre ici ſuppoſé entre chacune des puiſſances (*Hyp.*) égales R, P, & chacun des poids EO, FQ, de peſanteurs abſolues quelconques ſur differens points O, Q, d'un même plan HG d'inclinaiſon auſſi quelconque, le Corol. 39. donne EON. FQM : : ʃRAO×ʃDBQ. ʃPBQ×ʃDAO.

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce ſoit, les angles RAO & PBQ ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ʃRAO, ʃPBQ, ainſi que dans le nomb. 1. du Corol. 35. l'on aura pour lors EON. FQM : : ʃDBQ. ʃDAO. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM entr'elles en raiſon reciproque des ſinus des angles DAO, DBQ, que leurs directions AD, BD, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan HG.

2°. Si ce ſont les directions des poids EON, FQM, qui ſoient paralleles entr'elles, & non celles des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent ſur les points O, Q, du plan GH; les angles DAO, DBQ, ſe trouvant alors égaux entr'eux, & conſequemment auſſi leurs ſinus ʃDAO, ʃDBQ, ainſi que dans le nomb. 2. du Corol. 35. l'on aura pour lors EON. FQM : : ʃRAO. ʃPBQ. c'eſt-à-dire, les peſanteurs abſolues des poids EON, FQM, en raiſon des ſinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puiſſances R, P, qui les ſoûtiennent, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan GH, ſur les points O, Q, duquel ces poids ſont ſoûtenus par ces puiſſances.

3°. Si les directions de ces puiſſances ſont paralleles entr'elles, & celles des poids auſſi, non ſeulement les angles RAO, PBQ, mais encore les angles DAO, DBQ,

se trouvant alors égaux entr'eux, comme dans les précedens nomb. 1. 2. l'on aura pour lors EO=FQ, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, alors égales entr'elles, aussi-bien (*Hyp.*) que les puissances R, P, qu'on suppose les soûtenir ainsi sur les points O, Q, du plan GH.

COROLLAIRE XLIII.

Puisqu'aussi dans l'équilibre supposé le Corol. 4. donne EON. FQM :: DS×ſRAO. DB×ſPBQ.

1°. Si les directions ER, EP, des puissances R, P, sont paralleles entr'elles, & celles des poids EON, FQM, concourantes en quelque point D que ce soit, ainsi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 41. les angles RAO, PBQ, se trouvant encore égaux ici comme là, & par consequent aussi leurs sinus ſRAO, ſPBQ, l'on aura pour lors EON. FQM :: DS. DB.

2°. Si ce sont les directions AD, BD, des poids EON, FQM, qui soient paralleles entr'elles, & non celles des puissances R, P, qui les soûtiennent sur les points O, Q, du plan incliné HG; cette hypothese donnant ici DS=DB, comme dans le nomb. 2. du Corol. 36. l'on aura ici EON. FQM :: ſRAO. ſPBQ. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, en raison des sinus des angles RAO, PBQ, que les directions des puissances R, P, font avec AO, BQ, perpendiculaires au plan HG, sur lequel elles les soûtiennent, ainsi que dans le nomb. 2. du précedent Corol. 41.

3°. Enfin si les directions de ces puissances sont paralleles entr'elles, & celles de ces poids aussi; ayant alors ſRAO=ſPBD, & DS=DB, l'on aura aussi pour lors EO=FQ, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EO, FQ, alors égales entr'elles, ainsi que dans le nomb. 3. du précedent Corol. 41.

COROLLAIRE XLIV.

Toutes choses demeurant ainsi les mêmes que dans le

Corol. 40. c'est-à-dire, les puissances R, P, étant égales entr'elles, & le reste tel qu'on voudra, les noms O, Q, des differentes charges du plan HG en O, Q, demeurant aussi les mêmes que dans le Corol. 39. l'on aura (*Cor.* 9.) O. R :: ʃDAR. ʃDAO. & la puissance P ou son égale (*Hyp.*) R. Q :: ʃDBQ. ʃDBP. Donc (en multipliant par ordre) O. Q :: ʃDAR×ʃDBQ. ʃDBP×ʃDAO. c'est-à-dire (dans la presente hypothese des puissances égales) les differentes charges O, Q, du plan HG, en raison composée de la directe des sinus des angles totaux DAR, DBP, & de la reciproque des sinus des angles partiaux DAO, DBQ.

COROLLAIRE XLV.

Or les perpendiculaires AO, BQ, au plan HG, se trouvant toûjours paralleles entr'elles, si l'on prolonge BQ jusqu'à la rencontre de AD en S, comme dans les Corol. 34. 41. l'on aura ici comme là, les angles DAO =ASB, & DEQ=DBS. Donc (*Cor.* 44.) O. Q :: ʃDAR ×ʃDBS. ʃDBP×ʃASB. Mais (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) ʃASB= ʃBSD, & (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ʃDBS. ʃBSD :: DS. BD. Donc aussi O. Q :: DS×ʃDAR. BD×ʃDBP.

COROLLAIRE XLVI.

Puisque dans l'équilibre ici supposé des puissances égales R, P, avec les poids quelconques EO, FQ, sur differens points O, Q, d'un même plan HG, dont les charges en ces points sont aussi appellées O, Q; le Corol. 44. donne O. Q :: ʃDAR×ʃDBQ. ʃDBP×ʃDAO.

1°. Si les directions AD : BD, des poids EON, FQM, sont paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puissances R, P, étant telles qu'on voudra, sans sortir (*Corol.* 4.) des angles NAO, MBQ; les angles DAO, DBQ, se trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors O. Q :: ʃDAR. ʃDBP. c'est-à-dire, les charges O, Q, du plan HG, en raison des sinus des

angles DAR, DBP, dans ce parallelisme des directions des poids quelconques EON, FQM, soûtenus sur differens points O, Q, d'un même plan HG par des puissances égales R, P, de directions quelconques, ainsi que le parallelisme de directions des puissances quelconques, qui y soûtenoient des poids égaux, l'a donné dans le nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 39.

2°. D'où l'on voit que soit que des poids absolument égaux, & de directions quelconques, soient soûtenus sur differens points d'un même plan quelconque par differentes puissances de directions paralleles entr'elles; ou que des puissances égales de directions quelconques y soûtiennent des poids de differentes pesanteurs absolues, & de directions paralleles entr'elles: les charges de ce plan en ces differens points, seront toûjours entr'elles comme les sinus des angles compris chacun entre les directions de chaque puissance & de chaque poids soûtenu par elle, du concours desquels chacune de ces charges résulte.

3°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, sans entrer dans les angles RAO, PBQ, les directions AR, BP, des puissances égales R, P, sont aussi paralleles entr'elles vers tel côté qu'on voudra, sans sortir (*Cor.* 4.) des angles NAO, MBQ; ce double parallelisme rendant non seulement les angles DAO, DBQ, mais aussi les angles DAR, DBP, égaux entr'eux pris ainsi deux à deux, rendra pour lors O=Q; c'est-à-dire, que les charges O, Q, du plan HG aux points de ces noms, seront alors pareillement égales, les puissances R, P, étant supposées l'être, ainsi que ce double parallelisme a rendu ces charges égales dans l'art. 2. du Corol. 39. où les poids EON, FQM, étoient supposez d'égales pesanteurs absolues.

COROLLAIRE XLVII.

Puisque dans la même hypothese du Corol. 40. c'est-à-dire, dans l'hypothese des puissances R, P, égales entre-

elles, le reste étant tel qu'on voudra, le Corol. 45. donne O. Q :: DS×$\int$DAR. BD×$\int$DBP.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, sont parallales entr'elles vers quelque côté que ce soit, celles des puissances telles qu'on voudra; ainsi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 46. ce parallelisme rendant ici DS=BD, comme dans les nomb. 2. des Corol. 36. 43. il donnera ici O. Q :: $\int$DAR. $\int$DBP. ainsi que dans le nomb. 1. du précedent Corol. 46.

2°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit, celles AR, BP, des puissances (égales R, P,) sont aussi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra; ce double parallelisme rendant non seulement DS=BD, mais aussi $\int$DAR=$\int$DBP, donnera ici O=Q, c'est-à-dire, que les charges O, Q, du plan HG aux points de ces noms, seront ici égales entr'elles, ainsi que dans le nomb. 3. du précedent Corol. 46.

Depuis le Corol. 35. inclusivement, voilà pour des poids d'égales pesanteurs absolues, soûtenus sur differens points d'un même plan par des puissances ou forces quelconques; & pour des poids de pesanteurs absolues differentes, que des puissances égales y soûtiendroient. Voici presentement pour des poids & des puissances quelconques qui, en équilibre sur ces points, y causeroient par leurs concours des charges égales au plan sur lequel ces differens équilibres se feroient.

COROLLAIRE XLVIII.

Les noms O, Q, des charges du plan GH en O, Q, demeurant toûjours les mêmes, si presentement on suppose ces deux charges égales entr'elles, quelque soit le reste, le Corol. 9. donnera R. O :: $\int$DAO. $\int$DAR. & la charge Q ou son égale (*Hyp.*) O. P :: $\int$DBP. $\int$DBQ. Donc (en multipliant par ordre) R. P :: $\int$DAO×$\int$DBP. $\int$DBQ×$\int$DAR. c'est-à-dire, que les puissances R, P, seront toûjours ici entr'elles en raison composée de la directe des si-

nus des angles partiaux DAO, DBQ, & de la reciproque des ſinus des angles totaux DAR. DBP.

COROLLAIRE XLIX.

Or on voit dans les Corol. 34. 41. 45. qu'en general ſDAO=ſASB=ſBSD, & ſDBQ=ſDBS. Donc (*Corol.* 48.) l'on aura pareillement ici R. P :: ſBSD×ſDBP. ſDBS×ſDAR. mais (*Lem.* 8. *Cor.* 2.) ſBSD. ſDBS :: BD. DS. Donc auſſi R. P :: BD×ſDBP. DS×ſDAR.

COROLLAIRE L.

Puiſque dans la preſente hypotheſe des charges égales O Q, du plan HG, le Corol. 48. donne R. P :: ſDAO× ſDBP. ſDBQ×ſDAR.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, ſont deux paralleles quelconques, & celles des puiſſances R, P, telles qu'on voudra, ce parallelisme joint a celui des lignes AO, BQ, perpendiculaires (*part.* 1. 2.) au plan HG, rendant les angles DAO, DBQ, égaux entr'eux, l'on aura ici R. P :: ſDBP. ſDAR. c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, en raiſon reciproque des ſinus des angles totaux DAR, DPB.

2°. Si non ſeulement les directions des poids ſont paralleles entr'elles, mais auſſi celles des puiſſances, ces deux parallelisſmes ajoûtez à celui qu'ont entr'elles les lignes AO, BQ, rendant les angles DAO=DBQ, & DBP =DAR rendront auſſi pour lors R=P, c'eſt-à-dire, les puiſſances R, P, égales entr'elles.

COROLLAIRE LI.

Dans la même hypotheſe des charges égales O, Q, du plan HG, le Corol. 49. donnant auſſi R. P :: BD× ſDBP. DS×ſDAR.

1°. Si les directions AD, BD, des poids EON, FQM, ſont paralles enſr'elles, & non celles des puiſſances R, P; cette hypotheſe rendra ici BD=DS comme dans le nomb. 1. du Corol. 47. doit y rendre auſſi R. P : ſDBP. ſDAR.

c'est-à-dire, les puissances R, P, entr'elles en raison reciproque des sinus des angles DAR, DBP, compris chacun entre les directions de chacune d'elles & du poids qu'elle soûtient.

2°. Si outre les directions AD, BD, des poids EON, FQM, paralleles entr'elles vers quelque côté que ce soit; celles AR, BP, des puissances R, P, sont aussi paralleles entr'elles vers tel autre côté qu'on voudra, ce double parallelisme rendant non seulement DB=DS, mais encore DAR=DBP, doit aussi rendre ici R=P, c'est-à-dire, les puissances R, P, égales entr'elles.

COROLLAIRE LII.

Dans la même hypothese des charges égales O, Q, du plan HG, le Corol. 9. donnera EON. O :: ſRAO. ſDAR. & la charge Q, ou son égale (*Hyp.*) O. FQM :: ſDBP. ſPBQ. Donc (en multipliant par ordre) EON. FQM :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. c'est-à-dire, les pesanteurs des poids EON, FQM, entr'elles en raison composée de la directe des angles partiaux, RAO, PBQ, & de la reciproque des sinus des angles totaux DAR, DBP. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles entr'elles, celles des poids étant telles qu'on voudra, les angles RAO, PBQ, se trouvant alors égaux entr'eux, l'on aura pour lors ici EON. FQM :: ſDBP. ſDAR. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, en raison reciproque des sinus des angles totaux DAR, DBP.

2°. Or ce cas de parallelisme des directions AR, BP, des puissances R, P, rend aussi ſDBP=ſDXA, & (*Déf. 9. Cor. 2.*) ſDAR=ſDAX. Donc (*nomb. 1.*) ce même parallelisme rend pareillement ici EON. FQM :: ſDXA. ſDAX (*Lem. 8. Corol. 2.*) :: AD. XD. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, en raison des côtez AD, XD, du triangle AXD.

3°. D'où l'on voit que si outre les directions AR, BP, des puissances R, P; paralleles entr'elles, celles AD, BD, des poids EON, FQM, le sont aussi entr'elles, ce double parallelisme joint à celui (*part.* 1. 2.) des droites AO, BD, entr'elles, rendant les angles RAO=PBQ, & DBP=DAR, rendroit pareillement ici EON=FQM, c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EON, FQM, égales entr'elles.

COROLLAIRE LIII.

Les noms O, Q, des charges du plan HG aux points O, Q, demeurant toûjours les mêmes, il suit des Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. que,

I. Puisque l'hypothese des poids EON, FQM, d'égales pesanteurs absolues, quelque soit le reste, donne (*Cor.* 33.) R. P :: ∫DAO×∫PBQ. ∫DBQ×∫RAO.

1°. Le Corol. 9. donnant P. Q :: ∫DBQ. ∫DBP. Cette hypothese donnera aussi R. Q :: ∫DAO×∫PBQ. ∫DBP× ∫RAO.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement O. R :: ∫DAR. ∫DAO. cette même hypothese donnera O. P :: ∫DAR× ∫PBQ. ∫DBQ×∫RAO.

II. Puisque la même hypothese d'égales pesanteurs absolues des poids EON, FQM, donne de plus (*Corol.* 39.) O. Q :: ∫RAD×∫PBQ. ∫DPB×∫RAO.

1°. Le Corol. 9. donnant R. O :: ∫DAO. ∫RAD. cette hypothese de pesanteurs absolues EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore R. Q :: ∫DAO×∫PBQ. ∫DBP× ∫RAO. ainsi que dans le nomb. 1. du précedent art. 1.

2°. Le Corol. 9. donnant pareillement Q. P :: ∫DBP. ∫DBQ. la même hypothese de pesanteurs absolues des poids EON, FQM, égales entr'elles, donnera encore aussi O. P :: ∫RAD×∫PBQ. ∫DBQ×∫RAO. comme dans le nomb. 1. du précedent art. 1.

III. Puisque l'hypothese des puissances R, P, égales entr'elles, quelque soit le reste, donne (*Corol.* 40.) EON. FQM :: ∫RAO×∫DBQ. ∫PBQ×∫DAO.

1°. Le

1°. Le Corol. 9. donnant FQM. Q :: ∫PBQ. ∫DBP. cette hypothese de R=P, donnera aussi EON. Q :: ∫RAO × ∫DBQ. ∫DBP × ∫DAO.

2°. Le Corollaire 9. donnant pareillement O. EON :: ∫RAD. ∫RAO. cette même hypothese de R=P donnera aussi O, FQM :: ∫RAD × ∫DBQ. ∫PBQ × ∫DAO.

IV. Puisque la même hypothese de R=P donne de plus (*Corol.* 44.) O. Q :: ∫RAD × ∫DBQ. ∫DBP × ∫DAO.

1°. Le Corol. 9. donnant EON. O :: ∫RAO. ∫RAD. cette hypothese de R=P donnera encore EON. Q :: ∫RAO × ∫DBQ. ∫DBP × ∫DAO. ainsi que dans le nomb. 1. du précedent art. 3.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement Q. FQM :: ∫DBP. ∫PBQ. la même hypothese de R=P, donnera encore aussi O. FQM :: ∫RAD × ∫DBQ. ∫PBQ × ∫DAO. comme dans le nomb. 2. du précedent art. 3.

V. Puisque l'hypothese des charges O, Q, du plan HG en ses points O, Q, égales entr'elles, quelque soit le reste, donne (*Corol.* 48.) R. P :: ∫DAO × ∫DBP. ∫DBQ × ∫DAR.

1°. Le Corol. 9. donnant P. FQM :: ∫DBQ. ∫PBQ. cette hypothese de O=Q donnera aussi R. FQM :: ∫DAO × ∫DBP. ∫PBQ × ∫DAR.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement EON. R :: ∫RAO. ∫DAO. cette même hypothese de O=Q donnera aussi EON. P :: ∫RAO × ∫DBP. ∫DBQ × ∫DAR.

VI. Puisque la même hypothese de O=Q donne de plus (*Corol.* 52.) EON. FQM :: ∫RAO × ∫DBP. ∫PBQ × ∫DAR.

1°. Le Corol. 9. donnant R. EON :: ∫DAO. ∫RAO. cette hypothese de O=Q donnera encore R. FQM :: ∫DAO × ∫DBP. ∫PBQ × ∫DAR. ainsi que dans le nomb. 1. du précedent art. 5.

2°. Le Cor. 9. donnant pareillement FQM. P :: ∫PBQ. ∫DBQ. cette hypothese de O=Q donnera encore aussi EON. P :: ∫RAO × ∫DBP. ∫DBQ × ∫DAR. comme dans le nomb. 2. du précedent art. 5.

Toutes ces analogies résultantes des Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. par le moyen du Corol. 9. dans les six articles du present Corollaire 53. peuvent encore se détailler en plusieurs autres, suivant les differentes hypotheses qu'on y peut faire des angles qui y sont compris : & cela de la maniere que les analogies de ces Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. l'ont été ci-dessus, & qu'on le va voir encore dans les deux Corollaires suivans.

Voilà jusqu'ici pour des poids soûtenus sur differens points d'un même plan : en voici presentement de soûtenus sur differens plans.

COROLLAIRE LIV.

FIG. 213. 214. Soient presentement deux poids EO, FQ, de même pesanteur absolue, & de directions AD, BD, concourantes en tel point D qu'on voudra, soûtenus sur deux plans HG, HL, de hauteurs & de longueurs quelconques (ce n'est que pour épargner les figures qu'on marque ici ces plans comme s'ils étoient de même hauteur ; & que les directions, tant des poids, que des puissances, n'expriment pas ici toutes les hypotheses qu'on en va faire ; c'est à l'imagination du Lecteur à faire le reste qu'il pourra se figurer sans peine sur ceci.) un sur chacun, par deux puissances R, P, de directions quelconques ER, FP, qui prolongées concourent en A, B, avec celles des poids ; desquels points A, B, soient AO, BQ, perpendiculaires en O, Q, à ces plans HG, HL. On trouvera ici, comme dans le Corol. 33. R. P : : $\int DAO \times \int PBQ . \int DBQ \times \int RAO$. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles entr'elles aussi quelconques, dont la seconde BD prolongée rencontre OA prolongée en N, laquelle OA prolongée rencontre aussi BP en V, & QB prolongée en M : ayant alors $\int RAO = \int PVO = \int BVM$, $\int DAO = \int BNM$, $\int PBQ = \int MBV$, & $\int DBQ = \int MBN$; l'on aura pour lors R. P : : $\int BNM \times \int MBV . \int MBN \times \int BVM$. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) $\int BNM . \int MBN$: : BM. MN. Et $\int MBV . \int BVM$: : MV. BM. Donc

aussi pour lors R. P : : BM×MV. MN×BM : : MV. MN. quelques soient les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans sur lesquels elles soûtiennent chacune un des poids EO, FQ; sçavoir, AR à HG, & BP à HL; & si les directions AD, BD, sont paralleles aussi chacune à chacune des hauteurs de ces deux plans, ou à leur hauteur commune HK, s'ils ont la même : cette hypothese rendant les angles RAO=HOA=HQB=PBQ, DAO=HGK, DBQ=HLG; & consequemment aussi ſRAO=ſPBQ; ſDAO=ſHGK (*Déf. 9. Corol. 2.*) =ſHGL, ſDBQ=ſHLG; cette même hypothese donnera ici R. P : : ſHGL×ſRAO. ſHLG×ſRAO : : ſHGL. ſHLG. c'est-à-dire, les puissances R, P, entr'elles en raison des sinus des angles HGL ou HGK, & HLG, d'inclinaison des plans HG, HL, aux longueurs desquels on suppose ici que ces directions de ces puissances sont paralleles chacune à chacune, quelques soient les hauteurs de ces plans.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales, ou la même HK pour tous les deux; ayant pour lors (*Lem. 8. Corol. 2.*) ſHGL. ſHLG : : HL. HG. l'hypothese du precedent nomb. 2. ajoûtée à celle-ci, donnera pareillement ici R. P : : HL. HG. c'est-à-dire, les puissances R, P, ici entr'elles en raison reciproque des longueurs HG, HL, des plans, ausquelles on suppose encore ici que leurs directions AR, BP, sont paralleles chacune à chacune de ces longueurs.

4°. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le nomb. 3. si l'on imagine sur le diamétre HK le demi-cercle HTSK dans la Fig. 210. où le cercle entier HTSK dans la Fig. 211. lequel perpendiculaire aux plans HG, HL, en rencontre ces longueurs en S, T : leur hauteur commune HK étant ici supposée perpendiculaire à la droite KL, sur laquelle leurs bases sont aussi supposées; les perpendiculaires KS, KT, aux longueurs HG, HL,

de ces plans, donneront ici HS. HK : : HK. HG $=\frac{HK\times HK}{HS}$.

Et HT. HK : : HK. LH $=\frac{HK\times HK}{HT}$. Donc dans cette hypothese du précedent nomb. 3. ce même nomb. 3. donnera pareillement ici R. P : : $\frac{HK\times HK}{HT}$. $\frac{HK\times HK}{HS}$: : $\frac{1}{HT}$. $\frac{1}{HS}$: : HS. HT. c'est-à-dire, les puissances R, P, entr'elles en raison des parties HS, HT, des longueurs de leurs plans, comprises dans le cercle HTSK ou HTKS.

La même chose peut encore se démontrer par le seul Corol. 20. art. 1. nomb. 1. car ce nomb. 1. donnant ici R. EO : : HK. HG : : HS. HK. Et le poids FQ ou son égal (*Hyp.*) EO. P : : HL. HK : : HK. HT. L'on aura encore ici (en raison ordonnée) R. P : : HS. HT. ainsi qu'on le vient de trouver dans le present nomb. 4.

COROLLAIRE LV.

En appellant (comme jusqu'ici) O, Q, les charges des plans HG, HL, la même hypothese des poids EO, FQ, d'égales pesanteurs absolues, donnera encore ici ces charges O. Q : : ∫RAD×∫PBQ. ∫PBD×∫RAO. sur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 39. sur differens points d'un même plan ; ce qui, outre le détail qui s'en est fait là, donne encore le suivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles entr'elles aussi quelconques, comme dans le nomb. 1. du Corol. 54. ce double parallelisme donnant ∫RAD = ∫PBD, ∫PBQ = ∫VBM, & ∫RAO = ∫PVO = ∫BVM, l'on aura ici les charges O. Q : : ∫PBQ. ∫RAO : : ∫VBM. ∫BVM (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) : : MV. MB.

2°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL,

des plans, sur chacun desquels elles soûtiennent chacune un des poids EO, FQ, dont les directions AD, BD, qui rencontrent les plans en Y, Z, soient paralleles aux hauteurs de ces plans; le tout comme dans le nomb. 2. du précedent Corol. 54. Cette hypothese rendant ſPBQ = ſRAO, ſRAD = ſAYH = ſGHK, & ſPBD = ſBZH = ſLHK, l'on aura ici O. Q :: ſRAD. ſPBD :: ſGHK. ſLHK. c'est-à-dire, les charges O, Q, des plans HG, HL, en raison des sinus des angles GHK, LHK, que les longueurs de ces plans font avec leurs hauteurs.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales ou la même HK pour les deux plans; si l'on prend cette hauteur commune HK pour le sinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol. 1.*) KS, KT, pour les sinus de ces angles GHK, LHK. Donc en ce cas-ci on aura O. Q :: KS. KT. le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle KSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54.

Voilà pour un même ou differens poids de même pesanteur absolue, soûtenus sur differens plans d'inclinaisons & de hauteurs quelconques par des puissances dirigées à volonté, aussi-bien que les poids. Voici presentement pour des poids de differentes pesanteurs absolues, soûtenus sur differens plans par des puissances égales, quelles que soient encore les inclinaisons & les hauteurs de ces plans; quelles que soient encore aussi les directions, tant des poids, que des puissances égales qu'on suppose les soûtenir chacune en équilibre sur chacun de ces plans.

COROLLAIRE LVI.

Soient presentement les puissances R, P, égales entr'elles, & les poids EO, FQ, de differentes pesanteurs absolues quelconques, soûtenus encore par ces puissances sur differens plans HG, HL, d'inclinaisons & de hauteurs aussi quelconques, quoique, pour épargner les Figures, on ne les voye ici que de même hauteur HK. Tout le reste demeurant le même que dans le Corol. 54. l'on aura ici FIG. 213. 214.

comme dans le Corol. 40. EO. FQ : : ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. Donc,

1°. Si les directions ER, FP, des puiſſances R, P, ſont deux paralleles entr'elles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi entr'elles quelconques ; & le reſte comme dans le nomb. 3. du Corol. 54. Cela donnant ici comme là, ſRAO=ſBVM, ſBDQ=ſMBN, ſPBQ=ſMBV, & ſDAO=ſBNM ; l'on aura ici EO. FQ : : ſBVM×ſMBN. ſMBV×ſBNM. Or (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) ſBVM. ſMBV : : BM. MV. Et ſMBN. ſBNM : : MN. BM. Donc on aura pareillement ici EO. FQ : : BM×MN. MV×BM : : MN. MV. quelles que ſoient encore les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les direction AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans ſur leſquels elles ſoûtiennent les poids EO. FQ ; ſçavoir, AR à HG, & BP à HL ; & les directions AD, BD, de ces poids paralleles auſſi chacune à chacune des hauteurs de ces plans, ou toutes deux à leur hauteur commune HK, s'ils ont la même : cette hypotheſe, qui eſt celle des nomb. 2. des précedens Corol. 54. 55. rendant ici comme là les ſinus ſRAO=ſPBQ, ſDAO=ſHGK, ſDBQ=ſHLG, donnera ici EO. FQ : : ſRAO×ſHLG. ſRAO×ſHGK : : ſHLG. ſHGK. c'eſt-à-dire, les poids EO, FQ, ou leurs peſanteurs abſolues, en raiſon reciproque des ſinus des angles HGK, HLK, d'inclinaiſon des plans ſur leſquels on ſuppoſe ici ces poids ſoûtenus par des puiſſances égales R, P, dirigées parallelement aux longueurs HG, HL, de ces plans, quelles que ſoient encore les hauteurs de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut preſentement que ces plans HG, HL, ſoient de même hauteur HK, comme dans les nomb. 3. des précedens Corol. 54. 55. ayant alors (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) HG. HL : : ſHLG. ſHGL (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) : : ſHLG. ſHGK. l'hypotheſe du précedent nomb. 2. donnera pareillement ici EO. FQ : : HG. HL. c'eſt-à-dire, les poids EO, FQ, en raiſon des longueurs HG,

HL, des plans sur lesquels on les suppose soûtenus par des puissances égales R, P.

Un Auteur de ce tems rejette ce sentiment-ci, le trouvant contraire à la prop. 27. de sa Mecanique ; mais cette proposit. 27. n'étant fondée que sur la prop. 26. qu'on va voir être fausse dans le Corol. 4. du Théoreme suivant, ce Corollaire 4. suffira pour faire voir aussi la fausseté de celle-là.

4°. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent nomb. 3. si l'on imagine sur le diamétre HK le demi-cercle HTSK de la Fig. 210. ou le cercle entier HSKT de la Fig. 211. & le reste comme dans le nomb. 4. du Cor. 54. ayant ici comme là $HG = \frac{HK \times HK}{HS}$, & $HL = \frac{HK \times HK}{HT}$; le précedent nomb. 3. donnera encore ici $EO . FQ :: \frac{HK \times HK}{HS} . \frac{HK \times HK}{HT} :: \frac{1}{HS} . \frac{1}{HT} :: HT . HS$. c'est-à-dire, les poids EO, FQ, en raison reciproque des parties HS, HT, des longueurs de leurs plans, comprises dans le demi-cercle HTSK, ou dans le cercle entier HSKT.

Cela se pourroit encore démontrer de la seconde maniere dont l'a été le nomb. 4. du Corol. 54.

COROLLAIRE LVII.

En appellant encore O, Q, les charges des plans HG, HL, la même hypothese des puissances R, P, égales entr'elles, donnera encore ici les charges $O . Q :: \int RAD \times \int DBQ . \int DBP \times \int DAO$. sur ces differens plans, comme on les a trouvées dans le Corol. 44. sur les differens points d'un même plan. Ce qui, outre le détail qui s'en est fait là, fournit encore le suivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles quelconques ; & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles aussi quelconques,

le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme donnant ſRAD=ſDBP, ſDBQ =ſMBN, & ſDAO=ſDNO=ſBNM, l'on aura ici les charges O. Q :: ſDBQ. ſDAO :: ſMBN. ſBNM (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MN. MB. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, LH.

2°. Si les directions AR, BP, des puiſſances R, P, ſont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans ſur chacun deſquels elles ſoutiennent chacune un des poids EO, FQ, dont les directions AD, BD, qui rencontrent ces plans HG, HL, en Y, Z, ſoient paralleles aux hauteurs paralleles de ces mêmes plans; le tout comme dans le nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. Ce double parallelisme rendant ſRAD=ſAYH=ſGHK, ſDBP=ſBZH=ſLHK, ſDBQ=ſMBN, ſDAO=ſANB =ſMNB; l'on aura ici O. Q :: ſGHK×ſMBN. ſLHK× ſMNB (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: ſGKH×MN. ſLHK×MB. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, HL, qui ſoûtiendront ces charges O, Q, réſultantes perpendiculairement ſur eux du concours de chaque puiſſance & de chaque poids ſuppoſez en équilibre ſur chacun de ces plans, quelles qu'en ſoient encore les hauteurs paralleles entr'elles.

3°. Si l'on veut preſentement que les hauteurs de ces plans ſoient égales, ou la même HK, cette hauteur commune HK priſe pour le ſinus total, donnera (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) KS=ſGHK, & KT=ſLHK. Donc en ce cas les charges ſeront O. Q :: KS×MN. KT×MB.

COROLLAIRE LVIII.

Enfin ſi l'on ſuppoſe les charges O, Q, des plans HG, HL, égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 48. les puiſſances R. P :: ſDAO×ſDBP. ſDBQ× ſDAR. Donc,

1°. Si les directions AR, BP, de ces puiſſances R, P, ſont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD, des

poids

poids EO, FQ, deux autres paralleles auſſi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Cor. 54. 55. 56. 57. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 1. du précedent Corollaire 57. ſDAO=ſDNO=ſMNB, ſDBQ=ſMBN, & ſDBP=ſDAR; l'on aura ici R. P :: ſDAO. ſDBQ :: ſMNB. ſMBN (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB. MN. quelles que ſoient les hauteurs des plans HG, HL.

2°. Si les directions AR, BP, de ces puiſſances R, P, ſont deux paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, paralleles auſſi aux hauteurs paralleles de ces plans ſur leſquels on ſuppoſe ces puiſſances en équilibre avec ces poids; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. Ce double parallelisme donnant ici, comme dans le nomb. 2. du précedent Corol. 57. ſDAO =ſANB=ſMNB, ſDBQ=ſMBN, ſDBP=ſBZH= ſLHK, & ſDAR=ſAYH=ſGHK, l'on aura ici R. P :: ſMNB×ſLHK. ſMBN×ſGHK (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB×ſLHK. MN×ſGHK. quelles que ſoient encore les hauteurs paralleles des plans HG, HL, ſur leſquels ces puiſſances R, P, ſont ſuppoſées en équilibre avec les poids EO, FQ, chacune avec chacun ſur chacun de ces plans de hauteurs paralleles quelconques.

3°. Si l'on veut preſentement que ces hauteurs ſoient égales, ou la même HK, cette hauteur commune HK priſe pour le ſinus total, donnera ici (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) KT=ſLHK, & KS=ſGHK. Donc en ce cas-ci les puiſſances ſeront R. P :: MB×KT. MN×KS.

COROLLAIRE LIX.

Dans la même hypotheſe des charges O, Q, des plans HG, HL, égales entr'elles, on trouvera ici comme dans le Corol. 52. les poids de peſanteurs abſolues EO. FQ :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. Ce qui, outre le détail qui s'en eſt fait dans ce Corol. 52. fournit encore le ſuivant.

1°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont deux paralleles quelconques, & celles AD, BD, des poids EO, FQ, deux autres paralleles aussi quelconques; le tout comme dans les nomb. 1. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 1. du Corol. 55. ʃRAO=ʃBVM, ʃPBQ=ʃMBV, & ʃDBP=ʃDAR, l'on aura ici EO. FQ :: ʃRAO. ʃPBQ :: ʃBVM. ʃMBV (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) :: MB. MV. quelles que soient les hauteurs de plans HG. HL.

2°. Si les directions AR, BP, des puissances R, P, sont paralleles chacune à chacune des longueurs HG, HL, des plans, & que les directions AD, BD, des poids EO, FQ, soûtenus (*Hyp.*) par ces puissances sur les points O, Q, de ces plans, soient aussi paralleles aux hauteurs paralleles de mêmes plans; le tout comme dans les nomb. 2. des Corol. 54. 55. 56. 57. 58. Ce double parallelisme donnant ici comme dans le nomb. 2. du Corol. 55; ʃRAO=ʃPBQ, ʃDBP=ʃBZH=ʃLHK, & ʃDAR=ʃAYH=ʃGHK. l'on aura ici EO. FQ :: ʃDBP. ʃDAR :: ʃLHK. ʃGHK. c'est-à-dire, les pesanteurs absolues des poids EO, FQ, en raison reciproque des sinus des angles GHK, LHK, que les longueurs HG, HL, des plans sur lesquels ces poids sont supposez soûtenus par les puissances R, P, font avec les hauteurs paralleles quelconques de ces mêmes plans.

3°. Si l'on veut presentement que ces hauteurs soient égales entr'elles, ou soient la même HK; cette hauteur commune HK prise pour le sinus total, donnera (*Déf.* 9. *Corol.* 1.) KT=ʃLHK, & KS=ʃGHK. Donc en ce cas-ci l'on aura EO. FQ :: KT. KS. Le demi-cercle KSTH de la Fig. 210. & le cercle entier HSHT de la Fig. 211. étant ici les mêmes que dans le nomb. 4. du Corol. 54. & par tout depuis jusqu'ici.

COROLLAIRE LX.

Fig. 211. 212. 213. 214. Soit presentement que deux poids EO, FQ, soient soûtenus par deux puissances R, P, sur differens points d'un

même plan, comme dans les Fig. 211. 212. ou sur differens plans, comme dans les Fig. 213. 214. les Corol. 33. 39. 40. 44. 48. 52. 54. 55. 56. 57. 58. 59. font voir qu'en cas d'équilibre par tout là, c'est-à-dire, tant sur differens points d'un même plan, que sur differens plans dont les charges en O, Q, soient encore appellées de ces noms O, Q.

1°. L'hypothese de EO=FQ, c'est-à-dire, d'égalité entre les pesanteurs absolues des deux poids de ces noms, donnera les puissances R. P :: ſDAO×ſPBQ. ſDBQ×ſRAO. ainsi que dans les Corol. 33. 54.

2°. La même hypothese des poids de pesanteurs absolues égales entr'elles, donnera les charges O. Q :: ſRAD×ſPBQ. ſPBD×ſRAO. ainsi que dans les Corollaires 39. 55.

3°. L'hypothese de R=P, c'est-à-dire, des puissances R, P, égales entr'elles, donnera EO. FQ :: ſRAO×ſDBQ. ſPBQ×ſDAO. pour le rapport des pesanteurs absolues des poids EO, FQ, ainsi que dans les Corol. 40. 56.

4°. La même hypothese des puissances égales R, P, donnera O. Q :: ſRAD×ſDBQ. ſDPB×ſDAO. pour le rapport des charges aux differens points O, Q, d'un même ou de differens plans, ainsi que dans les Col. 44. 57.

5°. L'hypothese de O=Q, c'est-à-dire, des charges égales d'un même ou de differens plans aux points de ces noms, donnera les puissances R, P :: ſDAO×ſDBP. ſDBQ×ſDAR. ainsi que dans les Corol. 48. 58.

6°. La même hypothese des charges égales O, Q, donnera EO. FQ :: ſRAO×ſDBP. ſPBQ×ſDAR. pour le rapport des pesanteurs absolues des poids EO, FQ, ainsi que dans les Corol. 52. 59.

COROLLAIRE LXI.

Il suit encore du Corol. 20. art. 1. nomb. 1. dans la Fig. 209. que deux puissances P, R, soûtenant successivement un même poids C, ou d'eux d'égales pesanteurs FIG. 209.

absolues chacun sur un des plans AD, HD, suivant des directions CP, CR, paralleles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces deux plans, aux hauteurs AB, HK, la direction du poids successivement soûtenu sur eux, soit toûjours parallele: il suit, dis-je, du nomb. 1. de l'art. 1. du Corol. 20. que la somme P+R des deux puissances P, R, soûtiennent ainsi ce poids C sur differens plans, peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la pesanteur absolue (*Hyp.*) constante de ce même poids C.

Car si quelqu'un des deux plans AD, HD, par exemple, AD est plus long que l'autre HD, soit celui-ci prolongé vers E jusqu'à ce qu'on ait DE=DA; ensuite du point E la verticale EF parallele aux hauteurs de ces plans. Cela fait, le Corol. 20. art. 1. nomb. 1. donnera P. C :: AB. AD (*Hyp.*) :: AB. ED. Et C. R :: HD. HK :: ED. EF. Donc (en raison ordonnée) P. R :: AB. EF. Et (en composant) P. P+R :: AB. AB+EF. Or (*Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) C. P :: AD. AB. Donc (en raison ordonnée) C. P+R :: AD. AB+EF. Or il est visible que AD peut être égale, plus grande, ou plus petite que AB+EF, selon les differentes inclinaisons que les plans AD, HD ou DE, peuvent avoir sur la droite BF de leurs bases. Donc aussi le poids C peut être égal, plus grand, ou plus petit que la somme P+R des puissances P, R, capables chacune de le soûtenir successivement sur chacun de ces deux plans suivant des directions CP, CR, paralleles chacune à chacune des longueurs AD, HD, de ces mêmes plans.

COROLLAIRE LXII.

Il suit aussi du même Corol. 20. art. 2. nomb. 1. que ce même poids quelconque C successivement soûtenu sur chacun des plans AD, HD, par chacune de deux autres puissances S, T, suivant des directions CS, CT, paralleles à la base commune BK de ces deux plans, peut

être tantôt égal, tantôt plus grand, & tantôt moindre que la somme S+T de ces deux autres puissances.

Car si l'on suppose DH prolongée de maniere que la verticale EF rende DF=BD, le Corol. 20. art. 2. nomb. 1. donnera ici S. C :: AB. BD (*Hyp.*) :: AB. DF. Et C. T :: DK. HK :: DF. EF. Donc (en raison ordonnée) S. T :: AB. EF. Et (en composant) S. S+T :: AB. AB+EF. Or (*Corol.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1.) C. S :: BD. AB. Donc (en raison ordonnée) C. S+T :: BD. AB+EF. Or il est encore visible que BD peut être égale, plus grande, ou plus petite que AB+EF, selon les differentes inclinaisons des plans AD, HD, sur leur base commune BK. Donc aussi le poids C peut être encore ici égal, plus grand, ou moindre que la somme S+T des puissances S, T, capables chacune de soûtenir ce poids C sur chacun des plans AD, HD, suivant des directions CS, CT, paralleles à la base commune BK de ces deux plans.

On n'entrera point ici dans un plus grand détail des Corollaires qu'on pourroit encore tirer des précedens, & du present Th. 26. que l'on vient de donner : la fecondité de ce Théoreme nous les a presentez si naturellement, que sans y penser, nous ne nous y sommes peut-être déja que trop arrêtez.

SCHOLIE.

On a vû dans les Cor. 8. 9. du Lem. 3. qu'afin qu'une puissance puisse soûtenir un poids en équilibre sur une surface quelconque, la direction de la force résultante du concours d'action de cette puissance & de ce poids doit toûjours être perpendiculaire à cette surface, laquelle perpendiculaire passe par la base de ce poids. Donc la force résultante du concours de deux déterminées, & de deux directions déterminées, ne pouvant être dirigée (*Lem.* 3. *part.* 4. *& n.* 1. *du Cor.* 1.) que suivant la diagonale d'un parallelogramme fait de côtez pris sur leurs directions en raison de ces forces generatrices de celle-là, menée du point de concours de ces directions laterales ; il ne peut y avoir de ce point de concours à quelque surface que ce soit, qu'une seule per-

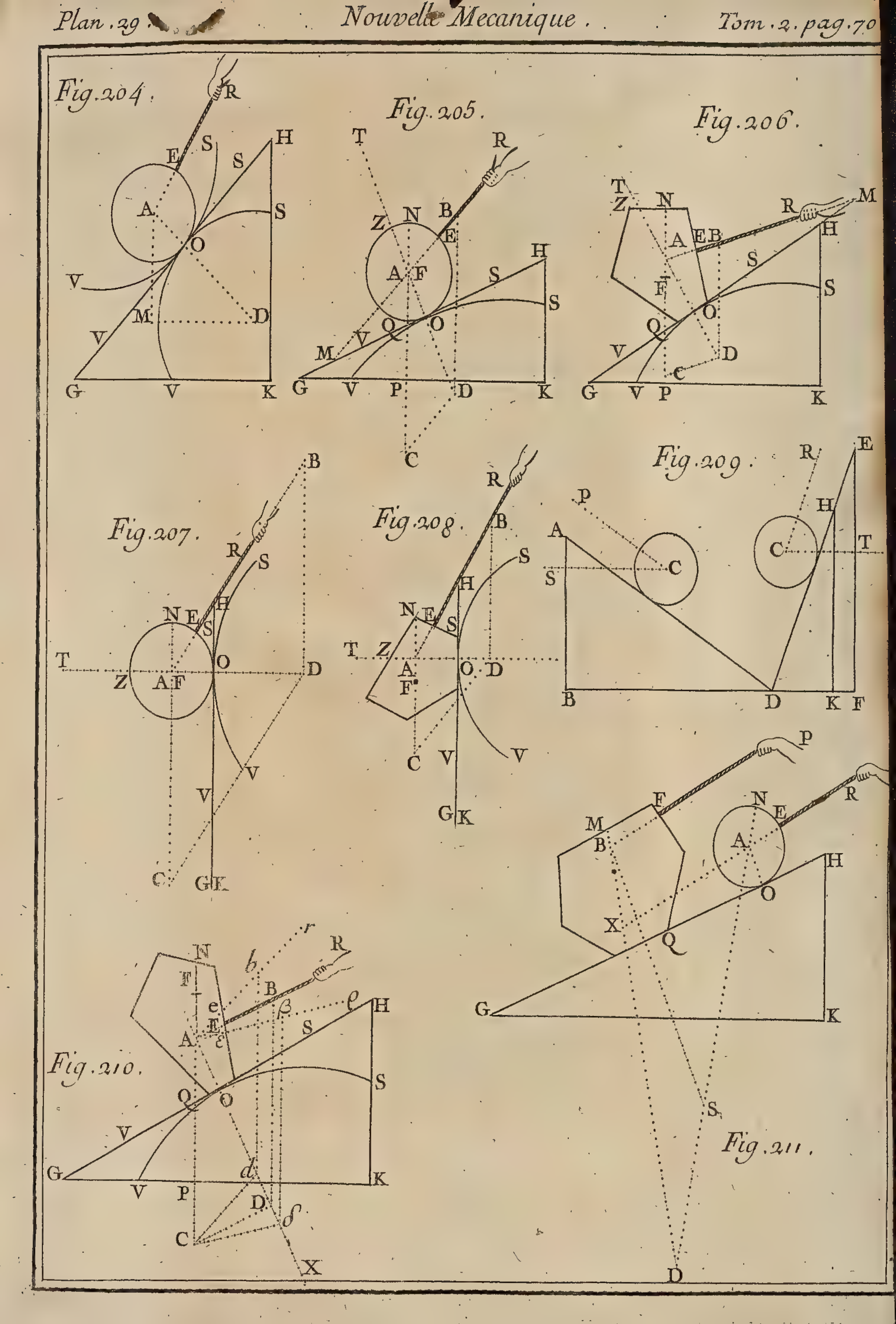
pendiculaire, ſuivant laquelle la force réſultante du concours d'action d'une puiſſance & d'un poids de forces & de directions déterminées, puiſſe être dirigée; & conſequemment auſſi qu'un ſeul point de cette même ſurface, ſur lequel cette puiſſance & ce poids puiſſent demeurer en équilibre entr'eux, quand même du concours de leurs directions, l'on pourroit mener pluſieurs perpendiculaires à cette ſurface, par exemple, ſi elle étoit en calote ſpherique, ou en goutiere circulaire, qui eût ce point pour centre. C'eſt pour cela qu'on la doit toûjours ſuppoſer ici comme ſi de ce point de concours on ne lui pouvoit mener que cette ſeule perpendiculaire, ainſi qu'on l'a fait dans la part. 1. du preſent Th. 25. & dans la reflexion qui ſuit ſon Corol. 15. ou s'il y en a pluſieurs poſſibles de ce point de concours à cette ſurface, il n'y faut conſiderer ici que celle ſuivant laquelle ſe fera le concours d'action de la puiſſance & du poids, ſuivant laquelle ſera (*Lem.* 3. *part.* 4. *& Corol.* 1. *nomb.* 1.) la diagonale du parallelogramme fait de côtez pris ſur leurs directions en raiſon de leurs forces.

REMARQUE

Sur la démonſtration ordinaire des Poids ſoûtenus ſur des Plans inclinez, faite par le moyen des Leviers.

FIG. 215. 216. 217. 218. I. Pour faire cette démonſtration, on ſuppoſe d'ordinaire un poids ſpherique EOQ, ſoûtenu par une puiſſance R ſur le plan incliné HG, comme dans les Fig. 212. 213. Je ne ſçais qu'un Auteur qui en ait mis un angulaire, qu'il a placé de maniere qu'il ne touchât auſſi le plan HG qu'en un point, en l'y plaçant ſeulement ſur une de ſes pointes O, comme dans les Fig. 214. 215. de maniere auſſi que la droite menée de ce point O au concours A des directions AR, AP, de la puiſſance R, & du poids EOQ, fût perpendiculaire à ce plan HG.

On a enſuite imaginé un Levier recourbé BOC, appuyé ſur ce point O d'attouchement, ayant un de ſes bras OC horiſontal, ou perpendiculaire en C à la direction AP


Fig. 204.
Fig. 205.
Fig. 206.
Fig. 207.
Fig. 208.
Fig. 209.
Fig. 210.
Fig. 211.

du poids EOQ, qu'on a ſuppoſée parallele à la hauteur HK du plan HG : on a enſuite regardé ce poids EOQ comme ſuſpendu ſuivant cette direction AP à l'extrêmité C de ce bras OC du Levier feint BOC ; & la puiſſance R ſuppoſée le ſoûtenir ſur le plan HG, comme appliquée perpendiculairement auſſi à l'extrêmité B de l'autre bras OB de ce Levier recourbé BOC, ſuivant une direction AR, qu'on ſuppoſe d'ordinaire parallele à la longueur HG du plan de ce nom, ainſi que dans les Fig. 212. 214. & comme ſoûtenant ainſi le poids EOQ ſur le point O de ce plan HG par le moyen du Levier recourbé BOC, appuyé en ce point O ſur ce même plan.

II. Cela ſuppoſé, l'on a conclu, ſuivant le principe ordinaire des Leviers (*Th.* 21. *Corol.* 13.) que la puiſſance R & le poids EOQ, ſuppoſé ici en équilibre avec elle ſur l'appui O de ce Levier BOC recourbé en O, ſont entr'eux en raiſon reciproque de ſes bras OB, OC, perpendiculaires (*Hyp.*) aux directions AR, AP de cette puiſſance R, & de ce poids EOQ ; c'eſt-à-dire, R. EOQ :: OC. OB. Et conſequemment, en ſuppoſant à l'ordinaire AR parallele à GH (comme dans les Fig. 212. 214.) R. EOQ :: HK. HG. à cauſe des triangles rectangles BCO, GKH, que ce parallelisme rend ſemblables, en faiſant paſſer B en A.

III. Je conviens (*Th.* 26. *Corol.* 10. *& Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) de la verité de ces deux conſequences, dont la ſeconde eſt d'ordinaire la ſeule, ou du moins la premiere qu'on conclud de la ſuppoſition précedente (*art.* 1.) du Levier BOC, au lieu de la generale qui la précede : ces deux conſequences ſont, dis-je, ainſi vrayes ; mais elles ne ſont ſûres par cette voye qu'en cas qu'on le ſoit que le poids EOQ ſoûtenu (*Hyp.*) ſans Levier par la puiſſance R ſur le plan HG, puiſſe l'être de même par cette puiſſance appliquée (comme on l'imagine) au bras OB, & lui au bras OC d'un Levier BOC, appuyé librement en O ſur ce plan HG. Mais pour cela il reſte deux choſes à démontrer.

1°. Lorſque le poids touche le plan en pluſieurs points, lequel de tous ces points doit être pris pour l'appui du Levier qu'on imagine ici, n'y en ayant qu'un qui le puiſſe être, c'eſt-à-dire, qui lui puiſſe faire donner le rapport cherché entre la puiſſance & le poids ſuppoſez ici en équilibre entr'eux ſur le plan incliné.

2°. Quelle eſt la direction de la charge de ce point ou du plan en ce point ; faute de quoi il ſera toûjours à craindre que le Levier ainſi chargé de la puiſſance & du poids ſur ce plan incliné, ne tombe avec eux le long de ce même plan, ainſi qu'un poids qui n'y ſeroit pas ſuffiſamment ſoûtenu, la difficulté étant la même de part & d'autre.

Fig. 215. *Le P. Pardies ſemble avoir effectivement apprehendé ce dernier inconvenient dans ſa Statique, art. 57. pages 78. 79. Car après avoir dit:* Imaginons que tout le poids de cette boule EOQ (*Fig.* 215.) eſt ramaſſé dans un bâton OB perpendiculaire au plan HG, qui a ſon centre de gravité en B comme l'y avoit la boule, & qui appuyé en O comme l'étoit auſſi la boule. *Il ajoûte:* Imaginons encore que ce bâton eſt non ſeulement appuyé ſur le bout O, mais qu'il y eſt comme ATTACHÉ, en ſorte neanmoins qu'il puiſſe y tourner comme ſur un pivot, pour ſe pancher vers G, & pour ſe hauſſer vers R. *Ce ſont les propres paroles du P. Pardies (aux lettres de la Figure près) qui eſt le ſeul, que je ſçache, qui ait ainſi apperçû le ſecond des deux inconveniens précedens de la démonſtration ordinaire des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, rapportée ci-deſſus dans l'art.* 2. *Quant au premier de ces deux inconveniens, cet Auteur n'en parle pas plus que les autres, qui s'en tiennent à cette démonſtration, n'employant ici, non plus qu'eux, que des poids qui ne touchent les plans que chacun dans un point.*

IV. La neceſſité de démontrer les deux choſes marquées comme requiſes dans les nomb. 1. 2. du précedent art. 3. pour rendre la démonſtration précedente (*art.* 2.) des poids ſoûtenus ſur des plans inclinez, auſſi complete & auſſi generale qu'on a crû juſqu'ici l'avoir donnée par

le

le moyen des Leviers, paroîtra si l'on considere,

1°. Que lorsque le poids EOQ est de figure à toucher en plusieurs points F, O, F, &c. le plan HG sur lequel on le suppose en équilibre avec la puissance R, il n'y a effectivement qu'un de ces points, sur lequel le Levier qu'on y imagine, puisse donner le rapport cherché entre cette puissance & ce poids appliquez à ce Levier suivant les mêmes directions AR, AP, suivant lesquelles on les suppose ici en équilibre entr'eux sur le plan HG sans aucun Levier. En effet ce Levier appuyé, par exemple, en O, donneroit, comme ci-dessus (*art.* 2.) R. EOQ :: OC. OB. & appuyé en tout autre point F, duquel on meneroit FD, FL, perpendiculaires aux directions AR, AP, de la puissance R & du poids EOQ, comme le sont (*Hyp.*) OB, OC; ce Levier DFL appuyé en F, donneroit de même R. EOQ :: FL. FD. rapport tout different de l'autre donné par le Levier BOC appuyé en O. Cela étant, lequel prendre de ces differens points O, F, &c. pour l'appui du Levier qui doit donner le veritable rapport qu'on demande entre cette puissance R & ce poids EOQ supposez en équilibre entr'eux sur le plan HG touchée en tous ces points par les poids de la Fig. 201? C'est ce qu'il auroit fallu démontrer pour pouvoir donner (comme l'on a fait) comme generale la prétendue démonstration du précedent art. 2. ainsi qu'on le vient de dire dans le nomb. 1. de l'art. 3. FIG. 219.

2°. Que non seulement (*nomb.* 1.) le rapport que cette démonstration donne entre la puissance & le poids supposez en équilibre entr'eux sur un plan incliné, n'y est pas generalement démontré pour toutes sortes de poids en toutes sortes de positions, mais encore que cette démonstration n'est pas même complete pour le cas qu'on y suppose d'un poids EOQ, qui ne touche qu'en un seul point O le plan HG sur lequel on suppose que la puissance R le soûtient. FIG. 215. 216 217. 218.

Car cette démonstration étant fondée sur la supposition qu'on y fait qu'un Levier BOC, auquel ce poids EOQ,

& cette puissance R seroient perpendiculairement appliquez suivant les mêmes directions AP, AR, sur ce plan HG: cette démonstration, dis-je, étant toute fondée sur cette supposition, elle ne peut subsister, à moins que ce Levier BOC ou AEC, ainsi chargé de la puissance R & du poids EOQ, ne demeure effectivement en repos avec eux sur ce point O du plan HG, sans glisser ni trebucher comme feroit un poids qui y seroit mal soûtenu. Or les Corollaires 7. 8. du Lem. 3. & le Th. 21. part. 5. font voir que ce Levier ainsi chargé ne peut ainsi demeurer en repos sur ce point O du plan HG, à moins que la direction de sa charge résultante du concours d'action de la puissance R & du poids EOQ, qu'on lui suppose appliquez, ne passe par ce même point O de la base de ce poids, & perpendiculairement à ce plan HG. Donc les Auteurs de cette prétendue démonstration n'ayant démontré ni l'un ni l'autre, ont laissé cette démonstration imparfaite, & sans rien prouver même pour le cas d'un poids qui ne touche qu'en un point le plan incliné, sur lequel ils l'ont supposé soûtenu; ce qui est le second défaut de cette démonstration, marqué dans le nomb. 2. de l'art. 3.

Fig. 215. 216. 217. 218. 219. V. Pour y corriger ces deux défauts marquez dans les nomb. 1. 2. de l'art. 3. & démontrez dans les nomb. 1. 2. du précedent art. 4. & rendre generale & complette cette démonstration ordinaire, en quelque nombre de points que le poids EOQ touche le plan HG, soit menée du concours A des directions AP, AR, de ce poids, & de la puissance R, qu'on suppose le soûtenir en équilibre avec elle sur ce plan, la droite AO perpendiculaire en O à ce même plan; ce point O du plan HG sera le veritable & l'unique sur lequel un Levier tel qu'on imagine ici BOC, demeureroit appuyé, & soûtiendroit en équilibre entr'eux le poids EOQ & la puissance R, qui lui seroient perpendiculairement appliquez aux extrêmitez C, B, de ses bras OC, OB, suivant les mêmes directions AP, AR, qu'elles ont dans l'équilibre qu'on leur suppose sans Levier sur le plan HG. Car,

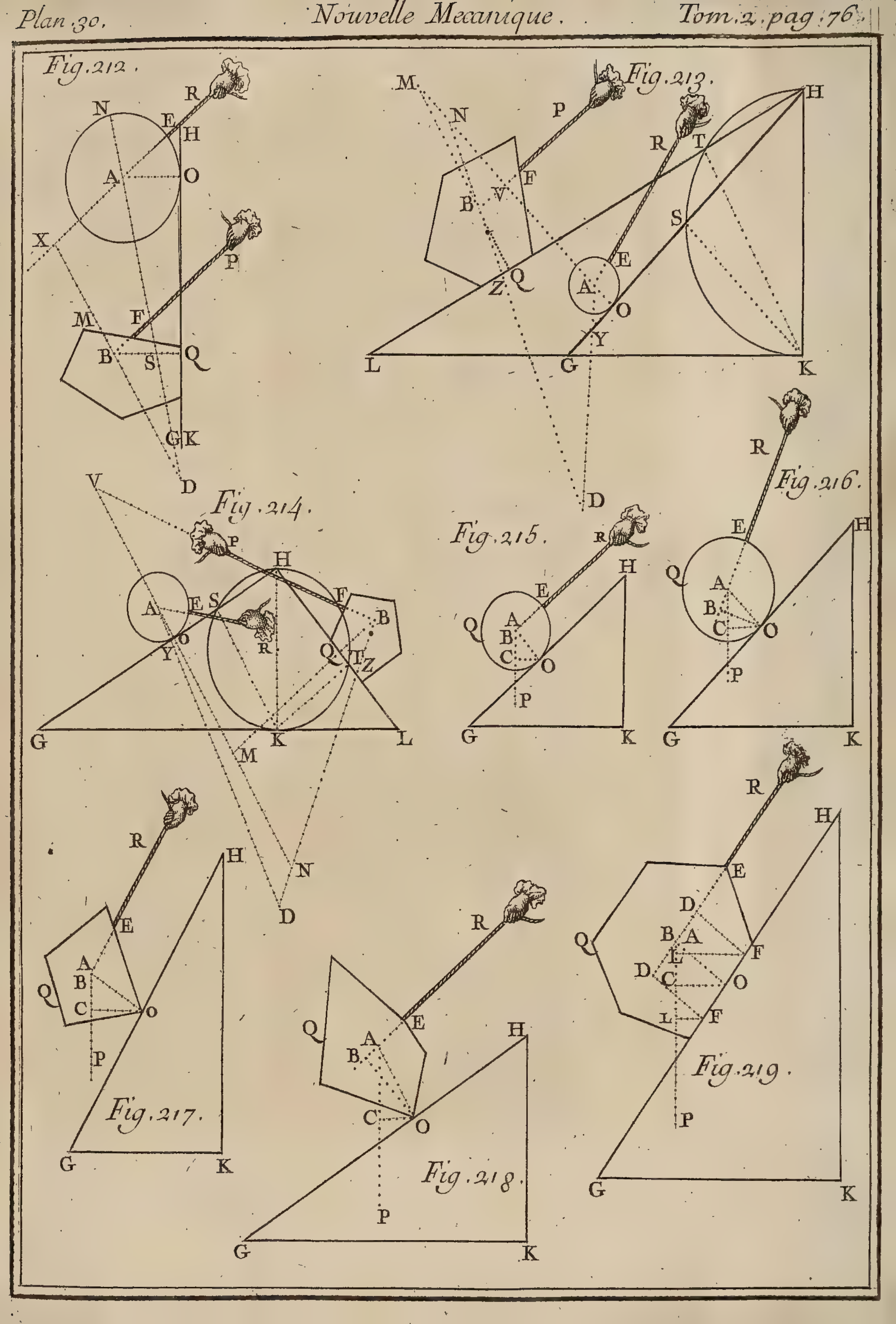
1°. Puisque (*Hyp.*) cette puissance R & ce poids EOQ sont en équilibre entr'eux sans Levier sur le plan HG, la direction de la force résultante de leur concours d'action, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) suivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) à ce plan, & consequemment passer par le point ou le coude du Levier recourbé BOC, auquel on les imagine appliquez suivant les mêmes directions AR, AP, qu'elles ont dans leur équilibre sans Levier sur ce plan HG. Donc (*Th.* 21. *part.* 5.) ce Levier BOC ainsi chargé de cette puissance & de ce poids, demeureroit en repos avec eux sur ce point O, si ce point de ce Levier peut demeurer sur celui O du plan HG. Or la charge ou l'impression de ce point O du Levier BOC, résultante du concours d'action de cette puissance & de ce poids, se trouvant ainsi dirigée (*Th.* 21. *part.* 2.) suivant AO perpendiculaire (*Hyp.*) en O à HG, ce point O de ce Levier doit demeurer (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) sur celui O de ce plan. Donc aussi ce Levier BOC, auquel la puissance R & le poids EOQ seroient appliquez comme ci-dessus, demeureroit en repos avec eux sur ce point O du plan HG, sans glisser ni trebucher. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

2°. De tous les points dans lesquels le plan HG est touché par le poids EOQ, s'il le touche en plusieurs, comme dans la Fig. 216. Ce point O déterminé par la perpendiculaire AO sur ce plan, est le seul de ce même plan, sur lequel un Levier appuyé pût demeurer en repos avec la puissance R & le poids EOQ, qui lui seroient appliquez suivant les mêmes directions AR, AP, que ci-dessus; puisque suivant leur équilibre supposé sans Levier sur le plan AM, la direction de la force résultante de leur concours, doit être (*Lem.* 3. *Corol.* 8.) suivant cette perpendiculaire AO au plan HG, & consequemment ne doit rencontrer ce plan qu'en son seul point O. Donc en tout autre point F de ce même plan qu'on plaçât le Levier tel que DFL, auquel la puissance R & le poids EOQ, fussent appliquez en D, L, suivant les mê-

mes directions AR, AP; ce Levier (*Lem.* 3. *Corol.* 7. *nomb.* 2.) tomberoit ou monteroit avec eux en trebuchant le long du plan HG; selon que ce point F se trouveroit au-dessous ou au-dessus de O sur ce plan : par consequent ce point O est le seul de ce même plan HG, sur lequel un Levier chargé (comme ci-dessus) de la puissance R & du poids EOQ, pût demeurer en repos avec eux. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

FIG. 215. 216. VI. Il est vrai que les Auteurs qui n'ont consideré que des poids spheriques soûtenus sur des plans inclinez, comme dans les Fig. 212. 213. ont mis en ce point O de chacun de ces plans l'appui du Levier BOC, qu'ils y ont imaginé; mais n'ayant pas eu à choisir, à cause que chaque Sphere ou Globe EOQ ne touche chaque plan AH qu'en cette extrêmité O de son rayon AO necessairement perpendiculaire à ce plan, l'on n'en peut rien conclure pour la necessité d'un tel appui du Levier pareillement imaginé dans un poids qui toucheroit le plan en
FIG. 219. plusieurs points, comme dans la Fig. 219. c'est-à-dire, qu'on n'en peut rien conclure pour le choix de celui de ces points qu'on devroit prendre pour l'appui de ce Levier.

Quant à l'Auteur qui y a employé un poids angulaire, ne l'ayant appuyé que sur une de ses pointes, comme
FIG. 217. 218. dans les Fig. 217. 218. il n'a pas eu plus à choisir pour l'appui O du Levier BOC, qu'il y a pareillement imaginé; mais la supposition qu'il y a faite de AO perpendiculaire en ce point O au plan HG, sur lequel il a supposé ce poids EOQ, fait voir qu'il a sçû qu'il étoit necessaire que la droite AO menée du concours A des directions AP, AR, de ce poids & de la puissance R à ce point O, fût perpendiculaire au plan HG, sur lequel on les suppose en équilibre : cependant cet Auteur ne l'ayant pas démontré, non plus que les autres, sa démonstration des poids soûtenus sur des plans inclinez, n'est, non plus que les leurs, ni generale, ni complete, ainsi qu'on le vient de faire voir dans les art. 4. 5. dans le dernier desquels on


Fig. 212.
Fig. 213.
Fig. 214.
Fig. 215.
Fig. 216.
Fig. 217.
Fig. 218.
Fig. 219.

la voit rendue telle par le moyen des impressions ou forces composées, employées en tout ceci.

Au reste on ne remarque ici ces défauts de la démonstration ordinaire des poids soûtenus sur des plans inclinez, faite par le moyen des Leviers, que pour empêcher qu'on ne s'y méprenne davantage. On les avoit omis en 1687. dans le Projet de ceci, parce qu'on croyoit qu'il les découvriroit assez ; mais l'usage qu'on a fait depuis de cette démonstration sans la corriger, faisant voir que tous ceux qui se mêlent de Mécanique, ne les ont pas encore apperçûs, on croit leur faire plaisir de les leur faire remarquer ici.

THEOREME XXVII.

Un poids quelconque EOF étant soûtenu sur une surface aussi quelconque SV par telle puissance R qu'on voudra : quelles que soient les directions AC, AR, de ce poids & de cette puissance, si du concours A de ces directions l'on mene AD perpendiculaire en O à cette surface SV, & que sur cette ligne AD de longueur quelconque (comme diagonale) on fasse un parallelogramme BACD, qui ait ses côtez AB, AC, sur les mêmes directions AR, AC, de la puissance R & du poids EOF ; si de plus de l'extrêmité D de la diagonale AD on mene DM perpendiculaire en M à la direction AC du poids EOF ; je dis que la resistance verticale suivant MA de la surface SV au poids EOF de direction AC directement contraire à celle de cette resistance, sera à l'effort vertical de la puissance R directement pour ou contre ce poids : : AM. AC. Fig. 220. 221. 222.

DEMONSTRATION.

Supposant ici, comme dans la part. 1. du précedent Th. 26. par la raison rapportée dans son Scholie, que AO est la seule perpendiculaire qu'on puisse mener du point A à la surface SV, cette part. 1. du Th. 26. fait voir que cette perpendiculaire AO doit passer ici par la base du poids EOF supposé en équilibre avec la puissance R sur la surface SV ; & qu'ainsi c'est non seulement

(*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) ſur le point O de cette ſurface que ſe fait ici cet équilibre; mais encore la charge (*Déf.* 17.) ou la reſiſtance directe de ce point ou de cette ſurface SV ſuivant AD ou DA, y eſt à ce poids EOF & à cette puiſſance R, comme la diagonale AD du parallelogramme BACD eſt à chacun de ſes côtez AC, AB, correſpondans ſur leurs directions.

Or ſi, après avoir mené BN perpendiculaire en N à AC prolongée de ce côté-là, l'on appelle D cette reſiſtance directe ou totale ſuivant DA, de la ſurface SV; M, ce qu'elle en fait (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) de verticale de M vers A directement à contre-ſens de la peſanteur du poids EOF; N, l'effort vertical ſuivant AN que la puiſſance R fait de même (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) directement pour ou contre cette peſanteur.

La part. 2. du Lem. 3. donnera ici M. D : : AM. AD. Et R. N : : AB. AN. Donc ayant déja (*Th.* 26. *part.* 1.) D. R : : AD. AB. l'on aura ici

M. D : : AM. AD.
D. R : : AD. AB.
R. N : : AB. AN.
} Donc auſſi (en multipliant par ordre) M. N : : AM. AN.

Mais les parallelogrammes BACD, BNMD, rendant CD = AB, & CD. AB : : MC. AN. rendent auſſi MC = AN. Donc enfin M. N : : AM. MC. c'eſt-à-dire, ſuivant les noms précedens, que la reſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV au poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre ce poids : : AM. MC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Au lieu * de la ſurface SV imaginons pour un moment une puiſſance P, qui avec une corde FP, dirigée ſuivant DA prolongée de ce côté-là, ſoûtienne avec la puiſſance R le poids EOF, preſentement ſoûtenu avec des cordes

ſeulement. On voit dans la ſeconde démonſtration de la part. 1. du précedent Th. 26. que la puiſſance P ainſi dirigée ſuivant DA ou OA perpendiculaire en O à la ſurface SV, doit comme cette ſurface, & d'une force égale à la reſiſtance de cette même ſurface, tant ſuivant DP, que ſuivant CA, ſoûtenir le poids EOF avec la puiſſance R.

Or ſi du point B l'on mene parallelement à AP la droite BQ, qui rencontre CA prolongée en Q, duquel point Q ſoit la droite QX parallele auſſi à AR; & que du point X ou QX rencontre AP, l'on mene XL perpendiculaire en L à la diagonale AQ du parallelogramme ABQX; le Th. 2. fait voir que l'effort vertical ſuivant AL de la puiſſance P doit être ici au vertical de la puiſſance R ſuivant AN : : AL. AN. Donc auſſi en reſtituant la ſurface SV au lieu de la puiſſance P, la reſiſtance verticale de cette ſurface ſuivant MA directement contre la peſanteur du poids EOF, doit être ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre la peſanteur de ce poids : : AL. AN.

Mais les parallelogrammes BAXQ, BDAQ, BACD, donnant AX=BQ=AD, AB=CD, & les triangles (*conſtr.*) ſemblables ALX, AMD, & ANB, CMD, donnant AL. AM : : AX. AD. Et AN. MC : : AB. CD. l'on aura ici AL=AM, & AN=MC. Donc enfin la reſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA directement contre la peſanteur du poids EOF, eſt ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN directement pour ou contre la peſanteur de ce poids : : AM. MC. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si l'on prolonge RA, DM, juſqu'à leur rencontre en Z, le paralleliſme ſuppoſé entre RA, DC, rendant les triangles CMD, AMZ, ſemblables entr'eux, l'on aura AM. MC : : ZM. MD. Donc auſſi la reſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA directement contre la pe-

ſanteur du poids EOF, ſera ici à l'effort vertical de la puiſſance R ſuivant AN pour ou contre cette peſanteur : : ZM. MD. c'eſt-à-dire (en prenant AM pour rayon) comme la tangente de l'angle MAZ ou RAN, eſt à la tangente de l'angle MAD.

COROLLAIRE II.

Fig. 221. Les parties du poids EOF ou de ſa peſanteur, ſoûtenues dans la Fig. 221. par la puiſſance R, & par la ſurface SV, étant égales (*Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) aux reſiſtances N, M, directement contraires & en équilibre avec ces parties de peſanteur, que la puiſſance R & la ſurface SV font à ces mêmes parties de peſanteur ſuivant leur direction.

1°. Il ſuit encore du préſent Th. 27. que la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoûtenue par la ſurface SV, eſt à ce que la puiſſance R en ſoûtient : : AM. MC.

2°. Il ſuit de même du Corol. 1. que ces mêmes parties de la peſanteur du poids EOF, ſont auſſi entr'elles comme les tangentes ZM, MD, des angles RAN, MAD, en prenant AM pour le rayon.

COROLLAIRE III.

Fig. 221. Puiſque (*Cor.* 1.) la partie de EOF, ſoûtenue par la ſurface SV eſt toûjours à ce que la puiſſance R en ſoûtient dans la Fig. 218. comme ZM eſt à MD; ces deux parties de peſanteur du poids EOF ne peuvent être entr'elles comme AM eſt à MD, que dans le cas de ZM=AM, c'eſt-à-dire (l'angle M du triangle AMZ étant ſuppoſé droit) ſeulement lorſque l'angle ZAM, ou ſon égal RAN, eſt de 45 degrez. Donc le cas ordinaire de AC parallele à HK, lequel rendant les triangles DMA, HKG, ſemblables entr'eux, rend AM. MD : : GK. KH. la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoûtenue par la ſurface SV, ne peut être à ce que la puiſſance R en ſoûtient : : GK. KH. que lorſque l'angle RAN eſt de 45. degrez. Or en ajoûtant à la précedente hypotheſe de AC parallele

à

à HK, celle de AR auſſi parallele à GH, qui rend l'angle RAO ou RAD droit ; l'angle RAN ne peut être de 45 degrez que lorſque l'angle DAM ou ſon égal HGK eſt de même valeur. Donc dans la ſuppoſition ordinaire de AC parallele à HK, & de AR parallele à HG, la partie de la peſanteur du poids EOF, ſoûtenue par la ſurface SV, ne peut être à ce que la puiſſance R en ſoûtient : : GK. KH. que lorſque l'angle HGK d'inclinaiſon du plan HG ſur l'horiſontal GK, eſt de 45 degrez : auquel cas ces deux parties de peſanteur du poids EOF ſeroient égales entr'elles, puiſqu'on auroit alors GK=KH.

COROLLAIRE IV.

Ce ſeroit donc une mépriſe que de dire en general dans la ſuppoſition ordinaire de AC parallele à HK, & de AR parallele à GH (comme a fait un Auteur de ce tems-ci, en appellant GK l'inclinaiſon du plan GH) que *lorſqu'on tire une Sphere le long d'un plan* (il veut dire, lorſqu'on la ſoutient ſur un plan) *par une ligne parallele à ce plan, ce qui porte de cette Sphere ſur le plan, eſt à ce qu'il ne porte pas, comme l'inclinaiſon du plan eſt à ſa hauteur.* C'eſt-à-dire (ainſi que cet Auteur s'explique dans la démonſtration de cette prop. 26. de ſa Mécanique) *ce que porte le plan HG, eſt à ce qu'il ne porte pas de cette Sphere, comme GK eſt à KH.* Ce ſeroit-là, dis-je, une mépriſe ; puiſque (*Cor.* 3.) cette propoſition n'eſt vraye que dans le cas où l'angle HKG du plan HG ſur l'horiſontal GH, ſeroit de 45 degrez, & fauſſe dans tous les autres.

COROLLAIRE V.

Pour rendre cette propoſition generalement vraye dans toute l'étendue que l'Auteur lui donne, au lieu de dire que lorſqu'un poids eſt ſoutenu ſur un plan incliné par une puiſſance d'une direction parallele à ce plan, la partie de ce poids ou de ſa peſanteur, ſoutenue par ce plan, eſt à ce que la puiſſance en ſoûtient, *comme GK eſt à HK,*

il devoit dire, *comme le quarré de GK est au quarré de HK.* Car dans son hypothese non seulement de AC parallele à HK, mais encore de AR parallele à GH, & consequemment aussi (à cause du parallelogramme ABDC) de DC parallele à GH, l'angle droit GOD rendant pareillement l'angle ADC droit, de même que le sont (*Hyp.*) les angles en M ; l'on aura ici AM. MC : : $\overline{AM}^2$. $\overline{MD}^2$. (la presente hypothese rendant les triangles ADC, GHK, semblables entr'eux) : : $\overline{GK}^2$. $\overline{HK}^2$. Or le present Th. 27. fait voir en general que la partie du poids EOF ou de sa pesanteur, soûtenue par la surface quelconque SV, est à ce que la puissance R en soûtient : : AM. MC. Donc aussi la premiere de ces deux parties du poids EOF ou de sa pesanteur, est ici à la seconde : : $\overline{GK}^2$. $\overline{HK}^2$. & non pas : : GK. HK. ainsi que l'Auteur en question l'avance dans la prop. 26. qu'on vient de rapporter de sa Mécanique dans le précedent Corol. 4.

Cet Auteur est le même que nous avons déja trouvé en notre chemin dans le nomb. 3. du Corol. 56. du précedent Th. 26. la prop. 27. de sa Mécanique, qu'il opposoit au sentiment ordinaire établi dans ce nomb. 3. n'étant qu'une suite de sa prop. 26. qu'on voit (Corol. 4.) *être fausse, doit l'etre aussi, & sans force contre ce nomb. 3. du Corol. 56. de notre Th. 26. La méprise de cet Auteur vient des Lemmes équivoques ou mal démontrez, qui l'ont jetté dans l'erreur dans presque tout ce qu'il a dit des poids soûtenus. Il l'auroit vû sans peine avant sa mort, s'il eût bien voulu examiner tout cela par la voye des mouvemens composez, qu'il adopta, lorsque le Projet de ceci parut, long-tems après sa Mécanique imprimée, sans voir que cette voye lui étoit contraire, & qu'elle conduit (comme l'on vient de voir) à des sentimens tout contraires à ceux que nous venons de rapporter de lui.*

COROLLAIRE VI.

Fig. 221. Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel l'effort ou la ré-

ſiſtance verticale ſuivant AN de la puiſſance R, & la réſiſtance verticale ſuivant MA de la ſurface SV, ſont l'une & l'autre directement contraires à la peſanteur ſuivant AM du poids EOF ; cette peſanteur en ce cas d'équilibre doit être (*Ax.* 4.) égale à la ſomme de ces deux réſiſtances verticales employées à la ſoûtenir ſuivant une direction commune directement contraire à la ſienne : de ſorte que ſi l'on appelle A la peſanteur du poids EOF ; N, l'effort vertical ſuivant AN de la puiſſance R ; & M, la réſiſtance verticale de la ſurface SV ſuivant MA ; l'on aura ici $A = M + N$ (le preſent Th. 26. donnant $AM. MC :: M. N. = \frac{M \times MC.}{AM}$) $= M + \frac{M \times MC}{AM} = \frac{M \times AC}{AM}$; & conſequemment auſſi $M = A - N = A - \frac{M \times MC}{AM} = \frac{A \times AM.}{AC}$

Donc en ce cas de la puiſſance R contraire à la peſanteur du poids EOF, la ſurface SV ne ſoûtiendra de cette peſanteur (A) que l'excès dont cette même peſanteur en ſurpaſſeroit une autre à qui la réſiſtance verticale (M) de cette ſurface ſeroit : : AM. MC. ou (ce qui revient au même) la ſurface SV ne ſoûtiendra ici de la peſanteur du poids EOF, qu'une partie à qui cette peſanteur (A) ſeroit : : AC. AM.

COROLLAIRE VII.

Les réſiſtances verticales M, N, de la ſurface SV & de la puiſſance R, à la peſanteur (A) du poids EOF dans ce cas de la Fig. 221. étant (*Hyp.*) l'une & l'autre directement oppoſées à cette peſanteur, & toutes deux enſemble en équilibre avec elle ; l'ax. 4. fait voir non ſeulement que leur ſomme $M + N$ doit être égale à cette peſanteur entiere A, mais encore que chacune de ces deux réſiſtances verticales M, N, doit égaler ce qu'elle ſoûtient de cette peſanteur. Donc la ſomme des deux parties de cette peſanteur A, ſoûtenues chacune par chacune

des résistances verticales M, N, dans ce cas de la Fig. 221. y doit être égale à cette pesanteur entiere (A) du poids EOF.

COROLLAIRE VIII.

Fig. 220. Telles sont (*Corol.* 6. 7.) les parties de la pesanteur du poids EOF, que la surface SV & la puissance R soûtiennent chacune pour leur part dans le cas de la Fig. 221. où la puissance R tire obliquement de bas en haut.

Quant à celui de la Fig. 220. où cette puissance R tire obliquement de haut en bas, non seulement cette puissance ne porte rien de la pesanteur du poids EOF; mais au contraire se joint contre la résistance verticale de la surface SV; cette résistance verticale suivant MA, ayant ainsi à soûtenir à la fois les deux efforts verticaux du poids EOF & de la puissance R, réunis contr'elle suivant une direction AM, directement contraire à la sienne, doit seule (*Ax.* 4.) être égale à la somme de ces deux efforts entiers: de sorte que suivant les noms du précedent Corol. 7. l'on aura ici $M = A + N$ (le present Th. 27. donnant $AM . MC :: M . N = \frac{M \times MC}{AM}$) $= A + \frac{M \times MC}{AM}$. Donc en ce cas de la puissance R agissante en faveur du poids EOF, la surface SV soûtiendra seule la pesanteur entiere (A) de ce poids augmentée, d'une force à qui la résistance verticale (M) de cette surface seroit :: AM. MC.

COROLLAIRE IX.

Fig. 222. Dans le cas de la Fig. 222. dans lequel la puissance R n'agit ni pour ni contre la pesanteur du poids EOF, ayant (*Hyp.*) sa direction AR perpendiculaire à celle AC de ce poids; la résistance verticale suivant MA de la surface SV, directement contraire à celle AM de ce même poids, n'ayant ici que la pesanteur de ce poids à soûtenir, doit (*Ax.* 4.) être précisément égale à cette pesan-

teur : de sorte que suivant les noms précedens des Corol. 7. 8. l'on doit avoir ici précisément M=A.

Cela suit aussi des égalitez A=M+N, M=A+N, trouvées dans ces deux Corol. 7. 8. pour les cas de la puissance R agissante contre ou en faveur du poids EOF, parce qu'elle a son effort vertical N=o dans ce cas-ci, où elle n'agit ni pour ni contre ce poids.

Donc la surface SV soûtiendra encore ici seule la pesanteur entiere de ce poids EOF, mais rien davantage, en vertu de son effort vertical suivant MA.

COROLLAIRE X.

Les noms demeurant encore les mêmes que dans la démonstr. 1. du present Th. 27. & que dans son Corol. 6. sçavoir, D= à la charge suivant AO ou AD de la surface SV, M= à la résistance verticale de M vers A de cette surface ou de son point O, N= à l'effort vertical de A vers N de sa puissance R, & A= à la pesanteur entiere du poids EOF, soûtenu (*Hyp.*) en O par cette puissance R sur cette surface SV ; ce present Th. 27. donnant M. N :: AM. MC. donnera aussi M. M±N :: AM. AM±MC :: AM. AC. La Fig. 221. ayant AM+MC=AC, la Fig. 220. ayant AM−MC=AC. & la Fig. 222. ayant AM ± MC=AM=AC. Donc on aura aussi (en raison ordonnée) N. M±N :: MC. AC. Or (*Ax.* 4.) M+N=A dans la Fig. 221. M−N=A dans la Fig. 220. & M±N=A dans la Fig. 222. Donc en general M. A :: AM. AC. Et N. A :: MC. AC. Or *Lem.* 3. *part.* 2.) D. M :: AD. AM. & R. N :: AB. AN. Donc (en raison ordonnée) D. A :: AD. AC. Et R. A :: AB. AC. ou A. R :: AC. AB. Et par consequent aussi (en raison ordonnée) D. R :: AD. AB. c'est-à-dire, qu'en ce cas d'équilibre de la puissance R & du poids EOF soûtenu par elle sur la surface SV, cette puissance R, & la pesanteur (A) de ce poids EOF, seront toûjours entr'elles comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BACD dont ces côtez seroient sur les directions quelconques de cette puissance & de ce poids, FIG. 220. 221. 222.

& dont la diagonale AD seroit perpendiculaire à cette surface SV ; & qu'en ce même cas d'équilibre la charge (D) résultante du concours d'action de cette puissance R & de la pesanteur (A) de ce poids EOF, sera aussi toûjours à chacune de ces deux forces comme cette diagonale AD du parallelogramme BACD à chacun de ses côtez AB, AC, correspondans sur leurs directions, ainsi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du Th. 25.

COROLLAIRE XI.

Fig. 221. Dans le cas de la Fig. 221. dans lequel (*Corol.* 6. 7.) la puissance R & la surface SV portent chacune une partie de la pesanteur du poids EOF ; puisque la partie qui en est soûtenue par cette puissance R sur cette surface, y est (*Corol.* 2. *nomb.* 1.) à l'autre partie soûtenue par cette même surface :: MC. AM. & que la premiere MC de ces deux lignes augmente, & que l'autre AM diminue à mesure que l'angle RAN devient plus petit depuis sa position perpendiculaire de AR sur AD, jusqu'à rendre MC=AC, & AM=0, lorsque AR se trouvera sur AN : la partie du poids EOF soûtenue ici par la puissance R, doit toûjours aussi augmenter, & l'autre partie soûtenue par la surface SV toûjours diminuer, à mesure que cet angle RAN devient plus aigu ; la premiere jusqu'à devenir égale au poids entier, & la seconde jusqu'à devenir nulle ou zero, lorsque AR se trouve sur AN par l'extinction de l'angle RAN ; ce qui revient en ceci au nomb. 1. du Corol, 15. du Th. 26.

COROLLAIRE XII.

Fig. 220. Dans le cas de la Fig. 220. dans lequel (*Corol.* 8.) la puissance R ne porte rien du poids EOF, & où la résistance verticale de la surface SV soûtient seule la pesanteur entiere de ce poids augmentée même de l'effort vertical que la puissance R fait ici de haut en bas ; puisque

ce cas donne toûjours (*Corol.* 8.) $M = A + N = A + \frac{M \times MC}{AM} = \frac{A \times AM}{AM - MC} = \frac{A \times AM}{AC}$, ſuivant les noms employez dans le Corol. 8. & que AM augmente à meſure que l'angle RAD de droit devient plus aigu, juſqu'à devenir infinie, lorſque AR ſe trouve ſur AD, ſans aucun changement de la part de $\frac{A}{AC}$: la réſiſtance verticale M de la ſurface SV doit ici augmenter à l'infini à meſure que cet angle RAD diminue ainſi, juſqu'à devenir effectivement infini, lorſque AR arrivera ſur AD ; & ceci parce que la puiſſance R (*Th.* 26. *Corol.* 19. *nomb.* 2.) alors infinie, aura pour lors AN pareillement infinie, laquelle AN, ſuivant le preſent Th. 27. exprime l'effort vertical de la ſurface SV.

SCHOLIE.

N'ayant eu deſſein dans ce Théoreme-ci que de chercher ce qu'une puiſſance, & la ſurface ſur laquelle elle ſoûtient un poids, portent chacune de la peſanteur de ce poids, nous n'y avons fait attention que de ce que la force de cette puiſſance, & la réſiſtance de cette ſurface, en ont de verticales, ſans rien dire de ce qu'elles en ont (*Déf.* 17.) d'horiſontales, leſquelles ne ſont ni pour ni contre la peſanteur de ce poids, mais ſeulement l'empêchent d'aller horiſontalement d'aucun côté, ainſi qu'on l'a vû dans l'article 2. du Schol. du Th. 2. touchant les poids ſoûtenus avec des cordes ſeulement.

En effet, ſi, en appellant encore D la réſiſtance de la ſurface SV de O vers A ſuivant DA ; l'on appelle preſentement M la réſiſtance de D vers M ſuivant l'horiſontale DM ; & N, l'effort ou la réſiſtance de la puiſſance R de N vers B ſuivant l'horiſontale NB : le poids EOF ſe trouvera pouſſé tout à la fois ſuivant ces deux impreſſions horiſontales M, N ; directement oppoſées l'une à l'autre.

Or la part. 2. du Lem. . fait voir que M. D :: MD. AD. Et R. N :: AB. NB. De sorte qu'ayant déja (*part.* 1. *du Th.* 26. *& Corol.* 20. *de celui-ci*) D. R :: AD. AB.

L'on aura ici { M. D :: MD. AD. / D. R :: AD. AB. / R. N :: AB. NB.

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura pareillement ici M. N :: MD. NB. Par consequent la construction y donnant MD=NB, l'on aura aussi les résistances horisontales M, N, égales entr'elles, lesquelles étant directement opposées l'une à l'autre, empêchent consequemment (*Ax.* 3.) le poids EOF de se mouvoir horisontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit ici faire voir.*

Le Scholie du Th. 2. fait voir encore la même chose en substituant, comme dans la démonstr. 2. du present Th. 27. la puissance P au lieu de la surface SV. Car toutes choses demeurant ici les mêmes que dans cette démonstr. 2. ce Scholie du Th. 2. faisant voir que les efforts ou les résistances des puissances P, R, suivant les horisontales LX, NB, empêchent le poids EOF de se mouvoir horisontalement d'aucun de leurs côtez; la résistance de la surface SV suivant l'horisontale MD en même sens que l'horisontale de la puissance P, & égale à elle, doit aussi (en sa place) avec l'horisontale, suivant NB de la puissance R, empêcher le poids EOF de se mouvoir horisontalement d'aucun côté. *Ce qu'il falloit encore faire ainsi voir.*

Tel est l'usage de ces résistances horisontales de la surface SV & de la puissance R, l'une contre l'autre suivant DM, NB, pour empêcher le poids EOF de se mouvoir horisontalement d'aucun côté, pendant que leurs résistances verticales suivant MA, AN, l'empêchent de se mouvoir verticalement de la maniere qu'on le vient de voir dans le present Th. 27. & dans ses Corollaires.

Au reste la démonstration 2. de ce Théoreme-ci fait voir tant d'affinité

d'affinité ou de ressemblance entre lui & le Th. 2. que tout ce qu'on a dit là des poids soûtenus avec des cordes seulement, s'appliquera sans peine aux poids soûtenus sur des surfaces, & reciproquement. Nous ne nous arrêterons donc pas ici davantage.

THEOREME XXVIII.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans les part. 1. 2. du Th. 27. c'est-à-dire, la puissance R & le poids EOF de directions quelconques étant encore ici en équilibre entr'eux sur la surface aussi quelconque SV, &c. je dis que la charge qui en résulte à cette surface suivant sa perpendiculaire AD par la base du poids EOF, est toûjours à ce qu'il en résulte perpendiculairement aussi à chacune des surfaces horisontale GK, & verticale KH, qui soûtiennent celle-là, comme l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à chacun de ses deux autres côtez GK, KH. FIG. 220. 221. 222.

DEMONSTRATION.

Sur la diagonale AD du parallelogramme BACD, prolongée du côté de D, ayant pris depuis O de ce côté-là une partie quelconque, Oβ terminée ici (si l'on veut) au plan horisontal GK, soit un parallelogramme rectangle TOYβ, dont cette partie Oβ soit la diagonale, & dont les côtez OT, OY, soient paralleles à la hauteur HK, & à la base KG du plan HG touchant la surface SV au point O, auquel la diagonale AD du parallelogramme BACD rencontre (*Th. 26. part. 1.*) perpendiculairement cette surface par la base du poids EOF, soûtenu (*Hyp.*) sur elle par la puissance R.

Cela posé, l'effort résultant (*Th. 26. part. 1.*) du concours d'action de cette puissance R, & du poids EOF sur le point O de cette surface SV, suivant AD ou Oβ, étant le même (*Lem. 3. Corol. 6.*) que s'il résultoit du concours de deux forces dirigées suivant OT, OY, lesquelles fussent à cet effort commun suivant Oβ, comme ces côtez OT, OY, sont à cette diagonale Oβ du parallelogramme

TOYβ ; cet effort commun suivant Oβ sur la surface SV, doit être à ce qu'il lui en résulte en son point O suivant OT perpendiculaire (*Hyp.*) à GK, & suivant OY perpendiculaire aussi (*Hyp.*) à KH, c'est-à-dire, à ce qu'il en résulte perpendiculairement sur ou contre ces deux autres surfaces GK, KH, comme la diagonale Oβ de ce parallelogramme rectangle TOYβ, est à ses mêmes côtez OT, OY. Or à cause de AD ou Oβ perpendiculaire (*Th.* 26. *part.* 1. 2.) à la surface SV ou à son plan touchant HG en O, & de OT, OY, paralleles aux deux autres côtez HK, KG, du triangle rectangle HKG, le triangle βTO lui sera semblable, & consequemment aura ses côtez Oβ, OT, OY, en même raison que HG, GK, HK. Donc aussi l'effort commun de la puissance R & du poids EOF suivant AD sur la surface SV, doit être à ce qu'ils en font ensemble sur les surfaces KG, HK, suivant OT, OY, c'est-à-dire (*Déf.* 27.) que la charge de la surface SV doit être aux charges de ces deux-ci, comme l'hypothenuse HG du triangle rectangle HKG est à ses deux autres côtez GK, KH, quelles que soient les directions AR, AC, de la puissance R & du poids EOF, du concours desquels en équilibre (*Hyp.*) sur la surface SV, ces trois charges ou pressions résultent à cette surface SV & aux deux autres GK, KH, suivant leurs perpendiculaires Oβ, OT, OY : de sorte qu'en appellant O la charge ou la pression de la surface inclinée quelconque SV ; T, celle de la surface horisontale GK ; & Y, celle de la surface verticale KH ; l'on aura toûjours ces trois charges ou pressions perpendiculaires O, T, Y, en raison des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HKG. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Donc, 1°. l'on aura O. T : : HG. GK. c'est-à-dire, que la force commune (O), avec laquelle la puissance R & le poids EOF pressent ensemble la surface SV suivant la perpendiculaire Oβ ou AD, est toûjours à celle (T) dont

ils pressent ensemble perpendiculairement aussi suivant OT la surface horisontale GK, ou l'horison qui la soûtient, comme l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à sa base horisontale GK.

2°. L'on aura pareillement O. Y :: HG. KH. c'est-à-dire, que la même pression (O) de la surface SV suivant sa perpendiculaire AD ou Oß, est aussi toûjours à la pression ou pulsion (Y) de la surface verticale HK suivant sa perpendiculaire OY, ou à ce qui la soûtient contre cet effort horisontal, comme la même hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à sa hauteur HK.

3°. L'on aura enfin T. Y :: GK. KH. c'est-à-dire, que la pression ou la pulsion (T) de la surface horisontale GK ou de l'horison qui la soûtient, suivant sa perpendiculaire OT, est toûjours à la pression ou pulsion (Y) de la surface verticale HK suivant sa perpendiculaire OY, ou de ce qui la soûtient contre cet effort horisontal, comme la base horisontale GK du même triangle rectangle HKG est à sa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE II.

De-là & des part. 1. 2. du Th. 26. qui font voir que la puissance R & le poids EOF en équilibre (*Hyp.*) entr'eux sur la surface SV, sont toûjours à la charge ou à la pression (O) résultante de leur concours d'action sur cette surface suivant sa perpendiculaire AD ou Oß, comme les côtez AB, AC, pris sur leurs directions, sont chacun à la diagonale AD du parallelogramme BACD ; l'on aura, les noms précedens demeurant toûjours les mêmes, & quelles que soient les directions de la puissance R & du poids EOF,

1°. L'on aura (dis-je) R. O :: AB. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. T :: HG. GK. Donc (en multipliant par ordre) R. T :: AB×HG. AD×GK. c'est-à-dire, que la puissance R est toûjours à la force (T), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface horisontale GK ou l'horison qui la soûtient, en rai-

son composée de celle du côté AB du parallelogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG à sa base horisontale GK.

2°. L'on aura aussi EOF. O : : AC. AD. Et encore (*Corol.* 1. *nomb.* 1.) O. T : : HG. GK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. T : : AC×HG. AD×GK. c'est-à-dire, que le poids EOF est toûjours à la force (T), dont lui & la puissance R pressent ensemble perpendiculairement la surface horisontale GK ou l'horison qui la soûtient, en raison composée de celle du côté AC du parallelogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG à sa base horisontale GK.

3°. L'on aura pareillement R. O : : AB. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. Y : : HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) R. Y : : AB×HG. AD×HK. c'est-à-dire, que la puissance R est toûjours à la force (Y), dont elle & le poids EOF pressent ou poussent ensemble perpendiculairement sa surface verticale HK ou ce qui la soûtient, en raison composée de celle du côté AB du parallelogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG à sa hauteur verticale HK.

4°. L'on aura enfin EOF. O : : AC. AD. Et (*Corol.* 1. *nomb.* 2.) O. Y : : HG. HK. Donc (en multipliant par ordre) EOF. Y : : AC×HG. AD×HK. c'est-à-dire, que le poids EOF ou sa pesanteur est toûjours à la force (Y), dont lui & la puissance R pressent ensemble perpendiculairement la surface verticale HG ou ce qui la soûtient, en raison composée de celle du côté AC du parallelogramme BACD à sa diagonale AD, & de celle de l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG à sa hauteur verticale HK.

COROLLAIRE III.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que la dire-

ction AC du poids EOF soit parallele à la hauteur verticale HK du triangle rectangle HKG : cette hypothese & celle des angles K, M, des triangles HKG, DMA, supposez droits, rendant ensemble ces deux triangles semblables entr'eux ; le present Th. 28. qui donne en general les charges O, T, Y, des trois surfaces SV, GK, KH, en raison des trois côtez HG, GK, KH, du triangle rectangle HGK, donnera ici ces trois charges (perpendiculaires à ces trois surfaces, chacune à chacune) entre-elles en raison des trois côtez AD, AM, MD, du triangle DMA ; c'est-à-dire, que,

I. L'on aura ici O. T : : AD. AM. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) R. O : : AB. AD. Et EOF. O : : AC. AD. Donc en raison ordonnée,

1°. L'on aura ici R. T : : AB. AM. c'est-à-dire, que la puissance R sera ici à l'effort commun (T), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface horisontale GK, en raison de AB à AM.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. T : : AC. AM. c'est-à-dire, que le poids EOF sera ici à cet effort commun de lui & de la puissance R sur cette surface horisontale GK, en raison de AC à AM.

II. L'on aura de plus ici O. Y : : AD. MD. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) R. O : : AB. AD. Et EOF. O : : AO. AD. Donc aussi, en raison ordonnée,

1°. L'on aura ici R. Y : : AB. MD. c'est-à-dire, que la puissance R sera à l'effort commun (Y), dont elle & le poids EOF pressent ensemble perpendiculairement la surface verticale HK, en raison de AB à MD.

2°. L'on aura pareillement ici EOF. Y : : AC. MD. c'est-à-dire, que le poids EOF ou sa pesanteur, sera ici à cet effort commun de lui & de la puissance R sur cette surface verticale AK, en raison de AC à AD.

COROLLAIRE IV.

Donc (*Corol.* 3.) dans cette hypothese de AC parallele à HK, ces cinq choses : la puissance R, le poids EOF, ou

sa pesanteur, & les charges O, T, Y, résultantes du concours d'action de cette puissance & de ce poids sur les trois surfaces SV, GK, KH : ces cinq choses (dis-je) sont toûjours entr'elles en raison des cinq lignes AB, AC, AD, AM, MD.

COROLLAIRE V.

Fig. 222. Donc aussi (*Corol.* 3. 4.) en supposant de plus la direction AR de la puissance R, parallele à GK, & consequemment perpendiculaire à AC: cette hypothese ajoûtée à la précedente de AC parallele à HK, faisant tomber C en M, comme dans la Fig. 222. & rendant ainsi AC=AM, MD=CD=AB; les charges T, Y, des surfaces GK, HK, se trouveront ici égales à la pesanteur du poids EOF, & à la puissance R, chacune à chacune; sçavoir, T=EOF, & Y=R.

COROLLAIRE VI.

Fig. 221. La direction AC du poids EOF demeurant toûjours parallele à HK, si l'on suppose presentement que la direction AR de la puissance R soit parallele à HG, par exemple, dans la Fig. 221. Cette double hypothese jointe à celle de DM perpendiculaire sur AC, rendant les trois triangles ADC, AMD, DMC, rectangles semblables entr'eux; l'on aura ici CD. DM :: AC. AD :: AD. AM. Donc le parallelogramme BACD ayant AB=CD, l'on aura pareillement ici (*Cor.* 4.) R. Y :: EOF. O :: O. T. c'est-à-dire, que la puissance R sera ici à la charge (Y) du plan vertical HK en même raison que la pesanteur du poids EOF à la charge O de la surface SV, & que cette charge (O) à celle T de la surface horisontale GK.

THEOREME XXIX.

Fig. 223. 224. 225. 226. *Soient deux surfaces fixes quelconques SV, XY (droites ou courbes, il n'importe) entre lesquelles le poids qu'on y veut*

mettre, ne puisse passer, ni s'appuyer sur ou contre quelqu'autre chose que ce soit.

I. *Aucun poids EOQF ne peut demeurer en repos entre ces deux surfaces SV, XY, à moins qu'il ne soit de figure & de position telles que la direction quelconque LC de sa pesanteur ait quelque point A (dans ou hors l'étendue de ce poids, il n'importe) duquel on puisse mener a ces deux surfaces autant de perpendiculaires, une sur chacune par les bases* (Déf. 25.) *que ces surfaces touchent de ce poids.* FIG. 223. 224. 225.

II. *Au contraire lorsque de quelque point A de la direction quelconque LC de la pesanteur d'un poids aussi quelconque EOFQ, l'on peut mener deux perpendiculaires AO, AQ, aux surfaces SV, XY, par les bases de ce poids, une sur chacune; ce poids demeurera toûjours en repos entre ces deux surfaces, soûtenu par elles seules.* FIG. 223. 224. 225. 226.

III. *En ce cas de repos du poids EOQF entre deux surfaces SV, XY, soûtenu par elles seules, si sur une diagonale quelconque AC prise de A vers C sur la direction LC de la pesanteur de ce poids, l'on fait un parallelogramme ABCD, qui ait ses côtez AD, AB, sur les perpendiculaires AO, AQ, à ces surfaces SV, XY, par les bases de ce même poids; ce poids EOQF sera toûjours à chacune des charges ou des résistances de ces surfaces SV, XY, comme la diagonale AC de ce parallelogramme ABCD sera à chacun de ses côtez AD, AB, correspondans sur les perpendiculaires AO, AQ, à ces surfaces.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Il est visible que de tous les points, par exemple, O de la base où le poids EOQF touche la surface SV, l'on peut mener autant de perpendiculaires OP à cette surface SV, lesquelles rencontrent en plusieurs autres points A la direction LC de la pesanteur de ce poids: je dis donc que si de tous ces points A il n'y en a aucun duquel on puisse mener une perpendiculaire à la surface XY par l'autre base de ce poids, il ne pourra demeurer en repos sur ces deux surfaces. FIG. 223. 224. 225.

Car quelque puiſſance P qu'on imagine appliquée à ce poids EOQF au bout de la corde FP, dirigée ſuivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires OR à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids, pour le ſoûtenir ſur la ſurface XY à la place de cette autre ſurface SV, quelle que ſoit auſſi la direction de la force réſultante du concours d'action de cette puiſſance P, & de la peſanteur du poids EOQF : cette direction, qui doit toûjours (*Lem.* 2.3.) paſſer par A, ne pourra jamais être perpendiculaire à la ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce poids, ſi l'on ne lui en peut mener aucune du point A. Donc en ce cas la puiſſance P, quelle qu'elle ſoit, dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF, ou même ſeulement dirigée à volonté par celui qu'on voudra des points A, où ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la peſanteur de ce poids : en ce cas (dis-je) la puiſſance P ne pourra jamais (*Th.* 25. *Cor.* 1.) ſoûtenir ce poids EOQF ſur la ſurface XY. Donc auſſi la ſurface SV, de qui la réſiſtance eſt (*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) ſuivant ces mêmes directions perpendiculaires OP, & qui par-là ne peut ici (*ax.* 2.) que ſuppléer la puiſſance P, ne pourra jamais ſoûtenir le poids EOQF ſur la ſurface XY, ſi d'aucun des points A où ces perpendiculaires OP rencontrent la direction LC de la peſanteur de ce poids, on ne peut mener aucune perpendiculaire à la ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce même poids.

On démontrera de même que cette ſurface XY ne pourra jamais ſoûtenir le poids EOQF ſur la ſurface SV, ſi d'aucun des points A où la direction LC de la peſanteur de ce poids eſt rencontrée par les perpendiculaires QR à cette ſurface XY, menée des points ou elle touche ce même poids, l'on n'en peut mener aucune à la ſurface SV par l'autre baſe qu'elle touche de ce poids EOQF. Pour le voir on y employera une puiſſance quelconque R au bout d'une corde ER, appliquée à ce même poids ſuivant celle qu'on voudra de ces perpendiculaires QR à

XY,

XY, comme l'on en vient d'employer une quelconque P appliquée à ce même poids ſuivant une des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce même poids EOQF: un raiſonnement ſemblable à celui qui vient de faire voir qu'aucune puiſſance P dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires OP à la ſurface SV par la baſe qu'elle touche du poids EOQF, ne peut ſoûtenir ce poids ſur la ſurface XY tant que du point A où cette direction OP rencontre celle LC de la peſanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette ſurface XY par la baſe qu'elle touche de ce même poids, ſera voir de même qu'aucune puiſſance R dirigée ſuivant celle qu'on voudra des perpendiculaires QR à cette ſurface XT par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF, ne pourra jamais le ſoûtenir ſur la ſurface SV tant que du point A où cette direction QR rencontre celle LC de la peſanteur de ce poids, on ne pourra mener aucune perpendiculaire à cette ſurface SV par la baſe qu'elle touche de ce poids EOQF; & que par conſequent alors la ſurface XY, reſtituée à la place de la puiſſance R qui la ſuppléeroit, ne pourra ſoûtenir ce poids ſur l'autre ſurface SV par la même raiſon qui vient de faire voir que cette autre ſurface SV reſtituée à la place de la puiſſance P qui la ſuppléoit, ne pourra jamais en pareilles circonſtances ſoûtenir le même poids quelconque EOQF ſur la ſurface XY.

Donc ce poids quelconque, ni par conſequent aucun poids ne peut demeurer en repos entre deux ſurfaces quelconques SV, XY, deſquelles ſeules il ſoit ſoûtenu, tant qu'il ne ſera ni de figure, ni de poſition telles qu'il ait quelque point A de la direction quelconque LC de ſa peſanteur, duquel on puiſſe mener deux perpendiculaires à ces deux ſurfaces, une ſur chacune, par les baſes qu'elles touchent de ce poids quelconque EOQF. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. Au contraire ſi de quelque point A de la direction quelconque LC de la peſanteur d'un poids auſſi FIG. 223. 224. 225. 226.

quelconque EOQF, l'on peut mener deux perpendiculaires AO, AQ, aux deux ſurfaces fixes quelconques SV, XY, entre leſquelles il ſe trouve, par les baſes qu'elles touchent de ce poids ; il y demeurera toûjours en repos ſoûtenu par elles ſeules.

Car la peſanteur de ce poids EOQF, ou ſon effort (*Hyp.*) ſuivant la diagonale AC du parallelogramme ABCD, étant le même (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que s'il réſultoit du concours de deux autres efforts ſuivant les côtez AD, AB, de ce parallelogramme, à chacun deſquels efforts celui-là, ou la peſanteur du poids EOQF fût comme cette diagonale AC à chacun de ces mêmes côtez AD, AB, du même parallelogramme ABCD ; c'eſt-à-dire, le même que ſi ce corps EOQF n'avoit aucune peſanteur, & qu'il fût ſeulement pouſſé ou tiré ſuivant ces directions AD, AB, par deux forces qui fuſſent à ce qu'il a effectivement de peſanteur, comme chacun de ces côtez AD, AB, du parallelogramme ABCD, eſt à ſa diagonale AC priſe depuis A vers C ſur la direction effective LC de cette peſanteur. Or ſi chacun de ces deux côtez AD, AB, du parallelogramme ABCD, eſt perpendiculaire à chacune des ſurfaces SV, XY, en quelqu'un des points O, Q, de chacune des baſes qu'elles touchent de ce corps EOQF ; chacune de ces deux ſurfaces ſoûtiendra tout entier (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) celui de ces deux efforts lateraux qui lui ſera ainſi directement oppoſé. Donc ces deux ſurfaces enſemble ſoûtiendront ainſi toute la peſanteur de ce poids EOQF. Par conſequent en ce cas de AD, AB, menées de quelque point A que ce ſoit de la direction quelconque LC de la peſanteur de ce poids auſſi quelconque, perpendiculairement à ces deux ſurfaces encore quelconques SV, XY, en des points O, Q, des baſes qu'elles touchent de ce même poids, une à chacune ; ces deux ſurfaces fixes le ſoûtiendront toûjours ſeules en repos entr'elles. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

PART. III. En ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque EOQF entre les ſurfaces fixes quelconques

SV, XY, ſur leſquelles de quelque point A de la direction LC de ſa peſanteur, tombent (*part.* 1. 2.) les perpendiculaires AD, AB, en des points O, Q, des baſes que ces ſurfaces touchent de ce poids; ces mêmes ſurfaces SV, XY, ſoûtenant chacune (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) tout ce qu'il fait d'effort (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) ſuivant chacune de ces perpendiculaires, ſçavoir, SV en O tout ce qu'il en fait ſuivant AD, & XY en Q tout ce qu'il en fait ſuivant AB: la charge (*Déf.* 16.) ou la réſiſtance de chacune de ces deux ſurfaces doit être (*Ax.* 4. & *Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) égale à celui qu'elle ſoûtient de ces deux efforts. Or la peſanteur de ce poids EOQF dirigée (*Hyp.*) ſuivant AC, eſt (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) à chacun de ces deux efforts ſuivant AD, AB, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ces côtez AD, AB, du même parallelogramme. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids quelconque EOQF entre les ſurfaces auſſi quelconques SV, XY, ce poids eſt auſſi toûjours à chacune des charges qui en réſulte à chacune de ces deux ſurfaces, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD eſt à chacun de ſes côtez AD, AB, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces mêmes ſurfaces SV, XY, en O, Q, en paſſant par quelque point A de la direction LC de la peſanteur de ces poids, & par les baſes que ces deux ſurfaces touchent de ce même poids EOQF. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

Autrement. Pour démontrer encore d'une autre maniere cette part. 3. imaginons pour un moment ce poids quelconque EOQF comme ſoûtenu avec des cordes ſeulement par deux puiſſances P, R, appliquées à ce poids en F, E, ſuivant des directions DP, BR, menées de quelque point A de la direction LC de la peſanteur de ce poids perpendiculairement aux ſurfaces SV, XY, en des points O, Q, des baſes qu'elles touchent de ce même poids EOQF, ainſi que les part. 1. 2. font voir qu'il eſt toûjours poſſible de les mener en ce cas-ci de ce poids ſuppoſé ſoûtenu entre ces deux ſurfaces par elles ſeules.

Cela (dis-je) imaginé, les puissances P, R, soûtenant ainsi (*Hyp.*) les charges entieres des surfaces SV, XY, seront égales (*Ax.* 4. *& Lem.* 3. *Corol.* 2. *nomb.* 3.) à ces mêmes charges, chacune à chacune ; sçavoir, la puissance P égale à la charge de la surface SV, & la puissance R égale à la charge de la surface XY. Or en ce cas d'équilibre imaginé entre le poids EOQF, & ces deux puissances P, R, la part. 1. du Th. 4. fait voir que la pesanteur de ce poids seroit toûjours à chacune de ces puissances P, R, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD est à chacun de ses côtez AD, AB, correspondans sur leurs directions. Donc aussi dans l'équilibre ou le repos effectif de ce même poids EOQF entre les surfaces SV, XY, qu'on suppose seules le soûtenir ; la pesanteur de ce poids doit toûjours être à chacune des charges qui en résulte à chacune de ces deux surfaces, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD est à chacun de ses côtez AD, AB, perpendiculaires (*Hyp.*) à ces surfaces SV, XY, par quelque point A de la direction LC de la pesanteur de ce poids EOQF, & par les bases que ces surfaces touchent de ce poids. *Ce qu'il falloit encore* 3°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 226. Les part. 1. 2. font voir dans la Fig. 226. qu'un poids spherique EOQF, en quelque situation qu'on le mette entre deux surfaces quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, entre lesquelles il ne puisse passer, y demeurera toûjours en repos ; mais qu'il n'en seroit pas ainsi d'aucun autre poids de toute autre figure ; puisque la Sphere est le seul corps qui dans quelque situation qu'on le mette entre deux surfaces, ait un point A dans la direction LC de sa pesanteur, sçavoir, son centre, duquel on puisse toûjours mener deux perpendiculaires AO, AQ, à ces deux surfaces SV, XY, une sur chacune, par les points O, Q, où elles toucheroient cette Sphere. C'est peut-être pour cela que l'on ne met encore d'ordi-

naire que des poids ſpheriques entre des plans inclinez, s'il eſt vrai que l'on ait apperçû cette condition requiſe par la part. 1. pour l'équilibre ou le repos d'un poids entre deux ſurfaces.

COROLLAIRE II.

La part. 1. de ce Théoreme-ci, & le Corol. 8. du Lem. 3. font voir qu'aucun poids BQDEFP de direction LC perpendiculaire à un des plans HK, KN, par exemple, au plan KN, ne peut reſter appuyé ſur tous les deux, quelque ſituation qu'on lui donne. Car, FIG. 227. 228.

1°. La direction LC de la peſanteur de ce poids BQDEFP perpendiculaire (*Hyp.*) à KN, paſſe par la baſe BP que ce plan KN touche de ce même poids, comme dans la Fig. 227. le Corol. 8. du Lem. 3. fait voir que ce plan ſeul KN le ſoûtiendra tout entier, ſans que ce poids s'appuye en rien contre le plan HK, quoique la direction LC de la peſanteur de ce poids ait quelque point A duquel on puiſſe mener auſſi une perpendiculaire AO à ce plan HK. FIG. 227.

2°. Si cette direction LC de la peſanteur de ce poids BQDEFP ne paſſe par aucune des baſes de ce poids, ainſi que dans la Fig. 128. ce poids s'appuyera pour lors effectivement contre le plan HK; mais ſa direction LC perpendiculaire (*Hyp.*) au plan KN, n'aura aucun point d'où l'on en puiſſe mener une à ce plan par la baſe qu'il touche de ce poids. Donc (*part.* 1.) il ne pourra demeurer ainſi en repos entre ces deux plans, mais gliſſera du côté de N, juſqu'à ce qu'il touche le plan KN dans une baſe par laquelle ſa direction LC paſſe; & alors il s'arrêtera ſur cette baſe porté par ce ſeul plan KN, ſans s'appuyer plus du tout ſur l'autre plan HK, ainſi qu'on le vient de voir dans le nomb. 1. FIG. 228.

3°. Il ſuit du précedent nomb. 2. que ſi l'on prend BQ pour le profil d'une échelle appuyée en B ſur un plancher KN, & en Q contre un mur HK, ayant LC pour direction du poids total fait du ſien & de celui de l'homme qui y ſeroit monté; c'eſt-à-dire (*Déf.* 14.) pour la direction du FIG. 229.

centre de gravité G de ce poids total, ou du point G de toute son action : il suit, dis-je, du précedent nomb. 2. que le pied B de cette échelle BQ glissera toûjours vers N jusqu'à ce qu'elle soit arrivée toute entiere, & couchée le long du plancher KN, à moins qu'on n'en arrête ou fixe le pied B.

Pour le voir encore autrement, il est à considerer que le mur HK ne soûtient en Q cette échelle BQ, qu'en la repoussant vers D suivant QD perpendiculaire à ce mur, comme feroit une puissance en D par le moyen d'une corde QD attachée en Q à cette échelle BQ suivant cette direction perpendiculaire au mur HK, laquelle rencontre en L la direction LC de tout le poids fait de celui de cette échelle & de celui de l'homme dont elle est chargée. Or il est manifeste (*Ax.* 4. *& Lem.* 3. *part.* 4.) que du concours d'action de ce poids total, & de la puissance D, qui exprime la résistance du mur en Q, il en résulteroit à cette échelle BQ une impression suivant LB oblique au plancher KN. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 7.) cette échelle glisseroit alors vers N, & toûjours de même jusqu'à ce qu'elle fût arrivée toute entiere & couchée sur le plancher KN, à moins qu'elle ne fût arrêtée en B par un appui dont la charge seroit (*Th.* 21. *part.* 3. 4.) à la puissance D, ou (*Hyp.*) à la résistance en Q du mur HK, & au poids total fait de celui de l'échelle & de celui de l'homme qui la charge, comme la diagonale LB du parallelogramme BCLD seroit à ses côtez LD, LC.

Ce qu'on voit démontré dans ce nomb. 3. *M. Wallis paroît l'avoir apprehendé dans le Schol. de la prop.* 8. *part.* 3. *de sa Mécanique, en arrêtant fixement le pied d'une échelle appuyée contre un mur, en arrêtant aussi de même le bout d'un Levier chargé d'un poids vers son milieu, & appuyé obliquement par ce bout sur un plan horisontal, & par l'autre contre un appui plus élevé : sans cela, dit-il,* vectis extremum B (*c'est le bout d'en bas*) in horisontali rectâ labetur. *On verra dans le Scholie suivant pourquoi l'experience fait cependant souvent voir le contraire de cela, & consequemment aussi le contraire des précedens nomb.* 2. 3.

COROLLAIRE III.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la part. 3. cette partie fait voir qu'en cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les surfaces SV, XY, ce poids est à chacune de leurs charges résultantes de la seule action de la pesanteur de ce poids en cet état sur elles, comme la diagonale AC du parallelogramme ABCD est à chacun de ses côtez AD, AB, qui (*part.* 2.) sont perpendiculaires à ces surfaces en O, Q, c'est-à-dire (le parallelogramme ABCD rendant AB=CD) comme le côté AC du triangle ADC est à chacun de ses deux autres côtez AD, CD, ou (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le sinus de l'angle ADC est à chacun des sinus des angles ACD ou CAB, & DAC. Or (*Déf.* 9. *Corol.* 2.) le sinus de l'angle ADC est égal au sinus de l'angle DAB. Donc en ce cas d'équilibre la pesanteur du poids EOQF est à chacune des charges ou des résistances des surfaces SV, XY, comme le sinus de l'angle DAB compris entre les perpendiculaires AD, AB, à ces surfaces en O, Q, est à chacun des sinus des angles DAC, BAC, que ces perpendiculaires reciproquement prises font avec la direction LC de la pesanteur de ce poids EOQF. Fig. 223. 224. 225. 226.

La seconde démonstration de la part. 3. donne encore la même chose par le moyen du Corol. 4. du Th. 1. parce que les charges ou les résistances des surfaces SV, XY, y sont égales aux puissances P, R, qui en la place de ces surfaces soûtiendront le poids EOQF seulement avec des cordes FP, ER, dirigées suivant les perpendiculaires PO, RQ, à ces surfaces; & qu'en ce cas le Cor. 4. du Th. 1. fait voir que ce poids EOQF est à chacune de ces puissances comme le sinus de l'angle PAR est à chacun des sinus des angles RAL, PAL, c'est-à-dire (les angles opposez au sommet étant égaux entr'eux) comme le sinus de l'angle DAB est à chacun des sinus des angles BAC, DAC. Donc en ce cas d'équilibre ou de repos du poids EOQF entre les surfaces SV, XY, la pesanteur de ce poids est

encore toûjours, à chacune de leurs charges ou résistances comme le sinus de l'angle DAB est à chacun des sinus des angles BAC, DAC.

COROLLAIRE IV.

Toutes choses demeurant les mêmes, si de quelque point M du plan touchant MG de la surface XY en Q, l'on imagine MT perpendiculaire en Z à la direction LC de la pesanteur du poids EOQF, & qui rencontre en T l'autre plan touchant HG de la surface SV en O; les triangles AO*h*, TZ*h*, rectangles (*Hyp.*) en O, Z, ayant l'angle Z*h*T commun, auront l'angle OA*h*=ZT*h*; de même les triangles AQ*m*, MZ*m*, ayant l'angle Z*m*M commun, auront aussi l'angle QA*m*=ZM*m*: de sorte que l'on aura ici les angles MTG=DAC, TMG=CAB =ACD; & ainsi les triangles TMG, ADC, seront ici semblables entr'eux. Or on vient de voir dans le Corol. 3. que le poids EOQF ou sa pesanteur est ici à chacune des surfaces SV, XY, comme le côté AC du triangle ADC est à chacun de ses deux autres côtez AD, DC. Donc ce poids EOQF est aussi à chacune des charges des surfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle TGM est à chacun de ses deux autres côtez TG, MG, qui touchent ces surfaces en O, Q, quelles que soient ces mêmes surfaces, leurs inclinaisons, & la direction LC de la pesanteur du poids EOQF.

COROLLAIRE V.

Si presentement on suppose à l'ordinaire que la direction LC de ce poids EOQF soit perpendiculaire à la ligne NK des bases des surfaces SV, XY, ou de leurs plans touchans GH, MG, en O, Q; & consequemment que MT soit parallele à cette horisontale NK: cette hypothese rendra les angles HGK=MTG, MGN=TMG. Or le précedent Corol. 4. fait voir que le poids EOQF est ici à chacune des charges des surfaces SV, XY, comme le côté MT du triangle MGT est à chacun de ses deux au-

tres

tres côtez TG, MG, touchans en O, Q, de ces mêmes surfaces ; & consequemment aussi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le sinus de l'angle MGT ou MGH est à chacun des sinus des angles TMG, MTG. Donc ce même poids EOQF ou sa pesanteur est pareillement à chacune de ces charges des surfaces SV, XY, comme le sinus de l'angle MGH compris entre leurs plans touchans HG, MG, en O, Q, est à chacun des sinus des angles MGN, HGK, d'inclinaisons de ces plans, réciproquement pris, quelles que soient ces inclinaisons MGN, HGK, & quelqu'angle MGH que ces deux plans fassent entr'eux.

COROLLAIRE VI.

Si outre ce que dessus (*Corol.* 5.) on suppose que cet angle MGH soit droit, de même que le sont (*Hyp.*) les angles en K, N, cette double hypothese rendant les triangles HGK, GNM, semblables chacun au triangle MGT, le Corol. 4, donnera encore pour ce cas-ci le poids EOQF à chacune des charges des surfaces SV, XY, comme l'hypotenuse HG du triangle rectangle HKG est à sa base GK & à sa hauteur KH ; & aussi comme l'hypotenuse MG du triangle rectangle GNM est à sa hauteur MN & à sa base NG.

COROLLAIRE VII.

Quant à la comparaison entr'elles des charges ou (*Déf.* 27.) des résistances en O, Q, des surfaces quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, entre lesquelles un poids aussi quelconque EOQF de telle direction LC qu'on voudra, est soûtenu en équilibre ou en repos ; il suit presentement de la part. 3. & des Corol. 3. 4. 5. 6. qui en résultent, la construction & les hypotheses demeurant les mêmes ici que là, il suit, dis-je,

1°. De la part. 3. en general, que la charge de la surface SV est toûjours à la charge de la surface XY, comme le côté AD du parallelogramme ABCD est à son autre côté AB, ou (à cause que ce parallelogramme rend DC=AB, &

AD=BC) comme le côté AD du triangle ADC est à son côté DC, ou bien aussi comme le côté BC du triangle ABC est à son côté AB.

2°. Du Corol. 3. encore en general que la charge de la surface SV est toûjours aussi à la charge de la surface XY, comme le sinus de l'angle BAC est au sinus de l'angle DAC, c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles DAC, BAC, que les perpendiculaires AO, AQ, à ces surfaces SV, XY, font avec la direction AC de la pesanteur du poids EOQF, qu'elles soûtiennent entre-elles.

3°. Du Corol. 4. en supposant MT perpendiculaire à LC, & le reste en general, il suit que la charge de la surface SV est toûjours à la charge de la surface XY, comme le côté TG du triangle MGT est à son côté MT, c'est-à-dire, en raison des côtez de ce triangle, qui touchent ces surfaces SV, XY, aux points O, Q, où tombent perpendiculairement sur elles du point A de LC, & par les bases qu'elles touchent du poids EOQF qu'elles soûtiennent, les perpendiculaires AO, BQ.

4°. Du Corol. 5. en supposant de plus la direction LC de la pesanteur de ce poids EOQF, perpendiculaire à la ligne NK des bases des surfaces SV, XY; il suit que la charge de la premiere SV de ces deux surfaces est à la charge de la seconde XY, comme le sinus de l'angle MGN est au sinus de l'angle HGK, c'est-à-dire, en raison réciproque des sinus des angles HGK, MGN, d'inclinaison des plans AG, MG, touchans de ces surfaces en O, Q.

5°. Du Cor. 6. en supposant de plus que l'angle HGM compris entre ces plans, est droit; il suit que la charge de la surface SV est à la charge de la surface XY, comme la base GK du plan HG est à sa hauteur HK, & aussi comme la hauteur MN du plan MG est à sa base NG.

6°. Donc si de plus ces plans en angle droit HGM étoient également inclinez, c'est-à-dire, de 45 degrez chacun sur leurs bases horisontales; la base de chacun de ces deux plans se trouvant alors égale à sa hauteur,

les charges des surfaces SV, XY, seroient aussi pour lors égales entr'elles.

COROLLAIRE VIII.

Il suit encore en general de la part. 3. & des Corol. 3. 5. qui en résultent, qu'en cas d'équilibre ou de repos d'un poids quelconque EOQF de telle direction LC qu'on voudra, soûtenu entre deux surfaces aussi quelconques SV, XY, fixement inclinées à volonté, & par elles seules; la somme des charges de ces deux surfaces, résultantes de la pesanteur de ce poids, est toûjours plus grande que cette pesanteur. Car la part. 3. fait voir que cette somme de charges des surfaces SV, XY, est toûjours à cette pesanteur du poids EOQF, dont elles résultent, comme la somme des côtez AD, AB, du parallelogramme ABDC est à sa diagonale AC, c'est-à-dire (à cause de DC=AB) comme la somme des côtez AD, DC, du triangle ADC est à son troisiéme côté AC, ainsi qu'on l'a vû dans le Corol. 3. Et en supposant MT perpendiculaire à la direction quelconque LC de la pesanteur du poids EOQF, le Corol. 4. fait aussi voir que cette somme de charges des surfaces SV, XY, est toûjours pareillement à la pesanteur de ce poids, comme la somme des côtez GT, GM, du triangle MGT est à son troisiéme côté MT. Or on sçait que la somme de deux côtez quelconques d'un triangle est toûjours plus grande que son troisiéme côté. Donc aussi la somme des charges de deux surfaces quelconques SV, XY, qui seules soûtiennent entr'elles un poids quelconque EOQF de direction LC à volonté, est toûjours plus grande que la pesanteur de ce poids.

Voilà en general pour toutes sortes de poids, de figures & de directions quelconques, soûtenus entre deux surfaces quelconques fixemeut inclinées à volonté, & qui le soûtiennent seules. Voici presentement pour les seuls poids spheriques.

COROLLAIRE IX.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Cor. 5. FIG. 116.

si des points O, Q, d'attouchement de la Sphere EFQO par les surfaces quelconques SV, XY, ou par leurs plans touchans HG, MG, en ces points O, Q, l'on mene Ok, Qn, perpendiculaires en k, n, à l'horisontale NK; les charges de ces surfaces SV, XY, seront entr'elles en raison réciproque de ces perpendiculaires ou hauteurs Ok, Qn. Car les touchantes GO, GQ de cette Sphere EFQO étant égales entr'elles, si l'on en prend une pour le sinus total; l'on aura Ok pour le sinus de l'angle HGK, & Qn pour le sinus de l'angle MGN. Or (*Corol.* 7. *nomb.* 4.) la charge de la surface SV est ici à la charge de la surface XY, comme le sinus de l'angle MGN est au sinus de l'angle HGK. Donc la premiere de ces deux charges sera pareillement ici à la seconde comme Qn est à Ok; c'est-à-dire, en raison réciproque des hauteurs des plans OG, QG, s'ils n'avoient que ces longueurs égales.

COROLLAIRE X.

FIG. 230. Ce qu'on voit de la Fig. 226. dans la Fig. 230. étant le même que dans celle-là, soit de plus dans celle-ci la droite OQ rencontrée en ϖ par la direction Ah de la pesanteur de la Sphere EFQO, supposée perpendiculaire en φ à NK: il suit du précedent Corol. 9. que la charge de la surface SV est pareillement ici à la charge de la surface XY :: Qϖ. Oϖ :: $n\varphi$. $k\varphi$.

Pour le voir, soient imaginées des points d'attouchement O, Q, les droites Oμ, Qλ, perpendiculaires en μ, λ, sur Ah. Cela fait, les triangles semblables aisez ici à reconnoître, & les égalitez OG=QG, AO=AQ, résultantes de la nature de la Sphere EFQO, y donneront Qn. QG :: λm. Qm :: Qλ. AQ :: Qλ. AO. Et QG. Ok :: OG. Ok :: Oh. $k\mu$: AO. Oμ. Donc (en raison ordonnée) Qn. Ok :: Qλ. Oμ :: Qϖ. Oϖ. Or on vient de voir dans le Corol. 9. que la charge de la surface SV est ici à la charge de la surface XY :: Qn. Ok. Donc la premiere de ces deux charges est pareillement ici à la seconde :: Qϖ. Oπ :: Qλ. Oμ :: $n\varphi$. $k\varphi$. *Ce qu'il falloit faire voir.*

COROLLAIRE XI.

Il suit encore du Corol. 9. que les charges des surfaces SV, XY, sont ici entr'elles en raison renversée ou réciproque des puissances qu'il faudroit pour soûtenir chacune seule le poids spherique FEQO sur chacun de leurs points O, Q, suivant une direction parallele à chacun de leurs plans HG, MG, touchans en ces points. Car si l'on appelle M la puissance qui soûtiendroit ainsi seule ce poids EFQO sur le point Q de la surface XY; & H, celle qui le soûtiendroit de même seule sur le point O de de la surface SV; & enfin A, la pesanteur de ce poids spherique EFQO: le Théoreme 28. pour un seul plan donnera M. A :: MN. MG :: Q*n*. QG (à cause de QG = OG) :: Q*n*. OG. Et A. H :: HG. HK :: OG. O*k*. Donc (en raison ordonnée) l'on aura ici M. H :: Q*n*. O*k*. Par consequent (*Corol. 9.*) la puissance (M), qui dirigée parallelement à MG, soûtiendroit seule le poids spherique EFQO sur le point Q de la surface XY, seroit à la puissance (H) qui dirigée suivant HG, soûtiendroit de même seule ce poids sur le point O de la surface SV, comme la charge de cette surface SV est à la charge de l'autre surface XY, lorsque ces deux surfaces SV, XY, soûtiennent ensemble ce poids spherique EFQO sur leurs points O, Q, quelqu'angle HGM que fassent entr'eux les plans HG, MG, qui touchent (*Hyp.*) ces surfaces en ces points O, Q.

COROLLAIRE XII.

Cela n'est pas seulement vrai des poids spheriques de directions AC perpendiculaires à la droite NK; mais encore de toutes sortes de poids de figures & de directions AC quelconques, soûtenus entre des surfaces fixes quelconques par ces surfaces seules. Pour le voir, ce qu'il y a des Fig. 223. 224. 225. 226. dans les Fig. 231. 232. demeurant ici le même que là, soient de plus du point C de celles-ci les droites Cλ, Cμ, perpendiculaires en FIG. 231. 232.

λ, μ, sur les côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD, prolongez, s'il en est besoin.

Cela étant, & les angles de ce parallelogramme opposez en B, D, étant égaux entr'eux; les triangles rectangles CλB, CμD, seront semblables entr'eux; & par consequent Cλ. Cμ : : CB. CD : : AD. AB. Or si l'on prend encore (ainsi que dans le précedent Corol. 11.) A pour la pesanteur du poids EOQF, & M, H, pour les puissances, dont chacune dirigée parallelement à chacun des plans GM, GH, soûtiendroit seule sur lui le poids EOQF; la part. 1. du Th. 25. donnera M. A : : Cλ. AC. Et A. H : : AC. Cμ. de sorte qu'en raison ordonnée, l'on aura ici M. H : : Cλ. Cμ. Donc aussi M. H : : AD. AB. c'est-à-dire, en general (*part.* 3.) que la puissance (M), qui dirigée parallelement à MG, soûtiendroit seule le poids EOQF sur le point Q de la surface XY, seroit à la puissance (H), qui dirigée parallelement à HG, soûtiendroit de même seule le même poids sur le point O de la surface SV, comme la charge de cette seconde surface SV est à celle de la premiere XY, lorsque ces deux surfaces soûtiennent ensemble ce poids EOQF.

COROLLAIRE XIII.

FIG. 231. 232. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent Corol. 12. on a vû dans le Corol. 61. du Th. 26. que la somme M+H des puissances M, H, qui dirigée chacune à chacun des plans MG, HG, soûtiendroient chacune seule le poids EOQF sur chacun de ces plans: on a vû, dis-je, dans ce Corol. 61. du Th. 26. que cette somme M+H de puissances; peut être tantôt égale, tantôt plus grande, & tantôt moindre que la pesanteur A de ce poids EOQF. D'un autre côté le précedent Corol. 8. fait voir aussi que ce poids est toûjours moindre que la somme O+Q des charges O, Q, qui en résultent sur les surfaces SV, XY, lorsqu'elles seules le soûtiennent ensemble comme ici. D'où l'on voit déja que cette som-

me O+Q des charges de ces surfaces SV, XY, peut être plus grande que la somme M+H des puissances M, H.

Je dis presentement que cette somme O+Q de charges des surfaces SV, XY, ne peut jamais être moindre que la somme M+H des puissances M, H; mais qu'elle lui est égale, lorsque l'angle MGH est droit, & toûjours plus grande tant qu'il ne l'est pas.

Pour le voir, il n'y a qu'à considerer que puisque (*Corol.* 12.) M. H :: $C\lambda$. $C\mu$. l'on aura (en composant) M. M+H :: $C\lambda$. $C\lambda+C\mu$. Or (*Th.* 26. *part.* 1.) A. M :: AC. $C\lambda$. Donc (en raison ordonnée) A. M+H :: AC. $C\lambda+C\mu$. Or aussi en composant (*part.* 3.) O+Q. A :: AD+AB. AC. Donc (en raison ordonnée) O+Q. M+H :: AD+AB. $C\lambda+C\mu$. Or, à cause des angles ABC, ADC, toûjours égaux chacun à l'angle MGH, les lignes $C\lambda$, $C\mu$, perpendiculaires (*Hyp.*) aux côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD, donnent CB ou AD = $C\lambda$, CD ou AB = $C\mu$, lorsque l'angle MGH est droit; & consequemment alors AD+AB = $C\lambda+C\mu$: au contraire ces perpendiculaires $C\lambda$, $C\mu$, aux côtez AB, AD, du parallelogramme ABCD donnent toûjours CB ou AD > $C\lambda$, CD ou AB > $C\mu$, tant que cet angle MGH n'est pas droit; & consequemment alors AD+AB > $C\lambda+C\mu$. Donc aussi O+Q = M+H, lorsque ce même angle MGH est droit, & toûjours O+Q > M+H, tant qu'il ne l'est pas. *Ce qu'il falloit ici faire voir.*

Voyez ici la prop. 30. *pag.* 78. *de Vitalis Jordanus.*

COROLLAIRE XIV.

Puisque (*part.* 1. 2.) un poids ne peut demeurer en repos entre deux surfaces, qui seules le soûtiennent ensemble, à moins que dans la direction de sa pesanteur il n'y ait quelque point, duquel on puisse mener deux perpendiculaires à ces deux surfaces, une à chacune, par les bases qu'elles touchent de ce poids; & que ne pouvant s'échapper d'entre ces deux surfaces, elles ne laissent pourtant

pas de l'y retenir en repos, quelles qu'elles ſoient, & de quelque figure que ce poids ſoit auſſi : il réſulte de ces part. 1. 2. du preſent Th. 29. qu'en ce cas-ci ce poids quelconque y prend toûjours une ſituation (ſi on ne la lui donne , dans laquelle la direction de ſa peſanteur a toûjours quelque point, duquel on peut mener deux perpendiculaires à ces deux ſurfaces , une à chacune, par les baſes que ces ſurfaces touchent alors de ce poids.

SCHOLIE.

Fig. 230. On vient de voir dans le Corol. 10. Fig. 230. que dans l'hypotheſe de la direction A*h* du poids ſpherique EOQF, perpendiculaire à la baſe horiſontale NK commune aux plans MG, HG, d'inclinaiſons quelconques ; les forces ou puiſſances M , H, qu'il faudroit pour ſoûtenir chacune ſéparément ce poids ſur chacun de ces plans, ſuivant des directions paralleles chacune à chacun d'eux, ſeroient toûjours entr'elles en raiſon réciproque des parties Qϖ, Oϖ, dans leſquelles la direction A*h* de ce poids diviſeroit la ſoûtendante QO du cercle DKVL, par les points Q, O, où il toucheroit ces deux plans MG, HG, c'eſt-à-dire, toûjours M. H :: Oϖ. Qϖ.

Fig. 233. 234. Voici preſentement quelque choſe de ſemblable pour deux poids FQ, EO, de peſanteurs & de figures quelconques, leſquels auroient leurs directions AT, ZX, perpendiculaires à la baſe horiſontale MH commune à deux plans GM, GH, d'inclinaiſons quelconques, ſur chacun deſquels chacun de ces poids FQ, EO, ſeroit ſoûtenu par chacune des deux puiſſances égales P, R, de directions FP, ER, paralleles chacune à chacune des longueurs GM, GH, de ces deux plans. Car ſi l'on imagine un plan vertical, qui paſſant par les directions ZX, AT, des poids FQ, EO, coupe ces plans GM, GH, avec leur baſe commune MH, en des ſections qui forment le triangle MGH, dans lequel ſoit inſcrit un cercle DKVL, qui en touche les côtez ou ces ſections en K, L, D, & dont la ſoûtendante KL ſoit coupée en S par ſon diamétre DV

parallele

parallele aux directions des poids ; l'on aura toûjours FQ. EO : : LS. KS.

Pour le voir, soient des points K, L, par le centre C du cercle DKVL, les rayons KC, LC, avec les perpendiculaires KB, LN, sur son diamétre DV. Cela fait, les points d'attouchement D, K, L, rendant les angles M+DCK = KCV+DCK, & H+DCL = LCV+DCL, rendent aussi les angles M = KCV, H = LCV ; par consequent (en prenant ſ pour la marque des sinus) le Corol. 2. du Lem. 8. donnant GM. GH : : ſH. ſM. l'on aura ici GM. GH : : ſLCV. ſKCV : : LN. KB : : LS. KS. Or ce cas des puissances égales P, R, dirigées parallelement aux plans GM, GH, & des poids FQ, EO, dirigez parallelement à la verticale VD ; le nomb. 3. du Cor. 56. du Th. 26. fait voir que FQ. EO : : GM. GH. Donc aussi en ce cas le poids FQ est au poids EO : : LS. KS. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Voilà dans ce Th. 29. pour les charges résultantes de la pesanteur d'un poids quelconque perpendiculairement sur deux surfaces fixes qui le soûtiennent entr'elles. Voici presentement pour les charges résultantes de celles-là perpendiculairement aussi sur les plans des bases & des hauteurs de ces surfaces ou de leurs plans touchans aux points de leurs charges.

THEOREME XXX.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la part. 3. du précedent Th. 29. si des angles B, D, du parallelogramme ABCD l'on mene Bβ, Dδ, perpendiculaires en β, δ, sur la diagonale AC de ce parallelogramme dans les Fig. 223. 224. 225. 226. & que l'on prenne à l'ordinaire la direction AC du poids EOQF parallele aux verticales HK, MN, c'est-à-dire (Hyp.) *perpendiculaire à l'horisontale NK ;* FIG. 223. 224. 225. 226.

I. *Les charges particulieres des bases GK, GN, seront entr'elles : : Aδ. Cδ.*

II. *Les charges particulieres des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN, seront égales entr'elles.*

DEMONSTRATION.

Pour abreger le calcul, & le rendre plus intelligible; soient appellées A, la pesanteur du poids EOQF; O, Q, les charges qui en résultent perpendiculairement sur les surfaces SV, XY; V, Y, les résultantes de celles-ci perpendiculairement sur les bases particulieres GK, GN; & S, X, celles qui en résultent aussi perpendiculairement sur ou contre les hauteurs ou plans verticaux HK, MN: noms dont voici la liste pour le soulagement de la mémoire.

La pesanteur du poids EOQF,		A.
Charges qui en résultent	à la surface SV,	O.
	à sa base GK,	V.
	à sa hauteur HK,	S.
	à la surface XY,	Q.
	à sa base GN,	Y.
	à sa hauteur MN,	X.

Après cela, si l'on considere que les droites Dδ, Bβ, perpendiculaires (*Hyp.*) sur la diagonale AC du parallelogramme ABCD, rendant les triangles AβB, CδD, semblables entr'eux, rendent aussi Aβ. δC :: AB. CD :: Bβ. Dδ. on verra que Aβ=Cδ, & Bδ=Dδ; puisque ce parallelogramme ABCD rend AB=CD. Cela posé,

PART. I. La presente hypothese de AC perpendiculaire à la base totale NK, donnera (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 1.) V. A :: Aδ. AC. Et A. Y :: AC. Aβ :: AC. Cδ. Donc (en raison ordonnée) V. Y :: Aδ. Cδ. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

PART. II. La même hypothese de AC perpendiculaire sur NK, donnera aussi (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 2.) S. A :: Dδ. AC. Et A. X :: AC. Bβ :: AC. Dδ. Donc (en raison ordonnée) S. X :: AC. AC :: 1. 1. Et consequemment S=X. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE.

Puisque (*part.* 1.) V. Y : : Aδ. Cδ. l'on aura (en composant) V. V+Y : : Aδ. Aδ+Cδ : : Aδ. AC. Or (*Th.* 28. *Corol.* 3. *nomb.* 1.) A. V : : AC. Aδ. Donc (en raison ordonnée) A. V+Y : : AC. AC : : 1. 1. Et consequemment V+Y=A : c'est-à-dire, que la charge entiere (V+Y) de la base totale NK, est toûjours égale à la pesanteur (A) du poids EOQF soûtenu entre les deux surfaces SV, XY, fixement appuyées sur cette base commune, & contre les plans HK, MN, perpendiculaires (*Hyp.*) de même que AC à cette base NK.

Voici encore la même chose, mais plus generalement; sçavoir, pour toutes les directions imaginables AC de la pesanteur du poids EOQF.

THEOREME XXXI.

En general, quelle que soit la direction AC du poids EOQF, tout le reste demeurant le même que dans le précedent Th. 30. Fig. 223. 224. 225. 226.

I. *Les charges particulieres des bases GK, GN, seront entr'elles : : AD×GK×MG. AB×GN×HG.*

II. *Les charges particulieres des hauteurs ou des plans verticaux HK, MN, seront entr'elles : : AD×HK×MG. AB×MN×HG.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Les noms demeurant ici les mêmes que dans la démonstration du précedent Th. 30. l'on aura (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2. 4.) Y. A : : AD×GK. AC×GH. Et A. Y : : AC×MG. AB×NG. Donc (en multipliant par ordre) V. Y : : AD×GK×MG. GH×AB×NG. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. L'on aura aussi (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2. 4.) S. A : : AD×HK. AC×HG. Et A. X : : AC×MG. AB×MN. Donc (en multipliant par ordre) S. X : : AD×HK×MG. AB×MN×HG. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

COROLLAIRE I.

Il ſuit de la part. 1. (en compoſant) que V. V+Y :: AD×GK×MG. AD×GK×MG+GH×AB×NG. Or (*Th.* 28. *Corol.* 2. *nomb.* 2.) A. V :: AC×GH. AD×GK. Donc (en multipliant par ordre) A. V+Y :: AC×GH ×MG. AD×GK×MG+GH×AB×NG. c'eſt-à-dire, en general, quel que ſoit la direction AC du poids quelconque EOQF, ſa peſanteur (A) eſt toûjours en cette raiſon à la charge entiere (V+Y), qui de ſa preſſion ſur les ſurfaces SV, XY, réſulte au plan horiſontal NK de leurs baſes GK, GN, ou à ces deux baſes enſemble.

COROLLAIRE II.

Or ſi l'on ſuppoſe (comme dans le précedent Th. 30.) que la direction AC du poids EOQF ſoit parallele aux verticales HK, MN; les triangles (*Hyp.*) rectangles HKG, DδA, BβC, ſe trouvant alors ſemblables entr'eux, de même que les triangles (*Hyp.*) rectangles MNG, BβA, DδC; l'on aura ici AD. Aδ :: HG. GK. Et AB. Aβ :: MG. NG. D'où réſulte AD×GK=Aδ×HG, & AB×NG= Aβ×MG. Donc en ſubſtituant ces valeurs de AD×GK, AB×NG; dans la derniere analogie du précedent Cor. 1. l'on aura ici A. V+Y :: AC×GH×MG. Aδ×GH×MG +GH×Aβ×MG :: AC. Aδ+Aβ (les triangles ſemblables BβA, DδC, auſquels le parallelogramme ABCD donne AB=CD, ayant conſequemment auſſi Aβ=Cδ) :: AC. Aδ+Cδ :: AC. AC :: 1. 1. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas de la direction AC du poids EOQF, perpendiculaire à NK, la charge entiere (V+Y) de ce plan NK des baſes GK, GN, des ſurfaces SV, XY, eſt toûjours égale à la peſanteur (A) de ce poids EOQF que ces deux ſurfaces ſeules ſoûtiennent enſemble entr'elles, ainſi qu'on l'a déja vû dans le Corollaire du précedent Th. 30.

COROLLAIRE III.

Cette hypotheſe de AC perpendiculaire ſur NK, auſſi-

bien que HK, MN, en rendant les triangles HKG, DδA, ſemblables entr'eux, auſſi-bien que les triangles MNG, BβA, ne rend pas ſeulement AD×GK=Aδ×GH, & AB×NG=Aβ×MG, ainſi qu'on le vient de trouver dans le précedent Cor. 2. mais elle rend de plus AD. Dδ :: HG. HK. Et AB. Bβ :: MG. MN. D'où réſulte auſſi AD×HK=Dδ×HG, & AB×MN=Bβ×MG. Donc en ſubſtituant ces quatre valeurs de AD×GK, AB×NG, AD×HK, AB×MN, dans les part. 1. 2.

1°. La part. 1. donnera ici V. Y :: AD×GK×MG. HG×AB×NG :: Aδ×HG×MG. Aβ×HG×MG :: Aδ. Aβ (à cauſe de Aβ=Cδ) :: Aδ. Cδ. c'eſt-à-dire, que les charges particulieres (V, Y,) des baſes GK, GN, auſquelles ces charges réſultent de celles (O, Q,) des ſurfaces SV, XY, qui ſoûtiennent entr'elles le poids EOQF, doivent être ici entr'elles comme les parties correſpondantes Aδ, Cδ, de la diagonale AC du parallelogramme ABCD, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du précedent Théoreme 30.

2°. La part. 2. donnera pareillement S. X :: AD×HK×MG. AB×MN×HG :: Dδ×HG×MG. Bβ×HG×MG :: Dδ. Bβ (les triangles ſemblables BβA, DδC, auſquels le parallelogramme ABCD donne AB=CD, ayant conſequemment auſſi Dδ=Bβ) :: Dδ. Dδ :: 1. 1. c'eſt-à-dire, qu'en ce cas les charges ou impreſſions horiſontales directement contraires aux plans verticaux HK, MN, ou à leurs réſiſtances, ſeroient égales entr'elles, ainſi qu'on l'a déja vû dans la part. 2. du précedent Th. 30.

THEOREME XXXII.

Soient deux Roues, une grande quelconque CO, & une petite auſſi quelconque DO, chargées ſur leurs Eſſieux A, B, de fardeaux, qui avec les peſanteurs particulieres de ces Roues, faſſent des charges ou des poids totaux quelconques appellez K pour la grande Roue, & L pour la petite; avec leſquels poids K, L, dirigez à volonté ſuivant AK, BL, ces deux Roues Fig. 235. & ſuivantes juſqu'à 240.

soient sur le même point O d'une élevation MO de chemin MON, qu'elles ayent à surmonter; sur lequel point O elles soient retenues par l'inégalité du chemin, qui l'empêche de glisser, ainsi qu'on verra dans le Schol. art. 3. qu'il pourroit arriver, & par les puissances P, R, appliquées aux Essieux, ou aux centres A, B, de ces Roues, suivant des directions quelconques AP, BR, qui les empêchent de rouler dans le fond OM.

Cela étant, si après avoir imaginé EO, OG, paralleles à AK, BL, & qui rencontrent AP, BR, en E, G, l'on imagine aussi OF, OH, qui fassent avec AK, BL, des angles OFA = EAO, OHB = GBO : je dis que les puissances P, R, ainsi en équilibre avec les charges K, L, des Roues CO, DO, sur le point O de l'éminence à surmonter du chemin MON, seront entr'elles comme les produits K×OF×OB, L×OH×OA; c'est-à-dire, P. R :: K×OF×OB. L×OH×OA.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) OE est parallele à AK & OG parallele à BL, l'on aura ici les angles OAF = EOA, OBH = GOB. Donc ayant aussi (*Hyp.*) les angles OFA = EAO, OHB = GBO, l'on aura ici les deux triangles AFO, OAE, semblables entr'eux, & les deux autres BAO, OBG, semblables aussi entr'eux. Par consequent OF. OA :: EA. EO. Et OH. OB :: GB. GO. Donc le Corol. 7. du Th. 26. donnant ici de plus P. K :: EA EO. Et R. L :: GB. GO. l'on y aura aussi P. K :: OF. OA. Et R. L :: OH. OB. Ce qui donne $P = \frac{K \times OF}{OA}$, & $R = \frac{L \times OH}{OB}$. Donc P. R :: $\frac{K \times OF}{OA}$. $\frac{L \times OH}{OB}$ :: K×OF×OB. L×OH×OA. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 237. 238. 239. Si presentement on suppose à l'ordinaire les directions AK, BL, des poids K, L, paralleles entr'elles, & de plus les angles quelconques EAO, GBO, égaux entr'eux;

Fig. 220.

Fig. 221.

Fig. 222.

Fig. 224.

Fig. 223.

Fig. 225

cette double hypothese faisant tomber OG en OT sur EO, & OH en OS sur OF, comme dans les Fig. 237. 238. 239. l'on aura ici OF. OH : : OF. OS (à cause de AK supposée parallele à BL, qui prolongée rencontre AO en Q) : : OA. OQ. Ce qui donnant OF×OQ=OH×OA, change ici l'analogie du Théoreme en P. R : : K×OF×OB. L×OF×OQ : : K×OB. L×OQ.

COROLLAIRE II.

Si de plus on suppose les deux directions AK, BL, des poids K, L, confondues en une, comme dans la Fig. 239. cette addition d'hypothese faite à la précedente du Corol. 1. rendant Q en A, & H, S en F, donne OQ=OA, & OH ou OS=OF; ce qui change encore l'analogie generale du Théoreme en P. R : : K×OB. L×AO. de sorte que si les charges K, L, des Roues étoient en raison réciproque de leurs rayons OA, OB; les puissances P, R, seroient ici égales entr'elles. Fig. 239.

COROLLAIRE III.

Si outre les directions AK, BL, des poids KL, confondues en une, on veut presentement que les angles EAO, GBO, soient complemens l'un de l'autre à deux droits, le tout comme dans la Fig. 240. la premiere de ces deux hypotheses rendant H, F, B, sur cette direction commune AK ou BL, & la seconde rendant les angles AFO, BHO, complemens l'un de l'autre à deux droits, puisque le Théoreme suppose AFO=EAO, BHO=GBO; l'on aura ici les angles OFH, OHF, égaux entr'eux, & consequemment OH=OF. Donc l'égalité generale du Théoreme se réduira encore ici à P. R : : K×OB. L×AO. comme dans le précedent Corol. 2. ce qui fait voir comme là, que si les charges K, L, des Roues étoient en raison réciproque de leurs rayons OA, OB, les puissances P, R, seroient encore ici égales entr'elles. Fig. 240.

COROLLAIRE IV.

FIG. 242. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le Corol. 1. qui a donné P. R : : K×OB. L×OQ. si l'on y suppose de plus que OB soit sur OA, comme dans la Fig. 242. le point B y tombant en Q, l'on auroit alors OB=OQ; ce qui y réduiroit l'analogie de ce Corol. 1. à P. R : : K. L. c'est-à-dire, qu'en ce cas les puissances P, R, qui (*Hyp.*) soûtiennent les Roues CO, DO, sur le point O de la pente OM, seroient entr'elles en raison des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE V.

FIG. 235. & suivantes jusqu'à 242. Si presentement on suppose que ces charges K, L, des Roues CO, DO, c'est-à-dire, les sommes faites des pesanteurs de ces Roues, & des fardeaux qu'elles portent : si l'on suppose, dis-je, presentement que ces charges ou sommes de pesanteurs soient égales entr'elles;

1°. Cette hypothese de K=L changeroit l'analogie generale du present Th. 32. en P. R : : OF×OB. DH×OA.

FIG. 237. 238. 242. 2°. Cette hypothese de K=L, jointe à celle du Corol. 1. changeroit son analogie en P. R : : OB. OQ.

FIG. 239. 241. 3°. Cette même hypothese de K=L, jointe à celle de chacun des Corol. 2. 3. changeroit aussi chacune de leurs analogies en P. R : : OB. OA. c'est-à-dire, qu'alors les puissances P, R, seroient entr'elles en raison réciproque des rayons des Roues qu'elles soûtiennent avec leurs fardeaux.

FIG. 242. 4°. Cette même hypothese de K=L, jointe à celle du Corol. 4. y rendroit aussi P=R.

Voilà jusqu'ici pour le rapport des puissances P, R, qui soûtiennent les Roues CO, DO, sur le point O de la pente OM : voici presentement pour le rapport des charges K, L, de ces deux Roues.

COROLLAIRE VI.

FIG. 235. La multiplication des termes entr'eux de l'analogie generale

generale du present Th. 32. donnant en general $P\times L\times OH\times OA = R\times K\times OF\times OB$, l'on aura aussi en general $K. L :: P\times OH\times OA. R\times OF\times OB$. Donc, & suivantes jusqu'à 242.

1°. L'hypothese du Corol. 1. donnant $OH\times OA = OF\times OQ$, l'on y aura $K. L :: P\times OF\times OQ. R\times OF\times OB :: P\times OQ. R\times OB$. Fig. 237. 238. 242.

2°. L'hypothese du Corol. 2. rendant $OQ = OA$, l'on y aura $K. L :: P\times OA. R\times OB$. c'est-à-dire, les charges K, L, des Roues CO, DO, en raison composée de celle de leurs rayons OA, OB, & de celles des puissances P, R, qui les soûtiennent sur le point O de la pente OM. Fig. 239.

3°. L'hypothese du Corol. 3. rendant $OH = OF$, l'on y aura encore $K. L :: P\times OA. R\times OB$. comme dans le précedent nomb. 2. Fig. 240.

4°. L'hypothese du Corol. 4. rendant $OB = OQ$, outre $OA. OQ :: OF. OH$. ce qui donne $OA\times OH = OQ\times OF = OB\times OF$, change également la précedente analogie generale, & celle du nomb. 1. en $K. L :: P. R$. ainsi que dans ce Corol. 4. Fig. 242.

COROLLAIRE VII.

Si presentement on suppose les puissances P, R, égales entr'elles, c'est-à-dire, $P = R$, Fig. 235. & suivantes jusqu'à 242.

1°. L'analogie generale du précedent Corol. 6. se changera pour ici en $K. L :: OH\times OA. OF\times OB$.

2°. Celle du nomb. 1. de ce Corol. 6. se changera en $K. L :: OQ. OB$. Fig. 237. 238. 242.

3°. Celle des nomb. 2. 3. de ce Corol. 6. se changera en $K. L :: OA. OB$. c'est-à-dire, qu'alors les charges K, L, des Roues CO, DO, seront entr'elles comme les rayons de ces mêmes Roues. Fig. 239.

4°. Le nomb. 4. du même Corol. 6. donnera $K = L$. Fig. 242.

SCHOLIE.

I. Pour juger de l'avantage ou du desavantage des Roues CO, DO, de differentes grandeurs dans l'usage, supposons aux puissances P, R, qui les soûtiennent, des dire- Fig. 237. & suivantes jusqu'à 242.

ctions AP, BR, qui fassent des angles égaux PAO, RBO, avec les rayons AO, BO, sur le bout O desquels ces deux Roues sont appuyées, ainsi que dans les Fig. 237. 238. 239. 242. supposons-y de plus ces Roues chargées sur leurs Essieux A, B, de fardeaux, qui avec les pesanteurs de ces Roues leur fassent des charges égales K, L, lesquelles ayent leurs directions AK, BL, paralleles entre-elles. Cela étant,

Fig. 237. 238. 1°. Lorsque ces deux Roues CO, DO, seront inégalement élevées sur le même point O d'une pente OM; en sorte que les directions paralleles AK, BL, de leurs charges soient differentes verticales, comme dans les Fig. 237. 238. Ce cas rendant (*Cor.* 5. *nomb.* 2.) P. R :: OB. OQ. Et consequemment P > R dans la Fig. 237. qui a OB > OQ; & au contraire P < R dans la Fig. 238. qui a OB < OQ: ce cas, dis-je, fait voir que lorsque la petite Roue DO est plus avancée que la grande DO sur le point O, comme dans la Fig. 237. il faut une plus grande force (P) pour soûtenir celle-ci, que (R) pour soûtenir l'autre; & qu'au contraire il la faut moindre lorsque la petite Roue est moins avancée que la grande sur le point O, comme dans la Fig. 238.

Fig. 239. 2°. Lorsque les directions AK, BL, des charges K, L, de ces deux Roues CO, DO, inégalement avancées sur le point O, se confondent en une même verticale, comme dans la Fig. 239. Ce cas rendant (*Corol.* 5. *nomb.* 3.) P. R :: OB. OA. c'est-à-dire, les puissances P, R, entr'elles en raison réciproque des rayons OA, OB, des Roues CO, DO, qu'elles soutiennent, on voit qu'en ce cas il faut toûjours moins de force pour soûtenir la même charge avec la grande Roue CO qu'avec la petite DO.

Fig. 242. 3°. Enfin lorsque ces deux Roues sont également avancées sur le point O, en sorte que leurs rayons AO, BO, se confondent ensemble, comme dans la Fig. 242. Ce cas rendant (*Cor.* 5. *nomb.* 3.) P=R, on voit qu'alors ces puissances P, R, qui soutiendroient ces deux Roues sur le point O, seroient égales entr'elles.

II. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent art. 1. cet art. 1. faisant voir que lorsque les Roues CO, DO, sont inégalement avancées sur le point O, il peut également arriver (*art.* 1. *nomb.* 1.) qu'il faille tantôt plus & tantôt moins de force pour y soûtenir la grande Roue CO, que pour y soûtenir la petite DO, tant que les directions AK, BL, de leurs charges (*Hyp.*) égales K, L, sont des verticales differentes, comme dans les Fig. 237. 238. qu'au contraire il en faut toûjours moins (*art.* 1. *nomb.* 1.) pour y soûtenir la grande Roue CO, que pour y soûtenir la petite DO, lorsque les directions de leurs charges (*Hyp.*) égales, se confondent en une seule & même verticale, comme dans la Fig. 239. Et qu'enfin lorsque ces deux Roues sont également avancées sur ce point O, comme dans la Fig. 242. les forces P, R, requises pour les y soûtenir sont (*art.* 1. *n.* 3.) toûjours égales entr'elles : vû (dis-je) tout cela, il paroît qu'il y a un plus grand nombre de cas où il faut moins de force pour soûtenir ici la grande Roue CO sur le point O de la pente OM, que pour y soûtenir la petite Roue DO, qu'il n'y en a où la grande exige pour cela moins ou autant de force que la petite. Donc la moindre augmentation de force qu'on fasse aux puissances P, R, ici en équilibre (*Hyp.*) avec ces deux Roues de leurs charges totales (*Hyp.*) égales, suffisant pour les faire rouler de O vers N, il y a plus de cas où il faudra moins de force à la puissance P pour faire rouler ainsi la grande Roue CO, qu'à la puissance R pour faire rouler de même la petite DO, qu'il n'y en a où il en faudroit à celle-là autant ou moins qu'à celle-ci. Par consequent il est plus avantageux du côté des forces, de se servir de grandes Roues que de petites, à moins que l'incommodité de s'en servir ne contrebalançât ou ne surpassât cet avantage, lequel est encore augmenté dans les chemins fort inégaux, dont les petites buttes ou éminences sont par rapport à une petite Roue, comme autant de plans ou surfaces inclinées, par dessus lesquelles cette Roue doit monter ; au lieu que la grande Roue les touche seu-

FIG. 237. 238. 239. 242.

lement par leurs sommets, & qu'elle peut passer facilement par dessus, faute de pouvoir entrer, comme la petite, dans une infinité de petits creux ou profondeurs qui en résultent à ces chemins inégaux ou raboteux, qui le sont ainsi plus pour la petite Roue que pour la grande.

Tel est l'avantage des grandes Roues sur les petites dans les conditions de l'art. 1. Pour dans d'autres conditions il pourroit arriver plusieurs varietez aux rapports des forces P, R, lesquelles varietez se détermineront de même par le present Th. 32. joint au Th. 26. & à ses Corollaires.

FIG. 235. & suivantes jusqu'à 242.

III. Au reste, il est à remarquer, suivant les Corol. 8. 9. du Lem. 3. & suivant la part. 1. du Th. 26. que pour l'équilibre qu'on vient de supposer dans le present Th. 32. entre chacune des puissances P, R, & chacune des Roues CO, DO; chargées en leurs Essieux ou centres A, B; de fardeaux ou poids K, L; les rayons AO, BO, sur lesquels ces deux Roues s'appuyent, devroient être perpendiculaires en O aux surfaces MON, sur lesquelles ces rayons, eux-mêmes, sont appuyez, si ces surfaces étoient mathématiquement polies. Mais l'âpreté & les inégalitez tant des circonferences de ces Roues, que du terrein sur lequel on les suppose, les y accrochent assez pour les y empêcher de glisser, comme il leur arriveroit (*Lem.* 3. *Cor.* 8. 9.) faute de cette perpendicularité, qui ne peut être à la fois pour ces deux rayons AO, BO, appuyez sur un même point O de la surface MON, tant qu'ils ne se confondent pas en une même ligne droite, comme dans la Fig. 242. On se peut passer même de cet accrochement dans tous les autres cas des Fig. 235. 236. 237. 238. 239. 240. en supposant ces deux rayons AO, BO, perpendiculaires à une surface en deux points O (chacun en chacun) assez voisins pour pouvoir passer sensiblement pour le même, & pour ne pas s'éloigner sensiblement non plus de la rigueur mathématique, suivant laquelle le tout vient d'être consideré.

Fig 226

Fig 227

Fig 228

Fig 229

Fig 230

Fig 231

Fig 232

Fig 233

Fig 234

Fig 235

Fig 236

Fig 237

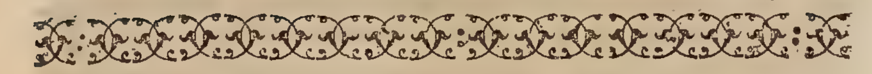
Fig 238

Fig 239

Fig 240

Fig 241

Fig 242



SECTION VII.

De la Vis.

DEFINITION XXVIII.

LA *Vis* eſt un cylindre droit, creuſé exterieurement en ſpirale, qui forme en relief comme un cordon ſpiralement entortillé autour d'un autre cylindre droit reſtant de celui-là, moins gros que lui de deux fois la groſſeur de ce cordon ſpiral par tout également incliné ſur la longueur de ce moindre cylindre, appellé *le cylindre de la Vis*, autour duquel ce cordon eſt ainſi tellement entortillé, que les tours de ce cordon ſont tous également diſtans entr'eux, comme ſi ce cordon (à ſon relief près) étoit l'hypotenuſe d'un triangle rectangle rectiligne, qui de hauteur parallele & égale à celle du cylindre de la Vis, ſeroit roulé autour de ce cylindre, autour de la baſe duquel ſeroit roulée celle de ce triangle; ou comme ſi ce cordon (encore à ſon relief près) étoit ſur le cylindre de la Vis, la trace d'un point uniformement mû le long d'une ligne droite, mûe auſſi d'un mouvement uniforme quelconque autour de la baſe de ce cylindre parallelement à ſon axe. La diſtance de chacun des tours à ſon voiſin de la ſpirale ainſi tracée autour de ce cylindre, priſe ſuivant la longueur de ce cylindre ou de la Vis, eſt ce qu'on appelle le *Pas* de cette Vis, laquelle a pour axe celui de ce cylindre.

Cette Vis entre dans un trou de pareille groſſeur d'un autre corps, appellé *Ecroue*, creuſé interieurement en demi-canal ſpiral propre à recevoir exactement le cordon de la Vis, lequel s'y engage en la tournant, ou en tournant ſon Ecroue d'un certain ſens, & s'en dégage en tournant l'un ou l'autre de ces deux corps en ſens contraire, un des deux demeurant immobile ou fixe pendant

que l'autre tourne de chacune de ces deux manieres. Celui de ces deux corps qui entre ainsi ou sort de l'autre, est (dis-je) ce qu'on appelle la *Vis*, l'autre en est appellé l'*Ecroue* ; chaque tour du cordon de la Vis s'appelle *Spire* ou *Helice*.

Tout cela est si connu, que je n'ai pas crû le devoir expliquer sur des figures, qui peut-être l'auroient rendu moins clair par la difficulté d'y marquer sensiblement le relief du cordon spiral de la Vis, & le creux du canal spiral de son Ecroue.

REMARQUES.

I. On se sert de la Vis pour comprimer, pour écraser ou briser, pour pousser ou repousser, pour attirer, en un mot pour surmonter avec force des obstacles de quelqu'une de ces manieres. D'où l'on voit que tout l'usage de la Vis est de tirer ou de pousser suivant la direction de son axe, c'est-à-dire, de l'axe de son cylindre, tout ce qui lui fait quelque résistance ; de sorte que si elle est fixe, la force ou l'obstacle contre lequel on s'en sert, doit tirer ou presser l'Ecroue de cette Vis vers le côté opposé à celui vers lequel cette Ecroue, en tournant, force cet obstacle d'avancer : au contraire, si c'est l'Ecroue qui soit fixe, cette force ou cet obstacle doit tirer ou presser la Vis, elle même vers le côté opposé à celui vers lequel cette Vis, en tournant, le force d'avancer. C'est ce qui fait regarder d'ordinaire la charge de la Vis, ou de son Ecroue, comme d'une direction parallele à son axe.

II. Suivant cela, dans l'usage de la Vis, lorsqu'elle est fixe, l'on doit regarder tous les points de son Ecroue, comme tirez ou pressez parallelement entr'eux vers le côté vers lequel cette Ecroue est pressée ou tirée par la force ou par le poids dont elle est chargée, & que l'on appellera sa *charge*, differente de ce qu'on a ainsi appellé (*Déf.* 16.) par rapport aux surfaces inclinées, dont cette charge-ci exprime le poids soûtenu sur elles.

III. On voit de-là que les lignes de direction de tous ces points de l'Ecroue, sont toutes obliques au cordon de

cette Vis aux points où ceux-là le touchent & s'appuyent sur lui. Par consequent (*Lem.* 3. *Corol.* 7. 8.) si cette Vis & son Ecroue étoient mathématiquement justes, chacun des points de cette Ecroue tendroit à couler du côté que sa ligne de direction s'écarteroit de la perpendiculaire menée de lui à la partie du cordon, qui lui sert de plan incliné : & parce que cet écartement se feroit du même côté pour tous ces points de l'Ecroue, à cause du parallelisme (*art.* 2.) de toutes leurs lignes de direction, & de la pente uniforme (*Déf.* 28.) du cordon de cette Vis dans toute sa longueur ; il suit évidemment que tous ces points de l'Ecroue devroient s'accorder dans un même mouvement, qui emportât de ce côté-là cette Ecroue suivant le fil de ce cordon, c'est-à-dire, en tournoyant du côté de cet écartement, si dans son frottement avec la Vis l'inégalité de leurs parties ne les accrochoit point ensemble.

IV. La même chose se doit entendre de la Vis, si c'est l'Ecroue qui soit fixe.

V. Ainsi à regarder l'un & l'autre dans une justesse mathématique, il faut nécessairement quelque force pour retenir celle des deux qui est mobile, contre l'impression de la force ou du poids qui la charge: la voici cette force supposée à l'ordinaire d'une direction perpendiculaire à un Levier droit, qui passe par l'axe de la Vis, & avec lequel Levier cette direction est dans un plan perpendiculaire à cet axe, auquel on suppose aussi d'ordinaire que la direction de la charge de la Vis ou de son Ecroue est toûjours parallele.

THEOREME XXXIII.

Dans cette hypothese ordinaire du précedent art. 5. je dis que lorsqu'une puissance soûtient quelque poids, ou l'action de quelqu'autre force, à l'aide d'une Vis, soit que cette Vis soit fixe, ou que ce soit son Ecroue ; cette puissance est toûjours à ce poids ou à cette force (quelle qu'elle soit) comme un pas de cette Vis est à la circonference d'un cercle dont le rayon est egal à la distance qui est entre cette puissance & l'axe de cette même Vis.

DEMONSTRATION.

FIG. 243. I. Premierement, si la Vis VXYZ est fixe, concevons que le point A de son Ecroue PQ soit retenu sur la partie GH de son cordon par quelque puissance R, dont la direction AB soit dans le plan de cette Ecroue, & perpendiculaire à EP, qui y est aussi, & qui passant par le point A, passe aussi en E par l'axe MS de la Vis.

Il est clair que cette puissance R retenant par ce moyen toute l'Ecroue PQ, ce point A de cette Ecroue fait sur cette puissance la même impression que s'il soûtenoit lui seul toute l'action du poids ou de la force, quelle qu'elle soit, qui pousse ou qui tire cette Ecroue (*Remarq.* 1. 5.) vers ZY parallelement à l'axe MS de cette Vis. Ainsi le point A de cette Ecroue peut être regardé comme ayant lui seul suivant AC perpendiculaire au plan de cette Ecroue, & parallele à MS, toute l'impression que cette Ecroue reçoit de sa charge: de sorte que si l'on fait AD perpendiculaire à la partie GH du cordon de cette Vis, & que de quelque point D de cette ligne l'on acheve le parallelogramme BACD; l'on verra (*Th.* 26. *Corol.* 6.) que la puissance R sera à la charge de l'Ecroue PQ, c'est-à-dire (*Remarq. art.* 2.) au poids, à la force, ou à la résistance qu'elle soûtient, comme AB est à AC, ou à son égale BD; c'est-à-dire (à cause que le triangle HFG roulé sur la Vis VXYZ, est sembable au triangle ABD) comme HF à la demi-circonference FG de cette Vis, ou comme 2×HF ou HK est à cette circonference entiere. Or regardant la droite EAP comme un Levier dont l'appui est le point E de l'axe MS de cette Vis, & qui se trouve (*Hyp.*) dans le plan de son Ecroue; la puissance P (qu'on suppose aussi dans ce même plan, dirigée suivant lui perpendiculairement à EP, & parallelement à AB supposée aussi perpendiculaire à EP) soûtenant ainsi (*Hyp.*) le point A, ou la charge de l'Ecroue PQ au lieu de la puissance R, est à cette autre puissance R (*Th.* 21. *Cor.* 2. 9.) comme EA est à EP, ou comme la circonference entiere de

de cette Vis qui a EA pour rayon, eſt à la circonference entiere d'un cercle dont le rayon ſeroit EP. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura la puiſſance P à la charge de l'Ecroue PQ, comme HK (qui eſt un des pas de la Vis) eſt à la circonference d'un cercle dont le rayon ſeroit égal à la diſtance EP de cette puiſſance P à l'axe MS de la Vis. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

II. Secondement, ſi c'eſt l'Ecroue PQ qui ſoit fixe, concevons que le point A appartient à la Vis VXYZ, c'eſt-à-dire, à ſon cordon, & qu'il eſt retenu (comme ſur un plan incliné) dans le canal ſpiral AO de cette Ecroue PQ par quelque puiſſance R, dont la direction ſoit encore ſuivant AB ſuppoſée dans le plan de cette Ecroue, & perpendiculaire à EP qu'on y ſuppoſe auſſi.

Il eſt encore évident que cette puiſſance R retenant par ce moyen toute la Vis VXYZ, ce point A fait encore ſur elle la même impreſſion ſuivant AC parallele à MS, que s'il ſoûtenoit ſeul toute l'action de ce qui (*Remarq.* 1. 5.) pouſſe ou tire cette Vis vers ZY. Donc par la même raiſon que ci-deſſus (*art.* 1.) la puiſſance R ſera encore ici à la charge de cette Vis, comme AB eſt à BD, c'eſt-à-dire, comme HF à FG, ou comme HK à la circonference entiere de cette Vis ; & la puiſſance T, qui au lieu de la puiſſance R retient cette même Vis, eſt auſſi à cette puiſſance R (*Th.* 21. *Corol.* 2. 9.) comme EA à ST, ou comme cette circonference entiere de la Vis eſt à la circonference entiere d'un cercle qui auroit ST pour rayon. Donc (en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles) l'on aura encore la puiſſance T à la charge de cette Vis, comme HK (qui eſt un des pas de la même Vis) eſt à la circonference entiere d'un cercle, dont le rayon ſeroit égal à la diſtance ST de la puiſſance T à l'axe MS de cette Vis. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

III. Donc (*art.* 1. 2.) lorſqu'une puiſſance ſoûtient un poids, ou l'action de quelqu'autre force que ce ſoit, à l'aide d'une Vis, ſoit que cette Vis ſoit fixe, ou que ce

ſoit ſon Ecroue ; cette puiſſance eſt toûjours à ce poids, ou à cette force, comme un des pas de cette Vis eſt à la circonference entiere d'un cercle qui auroit pour rayon la diſtance de cette puiſſance à l'axe de cette même Vis. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

COROLLAIRE I.

On voit de-là que pour peu que la raiſon d'une puiſſance à un poids, ou à quelqu'autre force, ſurpaſſe celle d'un des pas d'une Vis, à la circonference d'un cercle qui auroit pour rayon la diſtance de cette puiſſance à l'axe de cette Vis ; cette puiſſance ainſi appliquée à cette Vis, pourra par le moyen de cette machine ſurmonter la réſiſtance de ce poids ou de cette force, & ce d'autant plus aiſément que cette raiſon ſera plus grande.

COROLLAIRE II.

D'où il ſuit que plus les pas d'une Vis ſeront petits, ou que les tours de ſon cordon ſpiral ſeront plus ſerrez, & que la diſtance de ſon axe à la puiſſance qui eſt appliquée, ſera plus grande, plus il ſera facile à cette puiſſance de ſurmonter le poids ou la force qui agit contr'elle.

COROLLAIRE III.

Il ſuit encore de ce Théoreme-ci qu'une même puiſſance peut également mouvoir un même poids, ou ſurmonter une même force ou réſiſtance, à l'aide d'une même Vis, ſoit qu'on ſuppoſe cette puiſſance appliquée à cette Vis, ou à ſon Ecroue ; pourvû qu'elle ſoit également diſtante de l'axe de cette Vis dans l'un & dans l'autre cas.

L'obſtacle que le frottement de la Vis avec ſon Ecroue fait au mouvement de l'une des deux par rapport à l'autre, doit être compté comme faiſant partie de ſa charge : c'eſt ainſi qu'on peut réduire cette machine, de même que toute autre, à une juſteſſe mathématique.

AVERTISSEMENT.

Dans le précedent Th. 33. on vient de faire les trois suppositions qu'on fait d'ordinaire dans l'examen des proprietez de la Vis : sçavoir,

1°. Que la direction de la puissance appliquée à cette machine, est dans un plan perpendiculaire à son axe.

2°. Que cette direction de la puissance est aussi perpendiculaire à la droite menée ou imaginée dans ce plan, du point d'application de la puissance par l'axe de la Vis.

3°. Enfin que la direction de la charge de cette Vis ou de son Ecroue, c'est-à-dire, de ce qui y agit contre la puissance, ou de ce qui lui résiste, est parallele à cet axe.

Mais depuis le Projet de cette Mécanique-ci, que j'exposai au jugement des Connoisseurs en 1687. & dans lequel je démontrai, comme ci-dessus, le précedent Th. 33. fondé sur ces trois hypotheses ordinaires; ayant remarqué à la campagne pendant les Vendanges, que de plusieurs hommes appliquez aux Leviers, qui servent à faire tourner la Vis de chaque Pressoir, il n'y en avoit presque pas un dont la direction fût dans un plan perpendiculaire à l'axe de cette Vis, ni même perpendiculaire au Levier auquel il étoit appliqué, s'appuyant presque tous sur ces Leviers, & contre tout ce qu'ils pouvoient rencontrer, avec des efforts dirigez de toutes parts, suivant des lignes differemment inclinées à l'horison & à ces Leviers. Cette contrarieté aux deux premieres des trois suppositions précedentes, me fit repenser à la troisiéme; & voyant qu'elle peut varier de même en mille manieres differentes, comme lorsque la Vis est oblique à l'horison, & que sa charge, ou celle de son Ecroue, est un poids, &c. Je m'avisai enfin de rechercher le tout en general, c'est-à-dire, pour toutes les directions imaginables, tant de la charge de la Vis, ou de son Ecroue, que de la puissance qui lui est appliquée. Voici le tout plus generalement encore que je ne le donnai dans les Memoires de 1709. y ayant perdu de vûe que la direction de la puis-

ſance étoit hors du plan de l'Ecroue, ou (plus generalement) hors d'un plan perpendiculaire à l'axe de la Vis.

THEOREME XXXIV.

Fig. 244. *En general pour toutes les directions imaginables de la charge quelconque de la Vis, ou de ſon Ecroue, & de la puiſſance qui lui eſt appliquée, & en équilibre avec cette charge ou réſiſtance : ſi l'on appelle cette puiſſance quelconque, R & cette charge ou réſiſtance auſſi quelconque, P, l'on aura toûjours* $R. P :: 2 \times AC \times PE \times SM \times GM \times TM \mp O \times EF \times SM \times GM \times TM . O \times SM \times SM \times TD \times PN \mp 2 \times AC \times GS \times GM \times TM \times PN$. *dont on va déterminer les lignes & les ſignes dans la démonſtration ſuivante.*

DEMONSTRATION.

I. Soit la Vis VXYZ avec ſon Ecroue QM & AB un demi-tour de ſon cordon ſpiral, qui, lorſque cette Vis eſt fixe, ſoûtient cette Ecroue ou ſa charge ; laquelle charge étant par tout la même, c'eſt-à-dire, de même effort & de même direction quelconques, tant ſur ce cordon AB, que ſur ſon point P, peut être conſiderée comme toute entiere en P : c'eſt pour cela, & pour abreger nos expreſſions, que cette charge ou réſiſtance entiere s'appellera toûjours P dans la ſuite. Si c'eſt l'Ecroue QM qui ſoit fixe, P exprimera de même la charge de la Vis, ſoûtenue ſur le point P du canal ſpiral PO de cette Ecroue QM, dans lequel loge ou coule le cordon AB de la Vis. Soit auſſi la puiſſance R appliquée comme l'on voudra à cette Ecroue en M extrêmité d'une droite, qui prolongée ſuivant le plan QM de la même Ecroue, rencontre en D l'axe $\beta\varpi$ de la Vis : ſi c'eſt cette Vis qui ſoit fixe, ou qui ſoit appliquée en M à un tel Levier droit DPM, ſi c'eſt l'Ecroue qui le ſoit ; & cela de part & d'autre, ſoit que la direction RMG de cette puiſſance R ſoit ou ne ſoit pas dans le plan QM de cette Ecroue ; ou (plus generalement) dans un plan perpendiculaire à l'axe $\beta\varpi$ de la Vis, lequel

passe par le Levier droit DPM; avec lequel il soit imaginé ne faire qu'un tout qui se meuve avec lui; lequel plan (que j'appellerai *Plan du Levier DM*) sera celui de l'Ecroue, lui-même, quand la Vis sera fixe; & quand elle sera mobile, l'Ecroue étant fixe, ce plan sera imaginé comme d'une piéce avec cette Vis & son Levier, pour concevoir sur ce plan imaginaire par rapport à la Vis ainsi mobile avec lui, lorsque l'Ecroue est fixé, ce qu'on va remarquer d'action ou de force de la puissance R & de la charge P sur l'Ecroue QM par rapport à elle, lorsque c'est la Vis qui est fixe: soit aussi que la direction RMG de la puissance R soit perpendiculaire, ou non, à la droite DPM; soit enfin que la direction PN de la charge P de l'Ecroue ou de la Vis, soit ou ne soit pas parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis.

II. Quelles que soient (dis-je) toutes ces directions, tant de la charge P de la Vis ou de son Ecroue, que de la puissance R appliquée à une des deux; d'un point quelconque de la direction PN de cette charge P, pris du côté de π, vers lequel cette charge tend, imaginons NF perpendiculaire en F à un plan perpendiculaire en P à la droite DM, lequel plan sera ainsi perpendiculaire au plan MDπ, & touchant de la Vis en quelque droite PE parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, lequel axe $\beta\pi$ étant (*Hyp.*) perpendiculaire à DM, rend cette parallele PE perpendiculaire aussi à cette même DM, & section commune de ces deux plans: de sorte que si du point F du plan touchant FPE on mene une perpendiculaire à son orthogonal MDπ, cette perpendiculaire sera FE, qui rencontrera perpendiculairement en quelque point E cette section commune PE, soit par le point P la droite PL parallele à FE, & consequemment perpendiculaire (comme elle) au plan MDπ; & consequemment aussi perpendiculaire en P à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroue, ou plus generalement dans le plan de ce Levier DM, défini dans l'art. 1.

III. Cela fait ou imaginé, le Corol. 7. du Lem. 3. fera

voir qu'en appellant F ce qu'il résulte d'effort ou d'impression suivant PF de ce que la charge P de la Vis ou de son Ecroue en fait suivant sa direction quelconque PN; E, ce qu'il en résulte suivant PE de cet effort F suivant PF; & enfin L, ce qu'il en résulte aussi suivant EF du même effort F suivant PF; l'on aura P. F :: PN. PF. Et F. E :: PF. PE. Et F. L :: PF. EF. Desquelles analogies (en raison ordonnée) la premiere avec la seconde donnera P. E :: PN. PE. Et la premiere avec la troisiéme donnera P. L :: PN. EF. De sorte que par le moyen de la premiere de ces deux-ci l'on aura $E = \frac{P \times PE}{PN}$ pour ce que la charge P de la Vis ou de son Ecroue fait d'impression ou de résistance de P vers E suivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe βϖ de cette Vis; & par le moyen de la seconde l'on aura $L = \frac{P \times EF}{PN}$ pour ce que la même charge absolue P fait d'impression de E vers F suivant EF perpendiculaire (*art.* 2.) au plan MDϖ, ou de P vers L suivant sa parallele PL perpendiculaire aussi (*art.* 2.) à ce plan & à sa droite DM en P dans le plan QM de ce Levier DM.

IV. Si présentement de quelque point G de la direction prolongée RM de la puissance R, on imagine GS perpendiculaire en S à ce plan QM du Levier DM, duquel point S soit sur ce plan la droite SMH rencontrée en quelque point T par DT perpendiculaire à DM sur ce même plan, sur lequel soit aussi MK perpendiculaire en M à la même DM; le Corol. 7. du Lem. 3. fera voir pareillement ici que l'effort absolu de la puissance R suivant sa direction GMR, est à ce qu'il en résulte suivant SM prolongée vers H, comme GM à SM; & que ce qu'elle en fait ainsi suivant SM, est à ce qu'il en résulte suivant TD ou suivant sa parallele MK, comme TM est à TD. Donc (en appellant H, K, ces efforts dérivez suivant SH, MK,) l'on aura ici R. H :: GM. SM. Et H. K :: TM. TD. Ce qui

(en multipliant par ordre) donne ici R. K :: GM×TM. SM×TD. D'où résulte $K = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM}$ pour ce que la puissance R fait d'effort de M vers K suivant MK perpendiculaire (*Hyp.*) comme DT, à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM employé jusqu'ici pour le plan du Levier DM, conformément à l'art. 1. Ce qui est tout ce qui reste de force agissante de cette puissance R pour mouvoir l'Ecroue autour de la Vis fixe, ou la Vis dans l'Ecroue fixe; puisque l'effort que cette puissance fait de plus de G vers S suivant GS perpendiculaire (*Hyp.*) au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, est employé (*Ax.* 3.) tout entier contre ce plan. Ce qui en augmente ou diminue de la valeur de cet effort suivant GS, la charge de l'Ecroue lorsque la Vis est fixe, ou de la Vis lorsque c'est l'Ecroue qui est fixe : voici comment.

V. Cet effort de G vers S, résultant de la puissance R suivant une direction GS perpendiculaire (*art.* 4.) au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & consequemment parallele à l'axe βϖ de la Vis, étant (dis-je) employé tout entier contre ce plan, le charge ou le soulage de toute sa valeur, selon que le point G, ou la partie GM de la direction de la puissance R est du côté de β au dessus de ce plan QM du Levier DM, ou au dessous de ce même plan du côté de ϖ, vers lequel tend (*Hyp.*) la charge absolue P de l'Ecroue ou de la Vis; & consequemment l'effort $E = \frac{P \times PE}{PN}$, qu'on vient de trouver (*art.* 3.) résulter de cette charge P à cette Ecroue, ou à cette Vis, de P vers E suivant PE parallele aussi (*art.* 2.) à l'axe βϖ de cette même Vis, doit être augmenté ou diminué de la valeur de cet effort résultant de la puissance R, de G vers S suivant GS, selon que le point G, ou la partie GM de la direction de cette puissance, sera au dessus ou au dessous du plan QM du Levier DM. D'où l'on voit qu'en

appellant S cet effort suivant GS, la charge précise de l'Ecroue ou de la Vis, suivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis sera ici E+S lorsque le point G y sera du côté de β au dessus du plan QM du Levier DM, & E—S lorsque ce point G sera au dessous de ce plan du côté de ϖ. Or (*Lem.* 3. *Corol.* 7.) GM. GS :: R. S $= \frac{R \times GS}{GM}$. Donc ayant déja (*art.* 3.) E $= \frac{P \times PE}{PN}$, la charge de l'Ecroue QM ou de la Vis suivant PE, parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis, sera ici E+S $= \frac{P \times PE}{PN} + \frac{R \times GS}{GM}$, lorsque le point G y sera du côté de β, au dessus du plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & E—S $= \frac{P \times PE}{PN} - \frac{R \times GS}{GM}$, lorsque ce point G sera du côté de ϖ au dessous de ce plan; c'est-à-dire, en general, que la charge précise de l'Ecroue ou de la Vis, de P vers E suivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de la Vis, sera ici E $\pm$ S $= \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{GM}$, dont le superieur du double signe ($\pm$) sera pour le cas du point G au dessus du plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, & l'inferieur pour le cas où ce point G sera au dessous de ce plan.

VI. Telle est (*art.* 5.) la charge précise de l'Ecroue QM, ou de la Vis VXYZ, de P vers E suivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\varpi$ de cette Vis; & c'est tout ce qui lui en résulte, tant de la part de l'absolue P suivant PN, que de la puissance R suivant GR, le surplus de cette charge absolue P, étant tout employé (*art.* 3.) parallelement au plan QM du Levier DM, contre le plan touchant FPE, & contre son orthogonal MDϖ; & la puissance R ne faisant d'impression qui charge ou soulage ce plan QM du Levier DM, que suivant ce qu'on lui en compte

compte ici ſuivant GS perpendiculaire à ce plan. Quant à la force employée à ſoûtenir cette charge préciſe (*art.* 5.) $F \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{GM}$ de la Vis ou de ſon Ecroue ſuivant PE parallele (*art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, l'art. 4. vient de faire voir que la force $K = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM}$ de M vers K ſuivant MK perpendiculaire à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM, ou du Levier DM, eſt tout ce qu'il en reſte à la puiſſance R pour ſoûtenir cette charge. On a vû auſſi dans l'art. 3. que de la charge abſolue P ſuivant PN, il réſulte auſſi une force $L = \frac{P \times EF}{PN}$ de E vers F ſuivant EF, ou de P vers L ſuivant ſa parallele PL perpendiculaire auſſi (*art.* 2.) à la droite DM dans le plan QM de l'Ecroue, ou du Levier DM; laquelle force L eſt conſequemment pour ou contre la force K, ſelon que le point F, ou que la direction PN de la charge abſolue P, eſt du côté de K, ou du côté oppoſé par rapport au plan MDπ. Ainſi ces deux forces K, L, ayant (*art.* 3. 4.) des directions paralleles en M, P, l'employée à ſoûtenir la charge ſuivant PE, qu'on vient de trouver (*art.* 5.) à la Vis, ou à ſon Ecroue, ſera ici $K \pm L = \frac{R \times SM \times TD}{GM \times TM} \pm \frac{P \times EF}{PN}$ dont le ſuperieur du double ſigne ($\pm$) ſera pour, lorſque le point F, ou la direction PN de la charge abſolue P, ſera du côté de K par rapport au plan MDπ; & l'inferieur pour le cas où ces points F, K, ſeront de part & d'autre de ce plan.

VII. Donc (*art.* 5. 6.) toute la queſtion ſe réduit ici à une charge $E \pm S = \frac{P \times PE}{PN} \pm \frac{R \times GS}{SM}$ de l'Ecroue QM ou de la Vis VXYZ, dirigée de P vers E ſuivant PE parallele

(*art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, & en équilibre avec une puissance $K \pm L = \frac{R\times SM\times TD}{GM\times TM} \pm \frac{P\times EF}{PN}$, dont les forces partiales K, L, ont en M, P, des directions MK, PL, perpendiculaires à la droite DM dans le plan de l'Ecroue QM ou de ce Levier DM : le tout en prenant ici les particuliers des signes generaux ($\pm$), comme dans les art. 5. 6.

VIII. Or si l'on appelle M une force qui, dirigée de M vers K suivant MK, ou en sens directement contraire, c'est-à-dire, dans le sens que la force L le seroit de P vers L suivant PL parallele à MK, auroit en M le même *Moment* (*Déf.* 22.) sur le Levier DM, que cette force L auroit en P sur le même Levier DM, & de même appui D : le Corol. 9. du Th. 21. donnera $L\times DP = M\times DM$, & consequemment $\frac{M\times DM}{DP} = L$ (*art.* 3.) $= \frac{P\times EF}{PN}$. Donc (*art.* 7.) toute la question se réduit ici à une charge $= \frac{P\times PE}{PN} \pm \frac{R\times GS}{SM}$ de la Vis ou de son Ecroue, en équilibre avec une force ou puissance $= \frac{R\times SM\times TD}{GM\times TM} \pm \frac{M\times DM}{DP}$, appliquée en M au Levier DM suivant une direction MK perpendiculaire à ce Levier dans le plan de l'Ecroue QM ou de ce Levier DM, Par consequent ce cas étant celui du Th. 32. un raisonnement semblable à celui de la démonstration de ce Théoreme, donnera ici (en prenant O pour la circonference d'un cercle décrit du rayon DM) $2\times AC . O :: \frac{R\times SM\times TD}{GM\times TM} \pm \frac{M\times DM}{DP} . \frac{P\times PE}{PN} \pm \frac{R\times GS}{SM}$ (venant de trouver $\frac{M\times DM}{DP} = \frac{P\times EF}{PN}$) $:: \frac{R\times SM\times TD}{GM\times TM} \pm \frac{P\times EF}{PN} . \frac{P\times PE}{PN} \pm \frac{R\times GS}{SM}$. D'où résulte $\frac{2\times P\times AC\times PE}{PN} \pm \frac{2\times R\times AC\times GS}{SM} = \frac{R\times O\times SM\times TD}{GM\times TM}$

$\mp \frac{P \times O \times EF}{PN}$, ou $\frac{2 \times P \times AC \times PE \mp P \times O \times EF}{PN} = \frac{R \times O \times SM \times SM \times TD \mp 2 \times R \times AC \times GS \times GM \times TM}{SM \times GM \times TM}$, ou bien aussi $2 \times P \times AC \times PE \times SM \times GM \times TM \mp P \times O \times EF \times SM \times GM \times TM = R \times O \times SM \times SM \times TD \times PN \mp 2 \times R \times AC \times GS \times GM \times TM \times PN$; dans laquelle équation,

1°. L'art. 6. fait voir que le superieur du double signe ($\mp$) du premier terme est pour lorsque le point F ou la direction PN de la charge absolue P de la Vis ou de l'Ecroue, sera du côté de K par rapport au plan MDϖ; & l'inférieur, pour lorsque ces deux points F, K, seront de part & d'autre de ce plan.

2°. L'art. 5. fait pareillement voir que le supérieur du double signe ($\mp$) du second terme de cette derniere équation, est pour lorsque le point G, ou la partie MG de la direction RM prolongée de la puissance R, est du côté de β au dessus du plan QM de l'Ecroue, ou du Levier DM; & l'inférieur, pour lorsque ce point G ou cette partie MG de la direction RM prolongée de la puissance R, est au dessous de ce même plan du côté de ϖ.

Donc $R.P :: 2 \times AC \times PE \times SM \times GM \times TM \mp O \times EF \times SM \times GM \times TM . O \times SM \times SM \times TD \times PN \mp 2 \times AC \times GS \times GM \times TM \times PN$. dans laquelle analogie les signes particuliers des generaux ($\mp$) sont pour les cas marquez dans les précedens nomb. 1. 2. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si la direction PN de la charge absolue P de la Vis VXYZ, ou de son Ecroue QM étoit en PF dans le plan touchant FPE de cette Vis en PE; cette hypothese, qui feroit tomber N en F, rendroit seulement NF=O, & PN =PE; ce qui n'apporteroit aucune autre varieté à la précedente analogie generale de ce Théoreme-ci, que d'y changer PN en PE.

Mais si la direction PN de cette charge absolue P, se trouvoit en PE parallele (*dém. art. 2.*) à l'axe $\beta\pi$; la confusion qui se trouveroit alors des points N, F, avec le point E, rendant NF=O=FE, & PN=PF=PE, changeroit pour lors la précedente analogie generale du Théoreme en R. P : : 2×AC×SM×GM×TM. O×SM×SM×TD+2×AC×GS×GM×TM.

COROLLAIRE II.

Si outre cette hypothese de PN en PE, c'est-à-dire, de la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, dirigée suivant PE parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, on suppose la direction RMG de la puissance R dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM; cette nouvelle hypothese, qui confond le point G avec le point S; & GMR avec SMH, rendant ainsi GS=O, & GM=SM, changera pour ici l'analogie du précedent Corol. 1. en R. P : : 2×AC ×TM. O×TD.

COROLLAIRE III.

Enfin si aux deux hypotheses du précedent Corol. 2. on ajoûte celle de MR ou MH en MK perpendiculaire à DM dans le plan de ce Levier ou de l'Ecroue QM; cette troisiéme hypothese rendant MS ou MT (prolongement de RM confondue avec HM par la seconde des deux autres dans le Corol. 2.) perpendiculaire aussi à DM, rendroit l'angle TMD droit, de même que l'est (*démonstr. art. 4.*) TDM; & rendant ainsi MT, DT, paralleles infinies & égales entr'elles, changeroit l'analogie du précedent Corol. 2. en R. P : : 2×AC. O. pour ce cas-ci, qui est celui du Th. 32. d'où l'on voit, comme dans ce Th. 32. que l'on aura ici la puissance R à la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, comme un pas (2×AC) de cette Vis à la circonference (O) d'un cercle décrit du rayon DM.

Ce dernier cas de la direction PN de la charge absolue P de la Vis ou de son Ecroue, parallele à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, &

de la direction MR de la puissance R perpendiculaire en M à DM dans le plan QM de l'Ecroue ou de ce Levier DM, lequel est celui du Th. 33. & le plus simple de tous, est le seul que je sçache avoir été proposé jusqu'ici sur la Vis; & la démonstration qu'on en voit dans le précedent Corol. 3. fait voir que ce Th. 33. n'est qu'un cas ou un Corollaire très-limité du précedent Th. 34.

SCHOLIE.

I. Pour faciliter le calcul du précedent Th. 34. & de ses Corollaires, il est à considerer,

1°. Que la direction GMR de la puissance R étant donnée de position par rapport au plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, sur lequel plan GS est (*démonstr. art.* 4.) perpendiculaire en S; l'angle GMS de cette direction avec ce plan, sera pareillement donné avec son complement MGS à un droit, & avec la position de MS sur ce plan, & consequemment aussi avec l'angle DMS ou DMT compris entr'elle & DM sur le même plan.

2°. Que la direction PN de la charge absolue P de la Vis, ou de son Ecroue, étant aussi donnée par rapport à l'axe βπ de cette Vis pareillement donné de position, & consequemment au plan touchant FPE de cette Vis en PE parallele (*démonstr. art.* 2.) à son axe βπ, sur lequel plan NF est (*démonstr. art.* 2.) perpendiculaire en F; la position de PF sur ce plan touchant FPE, sera aussi donnée avec celle de la section commune PE de ce plan avec le plan MDϖ; & consequemment les angles NPF, FPE, le seront de même avec les complemens PNF, PFE, de chacun d'eux à un droit, la construction supposée rendant (*démonstr. art.* 2.) FE perpendiculaire en E sur PE, comme NF en F sur PF.

II. Cela posé, soient appellez *a*, le sinus total; *b*, le sinus de l'angle MGS donné suivant le nomb. 1. de l'art. 1. *c*, le sinus de son complement GMS à un droit; *m*, le sinus de l'angle DMS ou DMT pareillement donné suivant le même nomb. 1. de cet art. 1. *n*, le sinus de l'ar-

gle PNF, aussi donné suivant le nomb. 2. de ce même art. 1. p, le sinus de l'angle PFE, pareillement donné dans le même nomb. 2. de cet art. 1. & q, le sinus de son complement FPE. Voici ces noms en liste pour les rendre plus presens.

Sinus total ou de l'angle droit,	a.
Sinus de l'angle MGS,	b.
Sinus de son complement GMS,	c.
Sinus de l'angle DMS ou DMT,	m.
Sinus de l'angle PNF,	n.
Sinus de l'angle PFE,	p.
Sinus de son complement FPE,	q.

III. Suivant ces noms de l'art. 2. le Corol. 2. du Lem. 8. donnera $a.b::$ GM. SM$=\frac{b}{a}\times$GM. Et $a.m::$ TM. TD$=\frac{m}{a}\times$TM. Et $q.p::$ EF. PE$=\frac{p}{q}\times$EF. De plus $p.a::$ PE. PF. Et $n.a::$ PF. PN. Ce qui (en multipliant par ordre) donne $np.aa::$ PE. PN (à cause de PE$=\frac{p}{q}\times$EF) $::\frac{p}{q}\times$EF. PN$=\frac{aa}{nq}\times$EF. De plus encore $b.a::$ SM. GM. Et $a.c::$ GM. GS. Ce qui (en raison ordonnée) donne aussi $b.c::$ SM. GS$=\frac{c}{b}\times$SM.

Par consequent on aura ici PE$=\frac{p}{q}\times$EF, SM$\times$TD$\times$PN $=\frac{b}{a}\times$GM$\times\frac{m}{a}\times$TM$\times\frac{aa}{nq}\times$EF$=\frac{bm}{nq}\times$GM$\times$TM$\times$EF, & GS$\times$PN$=\frac{c}{b}\times$SM$\times\frac{aa}{nq}\times$EF$=\frac{aac}{bnq}\times$SM$\times$EF.

Donc en substituant ces valeurs de PE, SM$\times$TD$\times$PN, GS$\times$PN, en leur place dans l'analogie generale du precedent Th. 34. elle deviendra encore en general R. P $::\frac{2p}{q}\times$ AC$\times$EF$\times$SM$\times$GM$\times$TM$\mp$O$\times$EF$\times$SM$\times$GM$\times$TM. $\frac{bm}{nq}\times$O$\times$ SM$\times$GM$\times$TM$\times$EF$\mp\frac{2aac}{bnq}\times$AC$\times$SM$\times$EF$\times$GM$\times$TM $::\frac{2p}{q}\times$

$AC \mp O . \frac{bm}{nq} \times O \mp \frac{2aac}{bnq} \times AC :: 2bnp \times AC \mp bnq \times O . bbm \times O \mp 2aac \times AC$. c'est-à-dire, R. P :: $2bnp \times AC \mp bnq \times O . bbm \times O \mp 2aac \times AC$. toute exprimée en ſinus, qui multiplient le pas ($2 \times AC$) de la Vis, & la circonference (O) d'un cercle décrit du rayon DM: les ſignes particuliers des generaux ($+$) ſe prendront encore ici comme dans l'analogie generale du Théoreme transformée en celle-ci, dont les ſinus en rendent le calcul le plus facile qu'il puiſſe être, ſans rien diminuer de ſa generalité.

IV. Quant aux analogies particulieres des Corollaires précedens de ce Th. 34. réſultantes de ſa generale, les voici de même en ſinus, réſultantes de la derniere du précedent art. 3.

1°. Si, comme dans le Corol. 1. la direction PN de la charge abſolue P de la Vis ou de ſon Ecroue, étoit en PF parallele (*démonſtr. art.* 2.) à l'axe $\beta\pi$ de cette Vis, cette hypotheſe, qui confond PN, PF, avec cette parallele PE, & leurs points N, F, avec le ſien E rendant ainſi droits les angles PNF, PFE, à l'inſtant de cette confuſion; & leurs complemens infiniment petits ou nuls en P par rapport à eux, rendroit alors (ſuivant les noms de l'art. 2.) leurs ſinus $n = a$, $p = a$, & $q = o$: ce qui réduiroit pour ici la derniere analogie generale du précedent art. 3. à R. P :: $2aab \times AC . bbm \times O \mp 2aac \times AC$.

2°. Si de plus on ſuppoſe que la direction GMR de la puiſſance R ſoit dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, comme dans le Corol. 2. Cette autre hypotheſe, qui confond auſſi cette direction GMR avec SMH dans ce plan, & ſon point G avec celui S de celle-ci, rendant ainſi l'angle MGS droit à l'inſtant cette confuſion; & ſon complement GMS infiniment petit ou nul par rapport à lui, rendroit alors (ſuivant les noms de l'art. 2.) le ſinus $b = a$, & le ſinus $c = o$; ce qui réduiroit pour ici l'analogie précedente du nomb. 1. à R. P :: $2a^3 \times AC . aam \times O :: 2a \times AC . m \times O$.

3°. Enfin ſi aux deux hypotheſes du précedent nomb. 2.

dont la seconde confond la droite GMR avec SMH dans le plan QM de l'Ecroue ou du Levier DM, l'on ajoûte celle de MR ou de MH en MK perpendiculaire à DM dans ce plan, ainsi que dans le Corol. 3. ce qui est le cas du Th. 33. Cette troisiéme hypothese rendant l'angle DMS droit, & consequemment son sinus $m=a$, réduiroit alors l'analogie du précedent nomb. 2. à cette autre, R. P : : 2×AC. O. qui est la même qu'on a déja trouvée pour ce cas-ci dans le Th. 33. & dans le précedent Corol. 3.

DEFINITION XXIX.

FIG. 243. 244. La Vis employée comme ci-dessus (Th. 33. & Corol. 3. du Th. 34.) avec son Ecroue seulement, s'appelle *Vis simple*, ou simplement *Vis*; & lorsqu'elle est appliquée à d'autres Machines, elle s'appelle *Vis composée*, laquelle prend le nom de *Vis sans fin*, quand, sans Ecroue, son cordon s'engraine dans une roue dentée, comme dans la Fig. 245. parce qu'alors en tournant sur son axe fixe, elle fait tourner sans fin cette roue par l'engrenement continuel des spires ou helices de son cordon entre les nouvelles dents que le tournoyement de la roue lui presente, & fait entrer ces dents sans cesse les unes après les autres entre ces mêmes spires à mesure que d'autres dents de cette roue en sortent aussi les unes après les autres.

THEOREME XXXV.

FIG. 245. *Soit la Vis DAGP mobile autour de son axe fixe DG par le moyen d'une Manivelle DFR, & dont les spires ou helices AP, BP, du cordon s'engrainent entre les dents P de la Roue PS d'un Tour mobile aussi autour de son centre fixe C avec son rouleau HE, sur lequel s'entortille la corde QHE, à laquelle pende un poids quelconque Q, que la puissance R, appliquée en R au manche FR de la Manivelle DFR, soûtienne en équilibre ou en repos par le moyen de toute la Machine.*

Je dis que si l'on imagine le rayon CP de la Roue dentée

PS,

PS ; lequel rencontre son rouleau HE en E, & une perpendiculaire RK à l'axe GD prolongé en K, l'équilibre ici supposé entre la puissance R & le poids Q sur une telle Machine, y donnera toûjours cette puissance R à ce poids Q, comme le produit d'un des pas AB de la Vis par le rayon EC du rouleau, sera au produit du rayon CP de la Roue par la circonference entiere du cercle décrit du rayon RK ; c'est-à-dire, qu'en appellant O cette circonference circulaire, l'on aura toûjours ici R. Q : : AB×EC. CP×O.

DEMONSTRATION.

Soit appellée P la résistance que le poids Q fait faire à la Roue dentée au tournoyement de la Vis, par le moyen duquel la puissance R tend à enlever ce poids Q ; l'on aura (*Th.* 33. & *Corol.* 2. *du Th.* 34. & *Corol.* 3. *du Th.* 34.) cette puissance R à cette résistance P, comme le pas AB de la Vis à la circonference Z du cercle, que la même puissance R tend ainsi à décrire du rayon KO autour du centre K ; c'est-à-dire, R. P : : AB. O. De plus on aura (*Th.* 19. *Corol.* 1.) P. Q : : CE. CP. Donc (en multipliant par ordre) l'on aura R. Q : : AB×CE. CP×O. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

I. On a vû dans les art. 2. des Schol. des Th. 17. 18. comment un homme peut s'enlever soi-même à la hauteur d'une voûte par le moyen des Poulies à Mouffles ; on a vû aussi dans l'art. 3. du Schol. du Th. 20. comment cet homme le peut aussi seul par le moyen d'un Criq : voici presentement comment il le peut faire encore par le moyen de la Vis sans fin. Il n'a qu'à attacher la cage de cette Machine fermement au bord ou au dedans du panier dans lequel il se veut mettre, en sorte qu'il ait la liberté de tourner la Manivelle, & par son moyen la Vis & la Roue avec son rouleau ; attacher ensuite sur ce Rouleau la corde déja attachée au haut de la voûte ; se mettre

après cela dans le panier ; & tourner la Manivelle de la Machine, qui peut être très-légere avec beaucoup d'effet; la corde s'entortillant ainsi autour du Rouleau ; enlevera cet homme vers la voûte. Car le present Th. 35. fait voir que pour cela il faudra beaucoup moins de force à cet homme que lui, le panier, la machine & la corde n'auront ensemble de pesanteur. Cela seroit encore plus commode, si la corde attachée par un bout au panier, & par l'autre à la machine, passoit par dessus une poulie attachée par sa chape à la voûte, d'où elle revînt se rouler par l'autre bout sur le rouleau de la machine.

Fig. 245. 246. II. Tout cela seroit encore plus facile, si la machine étoit composée de plusieurs Vis sans fin, engrenées dans autant de roues à dents, qui eussent toutes des pignons, excepté la derniere, sur le rouleau de laquelle la corde doit se rouler ; & dans lesquels pignons toutes ces Vis s'engrenassent aussi chacune dans chacun, excepté la premiere à manivelle, qui ne doit s'engrener que dans la premiere des roues à dents : le tout de la maniere qu'on le voit dans la Fig. 243. & qu'on le va voir dans le suivant Th. 36. qui fera voir aussi combien il seroit plus facile à cet homme de s'enlever soi-même par le moyen de cette machine representée dans la Fig. 246. que par le moyen de l'autre representée dans la Fig. 245. Soit donc.

THEOREME XXXVI.

Fig. 246. *La puissance R. soûtenant un poids quelconque Q par le moyen de plusieurs Vis engrenées dans des roues dentées, & dans leurs pignons, comme l'on voit dans la Fig. 246. & comme on le va expliquer ; l'on aura toûjours* $R. Q :: AB \times EC \times HK \times LN \times ST \times VX. Z \times CP \times EG \times LK \times MN \times TX.$ *La démonstration va déterminer les lignes dont ces produits sont faits.*

DEMONSTRATION.

I. Soient plusieurs Vis DAGP, $\beta E\gamma K$, $\lambda M\mu T$, de grosseurs à volonté, & de pas de telles grandeurs qu'on voudra, mobiles autour de leurs axes fixes GD, $\beta\gamma$, $\lambda\mu$; &

qui s'engrenent dans autant de roues dentées $\epsilon P\delta$, $\nu K\pi$, $\chi T\omega$, mobiles aussi sur leurs centres fixes C, L, X; ayant toutes des pignons, excepté la derniere, qui n'a qu'un rouleau YV, sur lequel se file la corde YQ, à laquelle pend le poids Q. Pour plus d'universalité soit d'inégales grosseurs chacune des Vis qui s'engrenent à la fois chacune dans le pignon d'une roue, & entre les dents de l'autre, telles que sont les Vis $\beta E\gamma K$, $\lambda M\mu T$, dont la premiere est plus grosse en sa partie $\beta E\phi$, qui s'engrene dans le pignon de la roue $\epsilon P\delta$, & plus menue en sa partie $\phi K\gamma$, qui engrene dans la roue $\nu K\varpi$; la seconde au contraire plus menue en sa partie $\lambda M\Psi$, qui engrene dans le pignon de cette roue $\nu K\pi$, & plus grosse en sa partie $\Psi T\mu$, qui engrene dans la roue $\chi T\omega$; & ainsi de tant d'autres Vis, & de roues dentées à pignons, qu'on voudra supposer entre cette derniere Vis $\chi T\omega$ à rouleau YV, & la premiere Vis GAD à manivelle DFR, par le moyen de laquelle & de tous ces engrenemens la puissance R soûtient le poids Q en équilibre avec elle.

II. Cette Machine étant ainsi conçûe, imaginons des centres C, L, X, par les dents P, E, K, M, T, les rayons CP, CE, LK, LM, XT, qui rencontrent les cylindres des Vis en P, E, K, M, T, desquels points (excepté du premier P) soient aussi imaginées EG, KH, MN, TS, perpendiculaires en G, H, N, S, aux axes $\beta\gamma$, $\lambda\mu$, des Vis ausquelles ces points E, K, M, T, appartiennent.

Soient aussi appellées P, E, K, M, T, les forces ou les résistances aux points marquez de ces lettres; & Z, la circonference du cercle décrit du rayon RO perpendiculaire en O à l'axe GD prolongé de la premiere Vis DAGP, à la manivelle de laquelle la puissance R est appliquée en R, & dont AB est un des pas.

III. Cela posé, le Th. 33. le Corol. 2. du Th. 34. & le Corol. 3. du Th. 35. donneront R. P : : AB. Z.

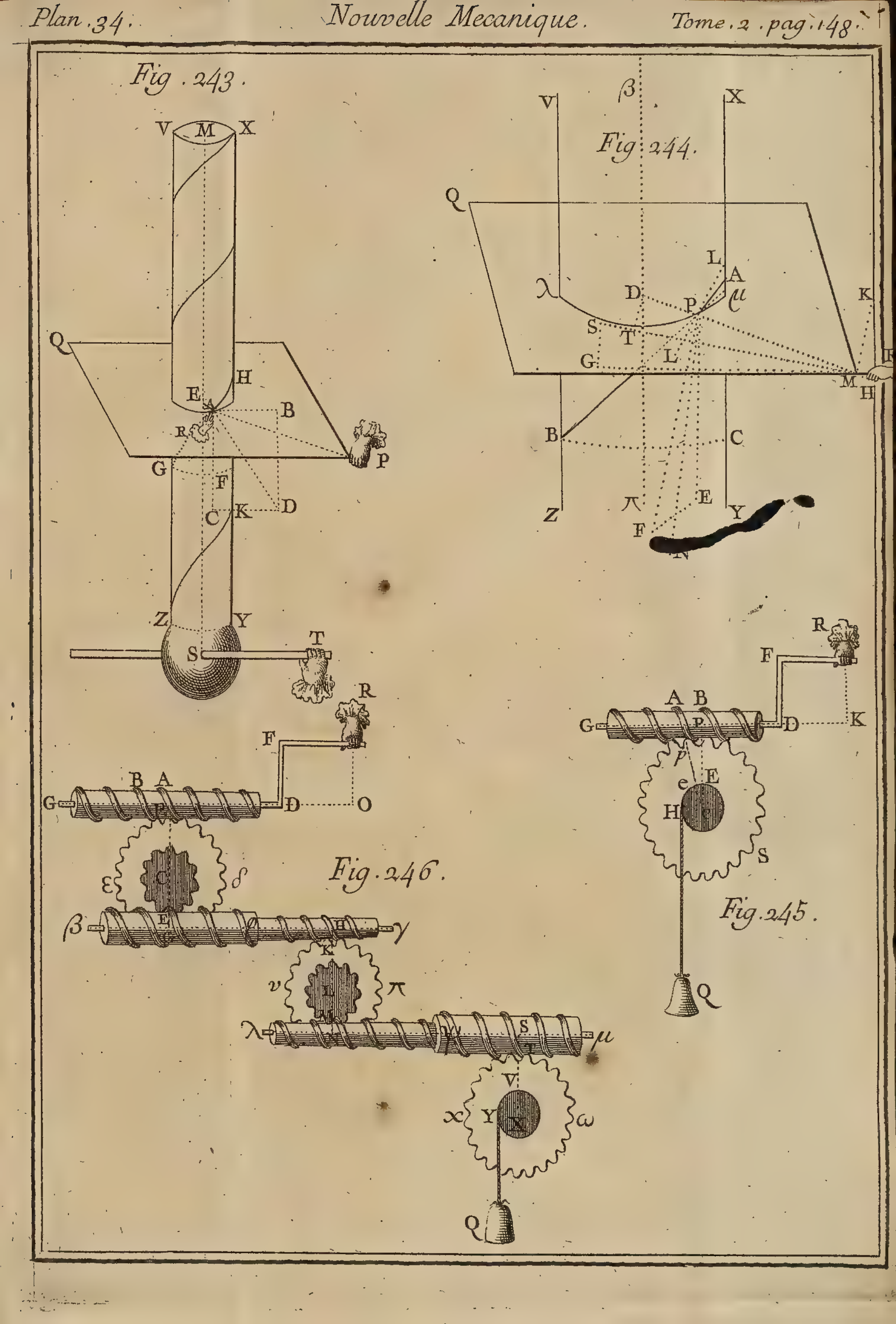
Le Cor. 1. du Th. 19. donnera aussi
P. E : : CE. CR.
E. K : : HK. EG.
K. M : : LM. LK.
M. T : : ST. MN.
T. Q : : XV. XT.

Donc (en multipliant par ordre) R. Q : : AB×CE×HK×LM×ST×XV. Z×CR×EG×LK×MN×TX. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Donc si les Vis $\beta E\gamma K$, $\lambda M\mu T$, étoient par tout chacune de même grosseur ; ayant alors EG=KT, MN=ST ; l'on auroit aussi pour lors R. Q : : AB×CE×LM×XV. Z×CR×LK×TX. c'est-à-dire, qu'alors la puissance R seroit au poids Q, comme le produit des rayons de tous les pignons & du rouleau, multipliez entr'eux, & par un des pas AB de la premiere Vis DAGP, est au produit des rayons de toutes les roues ; multipliez entr'eux, & par la circonference Z du cercle qui auroit pour rayon la distance RO de la puissance R à l'axe GDO de cette même Vis DAGP.




Fig. 243.
Fig. 244.
Fig. 245.
Fig. 246.



SECTION VIII.

Du Coin.

LE Coin étant beaucoup moins propre à mouvoir qu'à fendre des corps durs, & le Principe que j'exposai en 1687. au jugement des Connoisseurs dans le *Projet* de cette Mécanique-ci me paroissant applicable sans peine à cette Machine de la maniere que je l'appliquois aux autres, pour en donner un essai, & dans une aussi grande universalité que celle à laquelle je les élevai ; je négligeai de parler de celle-ci dans ce Projet. Cependant comme il s'agit de l'executer, & de rendre cette Mécanique ou Statique complete, le rang que l'on donne d'ordinaire au Coin parmi les Machines élementaires, propres à faciliter les mouvemens, peut-être à cause de ceux de séparation qu'il facilite entre les parties des corps à fendre, m'engage à traiter pareillement ici de cette Machine.

DEFINITION XXX.

J'appelle en general *Coin* un corps dur de figure quelconque, propre à entrer par force dans un autre corps dur, & à le fendre ainsi en deux. On fait d'ordinaire le Coin en Prisme triangulaire, tel que ABEFCD (Fig. 247.) dont les bases paralleles opposées AEB, DFC, sont deux triangles isosceles égaux & semblables ; desquels un, par exemple, AEB, mû parallelement à lui-même suivant AD perpendiculaire à son plan, décriroit ou traceroit ce Coin. Le parallelogramme ABCD en est appellé la *Tête* ou la *Base* ; la droite EF en est appellée le *Tranchant*, lequel y est parallele à cette base ou tête ; & les deux parallelogrammes opposez BEFC, AEFD, dont ce tranchant est la section commune, s'appellent les *Faces* ou les *Côtez* du Coin. Fig. 247.

D'ordinaire on n'exprime ce Coin qu'en profil par son triangle générateur AEB, dont la pointe E en exprime le *tranchant*; sa base AB exprime celle du Coin ou sa tête; les côtez AE, BE, de triangle expriment ceux de ce Coin ou ses *faces*; & la hauteur de ce triangle, c'est-à-dire, la distance de sa pointe E à sa base AB, est elle-même la *hauteur* de ce Coin. C'est pour cela qu'il s'appellera ici isoscelle comme ce triangle, pour le distinguer des autres Coins de figures quelconques, dont nous allons parler, & que nous ne representerons ainsi qu'en profil, pour moins d'embarras de lignes dans les Figures.

DEFINITION XXXI.

On appellera ici *Résistance absolue* d'un corps à rompre, à casser, ou à fendre en quelqu'endroit que ce soit, ce que les fibres de ce corps en feroient à se casser ou à se détacher toutes à la fois en cet endroit : mais parce qu'on peut douter qu'il y ait aucun corps dont les fibres cassent ou se détachent ainsi toutes à la fois à l'endroit où il se romproit, de quelque maniere qu'on le rompît, même en le tirant suivant sa longueur; nous appellerons en general *Résistance de Tenacité*, ou *Résistance totale* des fibres d'un corps, ce que celles qui s'opposent à sa rupture, en font toutes ensemble à la force qui tend à le rompre, ou à le fendre, soit que vaincues par cette force, elles cassent ou se détachent toutes à la fois, ou seulement les unes après les autres, en prêtant successivement jusqu'à certaines longueurs avant que de se casser ou de se détacher, en quelque proportion de longueurs qu'elles prêtent jusqu'à ce terme d'alongement. Enfin nous appellerons *Résistances des côtez de la fente* d'un corps à fendre par le moyen d'un Coin, ce que ces côtez de la fente, retenus ensemble par la résistance des fibres qui s'opposent à leur séparation, en font aux efforts des côtez du Coin contr'eux pour les écarter malgré ces fibres, & les forcer ainsi de permettre à ce Coin d'entrer plus avant dans le corps à fendre.

REMARQUE.

Je ne sçais point d'Auteur qui ait recherché la force du Coin sur d'autre que sur l'isoscelle ; je n'en sçais non plus aucun qui avant M. Descartes l'ait consideré indépendamment de toute autre Machine : de tous ceux qui ont parlé des proprietez du Coin avant cet Auteur, je n'en sçais point qui n'ayent rapporté la force de cette Machine à celle du Levier, ou à la résistance du plan incliné, en prenant la force du Coin pour celle d'un coup dont il seroit frappé perpendiculairement à sa base, ou (ce qui revient au même) pour celle dont il tend à s'enfoncer dans le corps à fendre.

I. Les premiers ont regardé les côtez du Coin comme des Leviers, dont les uns ont mis les appuis à la pointe de ce Coin, & les autres à l'entrée de la fente qu'il fait dans le corps à diviser : mais ne sçachant à quelles distances de chacun de ces appuis supposez, ils devoient considerer la force employée pour enfoncer le Coin & la résistance du corps à fendre, ils n'en ont pû conclure aucun rapport entre cette résistance & cette force.

II. Quant à ceux qui ont regardé les côtez du Coin comme des plans inclinez, ils ne nous ont donné guéres plus de lumiere : la plûpart se contentent aussi d'expliquer la question sans la décider ; & les autres, en la décidant, se partagent en deux sentimens. Il y en a parmi eux qui disent qu'à l'instant d'équilibre entre la force dont on frappe le Coin perpendiculairement à sa tête, & la résistance du corps à fendre, cette force du Coin est toûjours à cette résistance, comme la demi-base de ce Coin est à sa hauteur ; d'autres prétendent que c'est comme sa demi-base à un de ses côtez.

III. Enfin ceux qui ont consideré le Coin indépendamment de toute autre Machine, se trouvent encore de deux sentimens differens : les uns croyent qu'à l'instant d'équilibre entre la force du Coin & la résistance du corps à fendre, cette force est toûjours à cette résistance comme la

base du Coin est à sa hauteur ; & d'autres soûtiennent que c'est comme la plus grande largeur de la fente à sa profondeur. Ce qui est encore tout different ; puisque ceux-ci ne veulent pas que la pointe, ou le tranchant du Coin aille jusqu'au fond de la fente, ni par consequent que la base du Coin soit à sa hauteur comme la largeur de la fente est à sa profondeur.

IV. Outre ces Auteurs, il y en a encore qui considerant d'abord le Coin indépendamment de toute autre Machine, & le faisant ensuite dépendre du Levier, disent que suivant chacune de ces deux manieres, la force du Coin est à la résistance du corps à fendre comme la base de ce Coin est à la somme de ses côtez ; ce qui s'accorde avec le second des sentimens du précedent art. 2.

V. La diversité de tous ces sentimens fait déja voir qu'il y a là du paralogisme, de quelque côté qu'il soit, & en quelque sens (*Déf.* 30.) que le mot de *Résistance* y soit employé : on en jugera par les Th. 39. 40. qui tant pour les résistances rélatives (*Déf.* 1. 22. 31.) que pour les absolues, comprendront en general tous les cas possibles de cette question, c'est-à-dire, toutes les configurations possibles des Coins avec toutes les directions imaginables de la force qui les frappe ou les pousse, soit que ces côtez enfoncent, ou non, jusqu'au fond de la fente du corps à diviser. On va commencer par le rapport de cette force absolue (*Déf.* 31.) aux résistances rélatives (*Déf.* 22.) des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoissance de ce rapport dépend celle de cette force absolue (*Déf.* 1. 22. 31.) aux résistances rélatives des parties du corps à fendre, que le Coin tend à écarter l'une de l'autre ; parce que de la connoissance de ce rapport dépend celle du rapport de cette force absolue du Coin à la résistance absolue du corps à fendre, & aussi pour voir en quel sens les sentimens précedens sont vrais ou faux.

Ne craignant rien tant que d'offenser qui que ce soit, je n'ai nommé jusqu'ici aucun des Auteurs que j'ai fait voir s'être

mépris,

mépris ; excepté M. Borelli, & le P. Vannius, que j'ai été forcé de dire dans la réflexion italique qui précede le Corol. 1. du Th. 1. être de ce nombre, ne pouvant faire sentir leurs méprises dans ce qu'ils ont dit de contraire à ce que j'ai établi ci-dessus, sans citer leurs paroles pour les suivre pied à pied, & consequemment sans citer leurs Livres, qui les auroient également decelez. Sans cela j'aurois tû leurs noms, comme j'ai tû ceux des Auteurs que j'ai refutez jusqu'ici dans cet Ouvrage sur leurs simples propositions : c'est pour cette derniere raison que je ne nomme point ici non plus ceux dont je viens de rapporter les sentimens sur le Coin, lesquels je vas faire voir être les uns faux, & les autres trop limitez.

THEOREME XXXVII.

De quelque maniere qu'un Coin quelconque AEB soit poussé Fig. 2[illegible] [illegible]50. 251. *dans la fente HRK d'un corps δελμ à fendre ; ce qu'il employe de force pour diviser ainsi ce corps, est toûjours dirigé suivant une ligne droite qui passe par l'angle ou la pointe R de la fente, & par un point D, d'où l'on peut toûjours mener deux perpendiculaires aux côtez HR, KR, de cette fente HRK, en des points H, K, où le Coin AEB rencontre ces côtez de la fente, en quelque rapport que cette direction DR divise l'angle HRK de la fente.*

DEMONSTRATION.

Il est visible qu'un Coin AEB, quel qu'il soit, & de quelque force ou maniere qu'il soit poussé, ne tend à fendre un corps δελμ qu'en vertu (*Déf.* 22.) des *Momens* égaux en sens contraires qu'il cause aux côtez HR, KR, de la fente HRK, dans laquelle on le suppose, par les efforts perpendiculaires (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9.) qu'il fait contr'eux pour les écarter l'un de l'autre ; puisque si ces *Momens* étoient inégaux, leur difference ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier δελμ dans le sens du plus fort de ces deux *Momens*, & nullement à le diviser ou fendre. Donc tout ce que le Coin AEB employe de force (que

j'appelle G) à fendre ce corps, doit être ſuivant une direction DG, telle que cette force G ſe puiſſe décompoſer en deux autres (que j'appelle M, N, ſuivant DM, DN, perpendiculaires aux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ce Coin les rencontre; & qu'il en réſulte des *Momens* égaux à ces côtez HR, KR, de la fente; c'eſt-à-dire (*Déf.* 22.) en ſorte qu'il en réſulte M×HR=N×KR; & conſequemment M. N :: KR. HR. Or la force G ſuivant DG eſt (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) à chacune des deux M, N, dans leſquelles elle ſe décompoſe, comme cette diagonale DG du parallelogramme DMGN, eſt à chacun de ſes côtez correſpondans DM, DN; ce qui donne auſſi M. N :: DM. DN. Donc on aura toûjours ici DM. DN :: KR. HR. Ce qui donnant DM×HR=DN×KR, fait voir (*Lem.* 12.) que la direction DG de la force G employée par le Coin AEB à fendre le corps δελμ, doit paſſer par l'angle R de la fente HRK, & par quelque point D d'où l'on puiſſe mener deux perpendiculaires DM, DN, aux deux côtez HR, KR, de la fente HRK en des points H, K, où ces côtez ſoient rencontrez par le Coin AEB, en quelque rapport que cette direction DR de la force G toute employée à fendre le corps δελμ, diviſe l'angle HRK de la fente dans laquelle le Coin AEB tend à s'enfoncer de cette force G. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Si l'on imagine un cercle qui paſſe par les trois points H, R, K, il ſuit de-là que ſon diamétre mené du point R, en rencontrera la circonference en un autre point D, d'où l'on pourra toûjours mener deux perpendiculaires DM, DN, aux côtez HR, KR, de la fente HRK, par les deux points H, K, où l'on ſuppoſe que ces deux côtez ſont rencontrez par le Coin AEB.

THEOREME XXXVIII.

Soit un coup de marteau ΦOF d'une direction quelconque FP, donné en F sur la base AB de tel coin AEB qu'on voudra, en équilibre avec la résistance que les côtez HR, HK, de la fente HRK du corps à fendre δελμ, dans laquelle ce coup tend à enfoncer ce Coin, font à s'écarter davantage, ou avec ce que ces côtez HR, KR, font d'effort pour se rapprocher l'un de l'autre, s'ils ont du ressort. Soit en F une perpendiculaire FΠ à la base AB du Coin, laquelle FΠ soit rencontrée en C par le diamétre RD prolongé du cercle imaginé par trois points H, R, K, desquelles le second R soit la pointe ou le fond de la fente HRK; & les deux autres H, K, deux quelconques de ceux où le Coin AEB rencontre les deux côtez HR, KR, de cette fente, ausquels côtez les droites DH, DK, seront ainsi perpendiculaires. Enfin sur ces perpendiculaires DH, DK, prolongées soient les côtez DM, DN, d'un parallelogramme MN, dont la diagonale DG de grandeur arbitraire, soit sur DR prolongée à volonté. Fig. 248. 249. 250. 251.

Cela fait, je dis qu'en cas d'équilibre entre la force absolue du coup de marteau ΦOF suivant FP, & les résistances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HRK du corps δελμ à fendre; cette force absolue du coup de marteau ΦOF, suivant FP, sera toûjours à la somme de ces résistances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HRK de ce corps, comme le produit du quarré du sinus total par la diagonale DG du parallelogramme DMGN, sera au produit des sinus des complemens des angles PFΠ, ΠCZ, multipliez entr'eux, & par la somme DM+DN des côtez DM, DN, de ce parallelogramme DMGN.

DEMONSTRATION.

I. Il est visible (*Lem. 3. Corol. 6.*) que de la force absolue du coup de marteau ΦOF suivant FP en F sur la base AB du Coin AEB, il en résultera une autre à ce Coin suivant FΠ perpendiculaire à cette base AB; & que de

celles-ci il en résultera aussi une à ce même Coin AEB suivant CR, ou (*Th.* 38.) DG, de laquelle il en résultera pareillement deux autres suivant DM, DN, directement contraires aux résistances en H, K, des côtez HR, KR, de la fente HKR du corps à fendre; la somme desquelles résistances sera la totale que ces côtez de cette fente HRK font au Coin en ces points H, K. Pour plus de brieveté & de netteté ou clarté, voici les noms de toutes ces forces, & des sinus précedens, après avoir fait des points quelconques P, Π, pris à volonté sur FP, FΠ, les perpendiculaires PQ en Q sur FΠ, & Πβ en β sur CR prolongée à volonté.

Forces	Absolue du coup de marteau ΦOF suivant FP,	F.
	Résultante de F suivant FΠ ou CΠ,	C.
	Résultante de C suivant CR ou DG,	G.
	Résultante de G suivant DM,	M.
	Résultante aussi de G suivant DN,	N.
Résistances	En H,	H.
	En K,	K.
	Totale en H, K,	R=H+K.
Sinus	Total,	Q.
	De l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau sur AB,	P.
	De l'angle CΠβ,	Π.

II. Cela posé, on verra (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) que la force absolue (F) du coup de marteau en F suivant FP sur la base AB du Coin AEB, est à ce que ce coup fait d'impression suivant FΠ sur cette base, & consequemment à ce qu'il en résulte de force (C) à ce Coin suivant FΠ ou CΠ, comme FP est à FQ; & consequemment aussi (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le sinus total (Q) de l'angle droit FQP est au sinus (P) de l'angle FPQ ou BFP d'incidence du coup de marteau ΦOF sur la base AB du Coin AEB; c'est-à-dire, que suivant les noms précedens (*art.* 1.) on aura ici F. C :: Q. P.

III. On verra de même (*Lem.* 3. *Cor.* 6.) que la force (C) ſuivant FΠ ou CΠ, réſultante de la force (F) du coup de marteau ΦOF, donné ſuivant FP ſur la baſe AB du Coin AEB, eſt à ce qu'elle en cauſe (G) à ce Coin ſuivant CR ou DG, comme CΠ eſt à Cβ; & conſequemment (*Lem.* 8. *Corol.* 2.) comme le ſinus total (Q) de l'angle droit CβΠ eſt au ſinus (Π) de l'angle CΠβ; c'eſt-à-dire, que l'on aura ici C. G : : Q. Π. Donc ayant déja (*art.* 2.) F. C : : Q. P. l'on aura ici (en multipliant par ordre) F. G : : Q^2. P×Π.

IV. Preſentement regardant (*art.* 1.) la force (G) ſuivant CR ou DG, comme composée de deux autres ſuivant DM, DN, avec leſquelles le Coin AB tend à écarter l'un de l'autre les deux côtez HR, KR, de la fente HRK, dans laquelle le coup de marteau tend à enfoncer ce Coin; ces deux perpendiculaires (*Hyp.*) DM, DN, en H, K, à ces deux côtez HR, KR, de la fente HRK, font voir (*Lem.* 3. *Cor.* 6.) que ce que le Coin AEB a de force (G) ſuivant DG, eſt à chacune de celles (M, N) qu'il exerce contre chacun de ces deux côtez HR, KR, comme la diagonale DG eſt à chacun des côtez correſpondans DM, DN, du parallelogramme DMGN; c'eſt-à-dire, G. M : : DG. DM. Et G. N : : DG. DN. Ce qui donne G. M+N : : DG. DM+DN. Donc ayant (*art.* 3.) F. G : : Q^2. P×Π. l'on aura ici (en multipliant entr'elles ces deux dernieres analogies par ordre). F. M+N : : Q^2×DG. P×Π× DM+DN.

V. Or les efforts (M, N,) du Coin ſuivant DM, DN, perpendiculaires (*Hyp.*) en H, K, aux faces ou côtez HR, KR, de la fente HRK, étant ainſi directement oppoſez à ceux que font en ces points H, K, ces deux côtez de la fente, ou aux réſiſtances qu'ils lui font (en ces points) à s'écarter davantage l'un de l'autre, & en équilibre (*Hyp.*) avec ces réſiſtances en H, K, ſont égaux (*Ax.* 4.) à ces mêmes réſiſtances (H, K,) chacun à chacune; c'eſt-à-dire (*art.* 1.) M=H, & N=K; d'où réſulte M+N= H+K (*art.* 1.) =R, réſiſtance totale que les côtez HR,

KR, de la fente HRK font en H, K, aux efforts perpendiculaires (M, N,) que le Coin AEB, frappé en F suivant FP, fait contr'eux en H, K. Donc (*art.* 4.) F. R : : $Q^2 \times DG$. $P \times \Pi \times \overline{DM + DN}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Or la démonstration du Th. 38. donne HR. KR : : DN. DM. d'où résulte HR. $\overline{HR + KR}$: : DN. $\overline{DM + DN}$. de sorte qu'ayant DG. DN : : DG. DN. l'on aura ici (en multipliant par ordre) $DG \times HR$. $DN \times \overline{HR + KR}$: : DG. $\overline{DM + DN}$. Donc (en multipliant les antecedens de cette analogie par Q^2, & les consequens par $P \times \Pi$) l'on aura pareillement $Q^2 \times DG \times HR$. $P \times \Pi \times DN \times \overline{HR + KR}$: : $Q^2 \times DG$. $P \times \Pi \times \overline{DM + DN}$ (*démonstr. art.* 5.) : : F. R. c'est-à-dire, F. R : : $Q^2 \times DG \times HR$. $F \times \Pi \times DN \times \overline{HR + KR}$.

COROLLAIRE II.

Si l'on mene HL perpendiculaire en Δ sur DR, & qui prolongée rencontre en L le côté RK de la fente HRK, prolongé aussi, s'il est nécessaire ; les triangles DKR, LΔR, rectangles (*Hyp.*) en K, Δ, ayant l'angle DRL commun, auront les angles KDR, ΔLR, égaux entr'eux. Par la même raison les angles HDR, ΔHR, des triangles DHR, HΔR, rectangles (*Hyp.*) en H, Δ, seront égaux entre-eux. Par consequent ayant ainsi les angles ΔLR ou HLR $=$ NDG, LHR $=$ MDG $=$ NDG, les triangles DNG, LRH, seront semblables entr'eux, & donneront HL. LR : : DG. DN. Donc en substituant les deux premiers termes de cette analogie à la place des deux derniers dans la derniere du précedent Corol. 1. l'on aura ici F. R : : $Q^2 \times HL \times HR$. $P \times \Pi \times LR \times \overline{HR + KR}$.

COROLLAIRE III.

Si presentement on suppose que la direction DR de la

force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\iota\lambda\mu$, partage également en deux l'angle ARK de la fente : alors les angles (*Hyp.*) droits DKR, DHR, & en Δ, rendant KR=HR=LR, & HΔ=ΔL, la derniere analogie du précedent Corol. 2. se changera ici en F. R : : $Q^2 \times HL.\ P \times \Pi \times \overline{HR + KR}$: : $2Q^2 \times H\Delta.\ 2 \times P \times \Pi \times HR$: : $Q^2 \times H\Delta.\ P \times \Pi \times HR$. pour tous les cas du present Th. 38. ce qui, dans ceux de la Figure 248. où les côtez du Coin touchent par tout ceux de la fente, donnera aussi F. R : : $Q^2 \times H\Delta.\ P \times \Pi \times HE$. Fig. 248.

COROLLAIRE IV.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente soit divisé par la direction DR de la force G avec laquelle le Coin AEB tend à diviser le corps $\delta\iota\lambda\mu$, supposons que la direction FP du coup de marteau φOF sur la base AB de ce Coin, soit suivant FΠ perpendiculaire à cette base. Cette hypothese, qui confond FP avec FΠ, rendant ainsi l'angle FPQ droit, comme l'est (*Hyp.*) FQP, & consequemment aussi leurs sinus P, Q, égaux entr'eux.

1°. Les deux dernieres analogies des Cor. 1. 2. se changeront ici en F. R : : $Q \times DG \times HR.\ \Pi \times DN \times \overline{HR + KR}$. Et en F. R : : $Q \times HL \times HR.\ \Pi \times LR \times \overline{HR + KR}$. en quelque rapport que l'angle HRK de la fente soit divisé par la direction CR ou DR de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\iota\lambda\mu$, de quelque maniere que les côtez de ce Coin rencontrent ceux de la fente.

2°. Les deux dernieres analogies du Corol. 3. dans lequel on suppose que DR divise en deux également l'angle HRK de la fente, se changeront de même ici pour cette hypothese du Corol. 3. en F. R : : $Q \times H\Delta.\ \Pi \times HR$. de quelque maniere encore que les côtez du Coin rencontrent ceux de la fente ; & en F. R : : $Q \times H\Delta.\ \Pi \times HE$. lorsque les côtez du Coin AEB touchent par tout ceux de la fente HRK.

COROLLAIRE V.

Fig. 249. 251.

Outre la direction FP du coup de marteau φOF confondue avec la perpendiculaire FΠ à la base AB du Coin AEB soit cette perpendiculaire Fπ aussi confondue avec la direction CR de la force (G) employée par ce Coin pour fendre le corps δελμ ; laquelle direction CR ainsi perpendiculaire en F à cette base AB, divise en deux également l'angle HRK de la fente de ce corps δελμ : le tout comme dans les Fig. 249. 251. où le Coin AEB est isoscele, & sa base AB parallele à HL, qui est ici HK, divisée perpendiculairement en deux parties égales en F, comme celle-ci en Δ, par RD prolongée jusques-là. Ce cas, qui est en tout celui qu'on suppose d'ordinaire, rendant non seulement F=Q comme dans le précedent Corollaire 2. mais encore, pour la même raison, Π=Q, changera pour ici (Fig. 249. 251.) les analogies du nomb. 2. du Corol. 4. en F.R :: HΔ. HR. d'où résulte F.R :: AF. AE :: AB. 2×AE. pour le cas de la Fig. 249.

Cela fait voir que dans ce cas-ci (qui est celui de l'hypothese ordinaire) d'un Coin isoscele AEB enfoncé dans une fente isoscele HRK d'un corps δελμ à fendre, & frappé ou poussé perpendiculairement à sa base AB en son milieu F suivant une direction FR qui divise en deux également l'angle HRK de la fente du corps à fendre, comme dans les Fig. 246. 248. la force absolue F, dont ce Coin AEB est ainsi frappé ou poussé, est toûjours à la résistance R, que les côtez HR, KR, de la fente lui font ensemble aux points H, K, marquez ci-dessus, comme la demi-largeur HΔ de cette fente HRK est à un de ses côtez H, ou, comme sa largeur entiere HK est à la somme HR + KR de ses côtez, soit que ce Coin ne rencontre cette fente qu'en ces points H, K, comme dans la Fig. 251. ou qu'il la touche par tout jusqu'au fond, comme dans la Fig. 249.

D'où l'on voit que lorsque ce Coin isoscele AEB touche par tout jusqu'au fond cette fente isoscele HRK, comme

dans

dans la Fig. 249. la force absolue F, dont on le suppose ici frappé ou poussé perpendiculairement à sa base AB en son milieu F, est toûjours à la résistance R, que lui font ensemble les côtez HR, KR, de cette fente HRK, comme la demi-base AF de ce Coin AEB est à un de ses côtez AE conformément au second sentiment de l'art. 2. de la Remarque qui est entre la Déf. 30. & le Th. 38. ou comme la base entiere AB de ce Coin est à la somme AE+BE de ses deux côtez, conformément aussi au sentiment de l'art. 4. de la même Remarque, lequel revient à celui-là.

SCHOLIE.

I. C'est ainsi que le précedent Corol. 5. justifie le second sentiment de l'art. 2. & celui de l'art. 4. de la Remarque précedente; lesquels reviennent au même, auquel revient aussi celui (bien entendu) d'un illustre Auteur, dont voici les paroles: *Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi, sunt ad vim mallei in Cuneum, ut progressus Cunei secundùm determinationem vis à malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem quâ partes ligni cedunt Cuneo secundùm lineas faciebus Cunei perpendiculares.*

II. Quant au premier sentiment de l'art. 2. & aux deux de l'art. 3. de la Remarque précedente; sçavoir, qu'*à l'instant d'équilibre entre la force dont on frappe le Coin, & la résistance du corps à fendre, cette force est toûjours à cette résistance comme la demi-base du Coin à sa hauteur*, selon le premier de ces trois sentimens; *comme la base entiere du Coin à sa hauteur*, selon le second; & *comme l'ouverture de la fente à sa profondeur*, suivant le troisiéme, qui ne suppose pas, comme les deux autres, que le Coin touche par tout jusqu'au fond les deux côtez de la fente, & seulement qu'il les rencontre à l'entrée de l'ouverture de cette fente. L'Auteur du premier de ces trois sentimens n'en rapporte aucune raison; ainsi l'on ne sçauroit dire ce qui l'a fait s'y meprendre. Les Auteurs des deux autres tirent la leur de cette maxime, qu'*il y a toûjours équilibre dans*

les Machines, lorsque les vîtesses prises suivant les directions des forces y sont en raison reciproque de ces forces. Cette maxime bien entendue est vraye ; mais ces Auteurs se sont mépris dans la détermination de ces directions des vîtesses, des côtez de la fente du corps à fendre : ils les ont prises paralleles à la base du Coin, au lieu qu'elles y sont perpendiculaires à ces côtez de la fente dans laquelle on le pousse, comme son action l'est sur ces mêmes côtez ; ce qui rend aussi ces vîtesses perpendiculaires aux côtez du Coin, lorsqu'il touche par tout jusqu'au fond ceux de la fente, ou du moins lorsqu'il les touche aux endroits où tombent ces perpendiculaires, lorsque les côtez de la fente sont courbes.

Fig. 250. 251. III. Au reste, dans les Fig. 250. 251. je n'ai consideré les côtez HR, KR, de la fente HRK rencontrez seulement en deux points H, K, par le Coin AEB, que pour justifier, si je l'eusse pû, le second sentiment de l'art. 3. de la Remarque précedente, dépendant de cette supposition. Fig. 248. 249. 250. & 251. Mais si l'on veut que dans ces Fig. 250. 251. H, K, soient des parties communes au Coin AEB & à la fente HRK, comme la compressibilité des corps le doit faire penser ; alors DM, DN, perpendiculaires à ces parties H, K, de la fente, se touvant aussi perpendiculaires aux côtez du Coin dans ces deux cas comme dans tous les autres, si l'on prolonge dans tous HΔ jusqu'à la rencontre en θ du côté EB du Coin, aussi prolongé, s'il est nécessaire ; les angles (*Hyp.*) droits DHE, DKB, & Δ, qui rendent les angles $H\theta E = GDN$ & $\theta HE = GDM = DGN$, rendant ainsi les triangles HEθ, GND, semblables entr'eux, on aura ici en general pour tous les cas $H\theta . HE + \theta E :: DG . GN + DN :: DG . DM + DN$. Donc,

1°. L'analogie generale du present Th. 38. démonstr. art. 5. donnera ici $F . R :: Q^2 \times H\theta . P \times \Pi \times \overline{HE + \theta E}$. pour tous les cas. Ce qui,

2°. Dans le cas du Cor. 3. où DR divise en deux également l'angle HRK de la fente du corps δελμ, se change

en F. R :: $Q^2 \times H\theta$. $2 \times P \times \Pi \times HE$ :: $Q^2 \times H\Delta$. $P \times \Pi \times HE$. Ce qui,

3°. Dans le cas du nomb. 2. du Corol. 4. où l'on suppose de plus la direction FP du marteau confondue avec FΠ perpendiculaire à la base AB du Coin, se change en F. R :: $Q \times H\Delta$. $\Pi \times HE$. Ce qui,

4°. Dans le cas du Corol. 5. qui, outre tout cela, suppose dans les Fig. 249. 251. FΠ aussi confondue avec CR, c'est-à-dire, toutes les lignes FP, FΠ, CR, confondues en une FR au milieu F de la base AB du Coin isoscele AEB, se change en F. R :: HΔ. HR. pour ces deux Fig. 249. 251. ainsi qu'on l'a déja vû pour la seule Fig. 246. dans le Corol. 5. cette derniere hypothese rendant comme là $Q = \Pi$. Fig. 249. 251.

IV. Quoique dans les Fig. 250. 251. je n'aye consideré le Coin AEB comme rencontré seulement en deux points H, K, & non en des parties communes, par les côtez de la fente HRK du corps δελμ à fendre, que pour justifier, si je l'eusse pû, le second des sentimens de l'art. 3. de la Remarque précedente; ce n'est pas qu'on ne puisse considerer avec l'Auteur de ce sentiment, le Coin comme ainsi rencontré par les côtez de la fente à son entrée ou ailleurs, en prenant le tout mathématiquement, & comme si le corps à fendre étoit incompressible au point H, K, & incapable de ceder ailleurs qu'en R. Car quoique le ressort qu'on lui peut supposer en ce point R, tendant à en rapprocher l'un de l'autre les côtez HR, KR, de la fente HRK suivant des perpendiculaires en H, K, à ces côtez de la fente, & obliques à ceux AE, BE, du Coin AEB, tendît à rejetter ce Coin, & à le faire ressortir de cette fente, comme un noyau est forcé de sortir d'entre les doigts entre lesquels il est pressé; il est visible que l'effort du coup de marteau ΦOF sur la base ou la tête AB de ce Coin AEB, le pourroit retenir dans cette fente HRK malgré ce ressort; & que l'équilibre de ce coup de marteau avec la résistance des côtez de cette fente de tel corps qu'on voudra, pourroit se faire sur ces points ma- Fig. 250. 251.

thématiques H, K, de même que s'ils étoient des parties communes aux côtez de ce Coin AEB, & à ceux de la fente HRK que ceux-là toucheroient en ces points. Ce qui fait voir que cette ſuppoſition de l'Auteur du ſecond ſentiment de l'art. 3. de la Remarque précedente, eſt mathématiquement poſſible ; & qu'ici le Coin ſans parties communes avec les côtez de la fente du corps à fendre, ne laiſſeroit pas à l'inſtant qu'il ſeroit frappé, de faire des efforts contr'eux, capables de produire l'équilibre ſuppoſé, s'il étoit aſſez fortement frappé pour cela ; puiſqu'il les empêcheroit ainſi de ſe rapprocher l'un de l'autre, & en ſoûtiendroit tellement toute la réſiſtance, ou toute la tendance à ſe rapprocher en vertu de leur reſſort, que pouſſé ou frappé plus fortement que cet équilibre ne requiert, il les forceroit de s'écarter l'un de l'autre, & la fente de s'augmenter pendant l'inſtant que ce Coin ſeroit ainſi pouſſé ou frappé. Il eſt vrai que la compreſſibilité phyſique des corps permettroit à ce Coin d'enfoncer ces points H, K, & de s'y faire ainſi deux parties communes à ſes côtez, & à ceux de la fente qui en ſeroient touchez en ces points ; mais cela n'empêche pas la poſſibilité mathématique dont il eſt ici queſtion.

Ajoûtez à cela que deux parties en H, K, ou ailleurs, communes aux côtez du Coin AEB, & à ceux de la fente HRK, mathematiquement polies, comme on les ſuppoſe d'ordinaire, & mêmes telles qu'on voudra, fuſſent-elles de toute la longueur des côtez de la fente, ne rendroient pas l'équilibre entre la force du Coin & la réſiſtance des côtez du corps à fendre plus poſſible que ne le rendroient les deux points mathématiques communs H, K, des Fig. 250. 251. dont il eſt ici queſtion ; puiſque le reſſort ou l'effort des côtez HR, KR, de la fente HRK pour ſe rapprocher l'un de l'autre, tendroit autant à en faire ſortir le Coin qui les toucheroit en ces parties communes, que s'il ne les rencontroit qu'aux ſeuls points mathématiques H, K : de ſorte que ſi dans la pratique le Coin reſte dans la fente après le coup reçû du marteau, ou de maſſe, ce

n'eſt pas l'effet d'un ſimple contact en des parties communes ; mais de l'âpreté ou de l'inégalité des côtez du Coin & de la fente, dont ceux-là s'accrochent avec ceux-ci par l'engrenement entr'elles de leurs parties inégalement avancées, leſquelles enfoncées par force les unes entre les autres, y demeurent embaraſſées.

V. C'eſt pour cela qu'en fait de conſideration mathématique, où les côtez du Coin & de la fente du corps à fendre, ſont regardez comme mathématiquement polis, il ne peut y avoir d'équilibre entre la force du Coin & la réſiſtance des côtez élaſtiques du corps à fendre, qu'à l'inſtant que le Coin eſt frappé ou pouſſé d'une force la plus grande qui puiſſe être ſoûtenue par toute la réſiſtance de ce corps à être diviſé par ce Coin, ſoit que ce Coin en rencontre les côtez de la fente ſeulement en des points H, K, ou en des parties communes quelconques : auſſi eſt-ce-là l'état dans lequel nous l'avons ſuppoſé juſqu'ici.

VI. La conſideration du Coin AEB ſoûtenu en équilibre entre les côtez HR, KR, de la fente HRK, comme entre deux plans inclinez, fait aſſez voir (*Lem.* 3. *Corol.* 8. 9. *&* *Th.* 26. *part.* 1.) que pour cet équilibre il faut que les efforts du Coin contre ces deux côtez HR, KR, de la fente du corps à fendre, leurs ſoient perpendiculaires en deux points H, K, communs à eux, & à ceux AE, BE, de ce Coin, ſoit qu'ils le ſoient auſſi, ou non, à ces côtez du Coin ; & qu'ainſi l'on a eu raiſon ci-deſſus de prendre DM, DN, perpendiculaires en H, K, aux côtez HR, KR, de la fente HRK pour les directions des forces exercées par le Coin contre ces côtez de la fente en vertu de ſa force G ſuivant DG, ſans ſe mettre en peine ſi ces directions DM, DN, ſont auſſi perpendiculaires comme dans les Fig. 248. 249. ou non, comme dans les Fig. 250. 251. aux côtez AE, BE, de ce Coin AEB. Fig. 248. 249. 250. 251.

Un Levier chargé d'un poids entre ſes deux extrêmitez ſoûtenues ſur deux plans inclinez, fait encore voir que pour l'équilibre d'un Coin avec la réſiſtance des côtez de la fente d'un corps à fendre, entre leſquels ce Coin eſt

soûtenu comme entre deux plans inclinez ; il est seulement requis que les directions des efforts de ce Coin contre ces côtez de la fente dans laquelle il tend à s'enfoncer, leur soient perpendiculaires en des points communs à eux & aux côtez du Coin, & qu'il est tout-à-fait indifferent que ces directions soient aussi perpendiculaires à ces côtez du Coin. C'est pour cela que la difficulté de trouver la situation requise à ce Levier ainsi chargé pour demeurer en équilibre entre deux plans inclinez donnez de position, ne consiste pas à trouver ce que le poids dont ce Levier est chargé, lui fait d'impressions perpendiculaires à ses extrêmitez, cela étant facile ; mais seulement à trouver deux points de ces deux plans (un de chacun) sur lesquels ce poids doit faire des efforts perpendiculaires à ces plans, lesquels deux points soient distans entr'eux de la longueur du Levier chargé de ce poids, pour être soûtenu sur eux en équilibre entre ces deux plans.

Fig. 248. 249. VII. Quant aux forces suivant QP, βΠ, dont la premiere suivant QP parallele à la base AB du Coin AEB, résulte immédiatement du coup oblique du marteau ΦOF suivant FP sur cette base AB dans les Fig. 248. 249. & dont la seconde suivant βΠ résulte de même de l'autre suivant FΠ, résultante immédiatement aussi de la premiere suivant FP ; on n'en a fait ci-dessus aucun usage, parce qu'elles ne tendent aucunement à fendre le corps δελμ, mais seulement à le faire avancer, & même à le renverser du côté où elles tendent toutes deux, si elles tendent vers le même, comme dans la Fig. 248. ou bien du côté vers lequel tend la plus forte des deux, si elles tendent vers des côtez differens comme dans la Fig. 250. à moins qu'il ne soit bien retenu en ελ par sa pesanteur ou autrement.

THEOREME XXXIX.

Fig. 248. 249. 250. 251. *Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent Th. 38. dans lequel la force absolue du coup de masse ou de marteau ΦOF suivant FP sur la base AB du Coin AEB, &*

été appellée F, d'où résultoit l'employée G suivant CR ou DG par ce Coin pour fendre le corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ *en vertu des deux autres forces M, N, dans lesquelles celle-ci (G) se décomposoit suivant DM, DN, perpendiculaires en H, K, aux côtez HR, KR, de la fente HRK, & qui étoient ainsi toutes employées contre ces deux côtez de la fente pour les écarter l'un de l'autre: cela, dis-je, supposé tel qu'on l'a trouvé dans la démonstration du précedent Th. 38. soit Z le centre du premier mouvement que les deux parties* $\delta RZ\epsilon$, $\mu RZ\lambda$, *du corps à fendre, auroient en cedant au Coin AEB; & de ce point Z soient menées ZS, ZY, perpendiculaires en S, Y, sur DM, DN, prolongées. Ensuite par le centre (quel qu'il soit) de tenacité ou de résistance des fibres qui s'opposent à ce premier mouvement autour de Z, soit imaginé un plan VX perpendiculaire en T à DR prolongée; dans laquelle on va faire voir que cet appui Z doit toûjours être.*

Tout cela posé, si outre les noms assignez dans la démonstration du précedent Th. 38. l'on appelle T la tenacité ou la résistance actuelle que les fibres en équilibre avec l'effort du Coin contr'elles, font alors à se casser ou à se détacher toutes à la fois, comme dans le Systême de Galilé sur la Résistance des corps à être rompus, ou successivement suivant tel autre systême qu'on voudra; l'on aura toûjours en general $F. T :: Q^2 \times DG \times TZ . 2 \times P \times \Pi \times DM \times SZ$.

DEMONSTRATION.

I. Quelque systême qu'on adopte sur la maniere dont les fibres qui tiennent les parties $\delta RZ\epsilon$, $\mu RZ\lambda$, du corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre, attachées ensemble depuis R vers $\epsilon\lambda$, cederoient ou casseroient, si leur résistance étoit surmontée par les efforts M, N, du Coin AEB contr'elles; il est visible qu'il y a un certain point T entre R & $\epsilon\lambda$, dans lequel si tout ce que ces fibres font de résistance à ce Coin, étoit ramassé, cette résistance totale de toutes ces fibres ensemble, seroit la même contre lui, que lorsqu'elles sont répandues entre R & $\epsilon\lambda$: de sorte que ce point T (que j'appelle *centre de Tenacité* ou *de Résistance* de toutes ces fibres

en équilibre avec l'effort du Coin) peut être regardé comme le seul ou les deux parties δRZε, μRZλ, du corps à fendre, sont attachées ensemble, & de même que si elles y étoient pressées ou tirées l'une contre l'autre suivant TV, TX, en ligne droite parallele à HL, par deux forces V, X, directement opposées suivant cette ligne VX, égales entr'elles, & égales ensemble à tout ce que les fibres répandues depuis R vers ελ, font de résistance en équilibre avec l'effort que le Coin AEB fait pour les rompre, & les obliger ainsi à le laisser entrer plus avant dans le corps à fendre; laquelle résistance totale étant appellée T, l'on aura ici $T = V + X$.

II. De plus si l'on considere, comme dans la démonstration du Th. 36. que de quelque maniere ou force que le Coin AEB soit poussé, il ne tend à fendre le corps δελμ qu'en vertu de *Momens* égaux qu'il doit imprimer pour cela aux parties δRZε, μRZλ, de ce corps qu'il tend à écarter l'une de l'autre; puisque la difference des *Momens* inégaux ne tendroit qu'à mouvoir ce corps entier δελμ dans le sens du plus fort de ces mêmes *Momens*, & non à le diviser ou le fendre: on verra que, quel que soit le point ou appui Z sur lequel fixe ces deux parties δRZε, μRZλ, du corps à fendre commenceroient à se mouvoir en cas que les efforts M, N, du Coin AEB contr'elles, l'emportassent sur la résistance des fibres qui les tiennent attachées ensemble, ce point Z doit, pour l'équilibre ici supposé, être tel (*Théor. 21. Corol. 6.*) qu'il rende $M \times SZ = N \times YZ$; & consequemment YZ. SZ :: M. N (*démonstr. du Th. 37.*) :: KR. HR. c'est-à-dire, YZ. SZ :: KR. HR. Or il est évident que cela ne sçauroit être, à moins que ce point ou appui Z ne soit quelque part dans la droite DR continuée, laquelle (à cause des perpendiculaires supposées HR, SZ, sur DM prolongée; & KR, YZ, sur DN aussi prolongée) rend YZ. KR :: DZ. DR :: SZ. HR. & consequemment YZ. SZ :: KR. HR. Donc l'appui Z des *Momens* causez aux parties δRZε, μRZλ, du corps à fendre, par les efforts M, N, que le Coin AEB fait sui-

vant

vant DM, DN, pour les séparer l'une de l'autre, doit être quelque part dans la droite DR continuée du côté de la base ελ du corps δελμ à fendre par delà le centre T de tenacité ou de résistance de tout ce qu'il y a de fibres qui s'y opposent à l'instant de leur équilibre avec ce que ce Coin exerce de forces pour diviser ce corps δελμ malgré ces fibres, en quelque point T, entre R & ελ, que soit alors le centre de leur résistance totale, & quel que soit dans cet espace la trace de la séparation qui s'y feroit entre les parties δRZε, μRZλ du corps δελμ à fendre, si l'effort du Coin AEB l'emportoit sur cette résistance totale T des fibres qui retiennent ces deux parties attachées ensemble.

III. Cela étant, & VX, qu'on suppose passer par le centre de cette résistance, étant (*Hyp.*) perpendiculaire à RZ, comme SZ, YZ, le sont (*Hyp.*) à DM, DN, prolongées; l'équilibre ici supposé entre les efforts M, N, (suivant DM, DN,) du Coin AEB, & cette résistance totale T équivalente (*art.* 1.) à deux forces égales V, X, avec chacune desquelles chacun de ces efforts M, N, seroit en équilibre sur l'appui Z, donnera (*Th.* 21. *Corol.* 6.) $M\times ZS = V\times TZ = X\times TZ = N\times YZ$, & consequemment $2\times M\times SZ = \overline{V+X}\times TZ$ (*art.* 1.) $= T\times TZ$; d'où résulte M.T :: TZ. 2×SZ. Or l'art. 4. de la démonstration du Th. 38. donne G. M :: DG. DM. Donc (en multipliant par ordre) G. T :: DG×TZ. 2×DM×SZ. Or l'art. 3. de la démonstration du Th. 38. donne de plus F. G :: Q^2. P×Π. Donc enfin (en multipliant encore par ordre) F. T :: $Q^2\times DG\times TZ$. $2\times P\times \Pi\times DM\times SZ$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Or suivant le Corol. 2. du Th. 39. les triangles LRH, DNG, ou GMD étant semblables entr'eux, l'on aura DG. DM :: HL. HR. Donc en substituant les deux derniers termes de cette analogie au lieu des deux premiers dans la derniere de l'art. 3. de la précedente démonstra-

tion, l'on aura auſſi en general $F. T. :: Q^2 \times HL \times TZ. 2 \times P \times \Pi \times HR \times SZ.$

COROLLAIRE II.

Si preſentement on ſuppoſe, comme dans le Corol. 3. du Th. 38. que la direction DRZ de la force G employée par le Coin AEB pour fendre le corps $\delta\varepsilon\lambda\mu$, diviſe également en deux l'angle HRK de la fente que ce Coin tend à y augmenter par les efforts M, N, ſuivant DM, DN, que cette force G (réſultante de l'abſolue F du marteau ou de la maſſe φOF) exerce perpendiculairement en H, K, contre les côtez HR, KR, de cette fente HRK; l'on aura ici comme là $H\Delta = \Delta L$, & conſequemment $HL = 2 \times H\Delta$. Ce qui pour ce cas-ci changera la derniere analogie du précedent Corol. 1. en $F. T. :: Q^2 \times H\Delta \times TZ. P \times \Pi \times HR \times SZ.$

COROLLAIRE III.

En quelque rapport que l'angle HRK de la fente ſoit diviſé par la direction DR de la force G, avec laquelle le Coin AEB tend à fendre le corps $\delta\varepsilon\lambda\mu$, ſupoſons (comme dans le Corol. 4. du Th. 39. que la direction FP du coup de marteau ou de maſſe φOF ſur la baſe AB de ce Coin, ſoit ſuivant $F\Pi$ perpendiculaire à cette baſe. Cette hypotheſe, qui confond FP avec cette perpendiculaire $F\Pi$, rendant ainſi $P = Q$, comme dans le Corollaire 4. du Th. 38.

1°. L'analogie du preſent Th. 39. ſe changera ici en $F. T. :: Q \times DG \times TZ. 2 \times \Pi \times DN \times SZ.$ en quelque rapport que l'angle HRK de la fente du corps à fendre, ſoit diviſé par la direction DR de la force G dont le Coin AEB tend à fendre ce corps $\delta\varepsilon\lambda\mu$.

2°. La derniere analogie de ſon Corol. 1. ſe changera ici en $F. T :: Q \times HL \times TZ. 2 \times \Pi \times HR \times SZ.$ quel que ſoit encore le rapport des parties de l'angle HRK diviſé par DR.

3°. L'analogie du Corol. 2. se changera pareillement ici en F. T :: Q×HΔ×TZ. Π×HR×SZ pour le cas de ce Corol. 2. où l'on suppose que DR divise en deux parties égales l'angle HRK de la fente que le Coin AEB tend à augmenter.

COROLLAIRE IV.

Outre la direction FP du coup de marteau confondue avec la perpendiculaire FΠ à la base AB du Coin AEB, comme dans le précedent Corol. 3. soit cette perpendiculaire FΠ aussi confondue avec la direction CR ou DR de la force G employée par ce Coin pour fendre le corps δελμ, comme dans le Corol. 5. du Th. 38. laquelle CR ainsi perpendiculaire en F à cette base AB, divise ici comme là en deux parties égales l'angle HRK de la fente de ce corps δελμ : le tout comme dans les Fig. 249. 250. dans lesquelles le Coin AEB est isoscele, & sa base AB parallele à HL, qui est ici HK, divisée perpendiculairement en deux parties égales en F, comme celle-ci l'est en Δ par RD prolongée jusques-là. Ce cas, qui en tout est celui qu'on suppose d'ordinaire, rendant non seulement F=Q, comme dans le précedent Corol. 3. mais encore pour la même raison Π=Q, ainsi que dans le Corol. 5. du Th. 38. changera pour ici (Fig. 249. 250.) l'analogie du nomb. 3. du précedent Corol. 3. en F. T :: HΔ×TZ. HR×SZ. D'où résulte F. T :: AF×TZ. AE×SZ :: AB×TZ. 2×AE×SZ :: AB×TZ. SZ×$\overline{AE+BE}$. pour le cas de la Fig. 250. Fig. 249. 250.

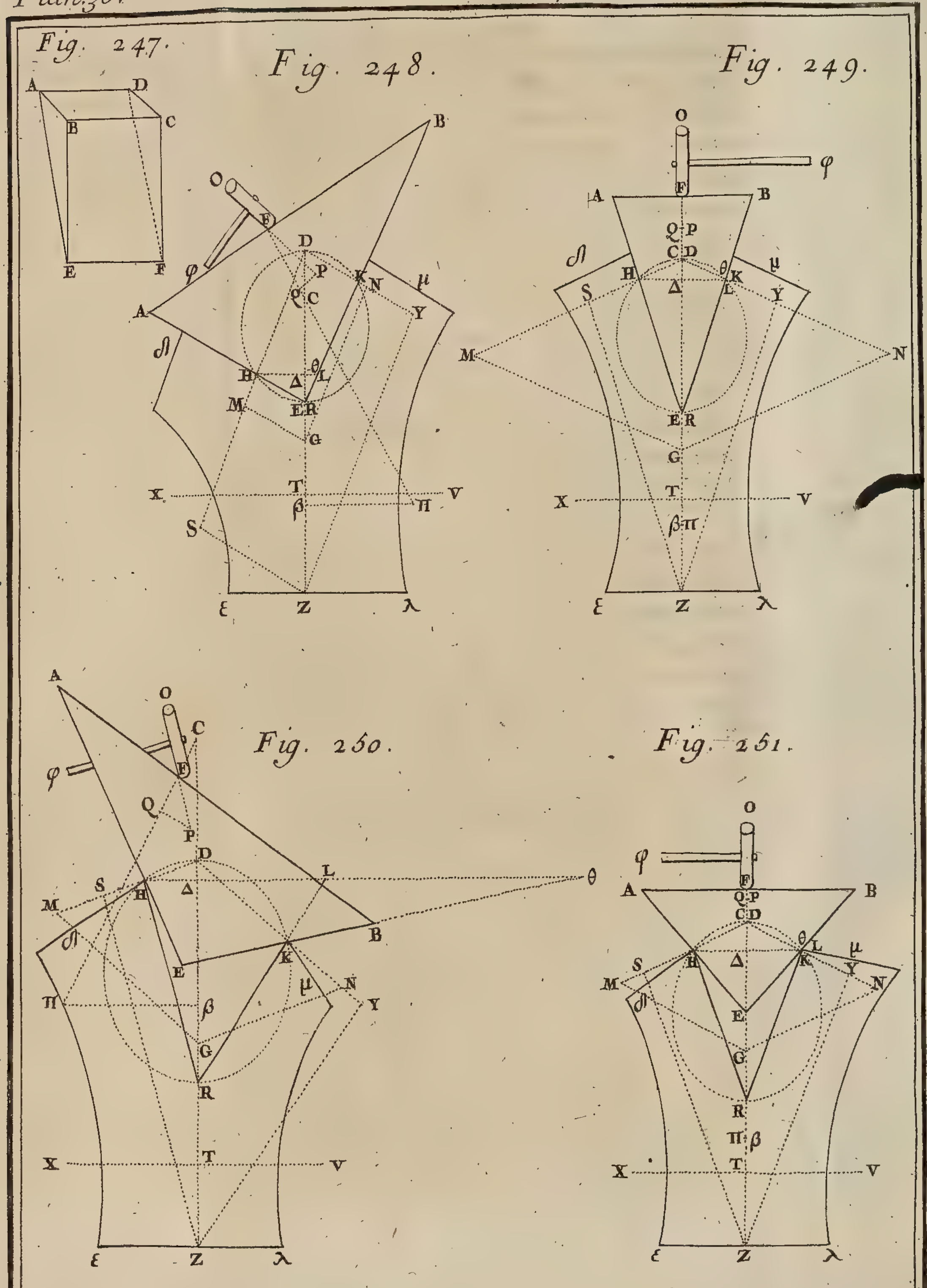
SCHOLIE.

La recherche qu'on vient de faire du rapport de la force du Coin F, qui frappe ou pousse le Coin AEB, à la résistance des fibres, qui en équilibre avec lui, tiennent malgré lui attachées ensemble les parties δRZε, μRZλ, du corps à fendre, ayant introduit les bras TZ, SZ, du Levier recourbé SZT dans les analogies du present Th. 39. & de ses Corollaires; il n'est pas surprenant qu'aucu- Fig. 248. 249. 250. 251.

ne de ces analogies ne ressemble à une de celle des sentimens rapportez dans la Remarque qui précede le Th. 37. aucun des Auteurs de ces sentimens n'ayant cherché ce rapport, mais seulement celui de la force du Coin aux *Momens* dont les côtez HR, KR, de la fente HKR du corps $\delta\epsilon\lambda\mu$ à fendre, résistent à la force du Coin AEB. Ce qui fait qu'aucun de ces sentimens ne peut être justifié dans le sens du present Th. 39. & que n'étant tous que dans l'hypothese & dans le sens du Corol. 5. du Th. 38. il n'y a que ce Corollaire qui les puisse justifier ; lequel pourtant n'en justifie que deux qui reviennent au même, ainsi qu'on l'a vû dans l'art. 1. du Scholie de ce Théoreme-là. D'où il faut necessairement conclure que les Auteurs des autres sentimens s'y sont mépris ; ce qui soit seulement dit pour que le Lecteur ne s'y méprenne pas après eux, & non pour les offenser, ne craignant rien tant que de faire de la peine à qui que ce soit. C'est pour cela (ainsi que j'en ai déja averti) que je ne nomme point ces Auteurs, ni même ceux des sentimens justifiez dans l'art. 1. du Scholie du Th. 38. lesquels pourroient aussi trouver mauvais que je fasse ici remarquer qu'ils n'ont touché qu'au cas le plus simple de ce Théoreme, rapporté dans son Corol. 5. la verité pouvant ainsi être mise à couvert sans offenser personne.

REMARQUE.

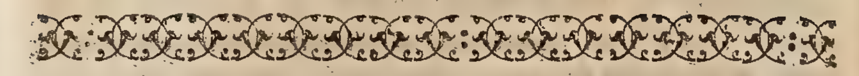
Au reste il est à remarquer que tout ce qu'on voit démontré dans les trois derniers Th. 37. 38. 39. pour le Coin prismatique triangulaire quelconque, exprimé en profil par le triangle rectiligne aussi quelconque AEB, qui en seroit le generateur à la maniere expliquée dans la Déf. 30. & pour une fente rectiligne HRK, dans laquelle on a supposé ce Coin, se démontrera de même par toutes autres figures de Coin & de fente qu'on voudra. Pour le voir, il n'y a qu'à imaginer le profil de ce nouveau Coin inscrit dans un triangle rectiligne, dont les côtez le touchent aux points H, K, ou ce Coin de figure quelconque


Fig. 247.
Fig. 248.
Fig. 249.
Fig. 250.
Fig. 251.

rencontrera les côtez quelconques de la fente, & au point F, où il sera rencontré par le marteau, ou par la masse φOF qui le frappera ; prendre ensuite ce triangle, tel que seroit AEB, si ce nouveau Coin lui étoit ainsi inscrit, pour le véritable Coin ; & les parties HE, KE, des côtez de ce Coin triangulaire pour ceux de la fente, si elle est curviligne ; auquel cas la pointe E de ce Coin sera toujours (*Th.* 36.) dans la direction DR de la force G, dont il tendra à fendre le corps δελμ. Cela conçû ou imaginé, tout le reste demeurant le même que dans les Fig. 248. 249. 250. 251. les démonstrations des Th. 37. 38. 39. & leurs Corollaires pour le Coin triangulaire AEB dans une fente rectiligne HRK, pour laquelle on prendra HEK, s'appliqueront de même à tout autre Coin de figure aussi quelconque, & à ce Coin rectiligne AEB dans une fente curviligne ou de côtez courbes. Les figures de ces nouveaux cas sont si aisées à imaginer, que ç'auroit été multiplier inutilement le nombre de celles-ci, que de les y ajoûter.







SECTION IX.

Corollaire general de la Théorie précedente.

DAns une Lettre écrite de Bâle le 26. Janvier 1717. M. (Jean) Bernoulli, après y avoir défini ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, de la maniere qu'on le va voir dans la définition suivante, m'annonça qu'*en tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement; la somme des Energies affirmatives sera égale à la somme des Energies negatives, prises affirmativement.*

Cette proposition me parut si generale & si belle, que, voyant que je la pouvois aisément déduire de la Théorie précedente, je lui demandai la permission qu'il m'accorda, de l'ajoûter ici avec la démonstration que cette Théorie m'en fournissoit, & qu'il ne m'envoyoit pas. La voici séparée pour toutes les Machines précedentes; la Théorie, qui en étoit achevée lorsque ce sçavant Mathématicien m'annonça cette proposition, ne m'ayant pas permis de la démontrer sur chacune de ces Machines en sa place, sans changer un très-grand nombre de citations répandues dans cette Théorie, & toutes celles des Figures qui auroient suivi la premiere des nouvelles qu'il y auroit fallu ajoûter dès la Section 2. ce qui m'auroit fort embarrassé, & exposé à de fausses citations, n'étant pas possible de n'omettre aucun de ces changemens. Pour l'intelligence de cette proposition de M. Bernoulli, & de la démonstration que la Théorie précedente en va fournir. Voici comment il s'expliquoit sur ce qu'il entendoit par le mot d'*Energie*, dans la Lettre où il m'annonçoit cette belle proposition.

DEFINITION XXXII.

Concevez (disoit-il) plusieurs forces differentes qui « agissent suivant differentes tendances ou directions pour « tenir en équilibre un point, une ligne, une surface, ou « un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le sy- « stême de ces forces un petit mouvement, soit parallele « à soi-même suivant une direction quelconque, soit au- « tour d'un point fixe quelconque: il vous sera aisé de « comprendre que par ce mouvement chacune de ces for- « ces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que « quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs ten- « dances perpendiculaires à la direction du petit mouve- « ment; auquel cas cette force, ou ces forces n'avance- « roient ni ne reculeroient de rien: car ces avancemens « ou reculemens, qui sont ce que j'appelle *vîtesses vir-* « *tuelles*, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de « tendance augmente ou diminue par le petit mouvement; « & ces augmentations ou diminutions se trouvent, si « l'on tire une perpendiculaire à l'extrêmité de la ligne « de tendance de quelque force, laquelle perpendiculaire « retranchera de la même ligne de tendance, mise dans la « situation voisine par le petit mouvement, une petite « partie qui sera la mesure de la *vîtesse virtuelle* de cette « force. «

Soit, par exemple, P un point quelconque dans le « systême des forces qui se soûtiennent en équilibre; F, une « de ces forces, qui pousse ou qui tire le point P suivant la « direction FP ou PF; P*p*, une petite ligne droite que dé- « crit le point P par un petit mouvement, par lequel la « tendance FP prend la situation *fp*, qui sera ou exacte- « ment parallele à FP, si le petit mouvement du systême « se fait en tous ses points parallelement à une droite don- « née de position; ou elle fera, étant prolongée, avec FP « un angle infiniment petit, si le petit mouvement du sy- « stême se fait autour d'un point fixe. Tirez donc PC per- « pendiculaire sur *fp*, & vous aurez C*p* pour la *vîtesse vir-* « Fig. 151.

» *tuelle* de la force F, en sorte que F×C*p* fait ce que j'appel-
» le *Energie*. Remarquez que C*p* est ou *affirmatif* ou *néga-*
» *tif* par rapport aux autres : il est *affirmatif*, si le point P
» est poussé par la force F, & que l'angle FP*p* soit obtus ;
» il est *négatif*, si l'angle FP*p* est aigu : mais au contraire si
» le point P est tiré, C*p* sera *négatif*, lorsque l'angle FP*p* est
» obtus ; & *affirmatif*, lorsqu'il est aigu. Tout cela étant
» bien entendu, je forme (dit M. Bernoulli) cette

PROPOSITION GENERALE.

THEOREME XL.

» *En tout équilibre de forces quelconques, en quelque maniere*
» *qu'elles soient appliquées, & suivant quelques directions*
» *qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement, ou*
» *immédiatement, la somme des Energies affirmatives sera*
» *égale à la somme des Energies négatives prises affirmative-*
» *ment.*

DEMONSTRATION.

Telle est la proposition de M. Bernoulli, rapportée au commencement de cette Section ; & voici comment la Théorie précedente en fournit la démonstration.

PARTIE I.

Pour l'équilibre d'un poids soûtenu avec des cordes seulement, par tant de puissances qu'on voudra, de directions quelconques ; & pour l'équilibre d'un corps choqué par plusieurs autres à la fois.

FIG. 253. 254. I. Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans la Fig. 71. du Th. 6. Corol. 20. c'est-à-dire, le poids K étant soutenu en équilibre par tant de puissances P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, appliquées (comme lui) à autant de branches de corde, sur lesquelles branches ou cordons soient AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles à ces puissances P, Q, R, S, T, &c. des extrêmitez desquelles proportionnelles tombent autant de perpendicu-

laires

laires Bb, Cc, Ee, Ff, Mm, &c. sur la direction AK du poids K prolongée de part & d'autre : cela, dis-je, étant ainsi dans les Fig. 253. 254. comme dans la Fig. 71. Th. 6. Corol. 20. soit prise de A vers K sur la direction AK du poids K, une partie quelconque Aa dans la Fig. 253, où les puissances P, Q, R, S, T, &c. tirent droit, sans s'appuyer sur rien ; & infiniment petite dans la Fig. 254. où les cordons de ces puissances sont appuyez sur des poulies β, λ, ϵ, ϕ, μ, &c. Du point a, sur les directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. de ces puissances P, Q, R, S, T, &c. soient autant de perpendiculaires ap, aq, ar, as, at, &c. qui rencontrent ces directions en p, q, r, s, t, &c.

Cela fait, il est visible que les triangles (*constr.*) rectangles Apa, AbB ; Aqa, AcC ; Ara, AeE ; Asa, AfF ; Ata, AmM, &c. ayant deux à deux (distinguez comme on les voit ici par la marque ;) leurs angles égaux A, sont semblables entr'eux pris ainsi deux à deux. Par consequent, en appellant b, c, e, f, m, &c. les forces suivant la direction AK ou Ae du poids K, pour ou contre ce poids, résultantes (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) des forces absolues des puissances P, Q, R, S, T, &c. suivant leurs directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. l'on aura suivant la part. 1. du Lem. 3. employée comme dans la démonstr. 2. du Th. 6,

$$Aa.\ Ap :: AB.\ Ab :: P.\ b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa.\ Aq :: AC.\ Ac :: Q.\ c = \frac{Q \times Aq}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ar :: AE.\ Ae :: R.\ e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa.\ As :: AF.\ Af :: S.\ f = \frac{S \times As}{Aa}.$$

$$Aa.\ At :: AM.\ Am :: T.\ m = \frac{T \times At}{Aa},$$

&c.

Donc $\frac{Q\times Aq + R\times Ar + S\times Aſ - P\times Ap - T\times At \pm \&c.}{Aa}$
$= c + e + f - b - m \pm$ &c. (*Th. 6. démonstr.* 2.) $=$ K; ce qui en ce cas d'équilibre donne $Q\times Aq + R\times Ar + S\times AS - P\times Ap - T\times At \pm \&c = K\times Aa$, ou $K\times Aa + P\times Ap + T\times At \pm \&c = Q\times Aq + R\times Ar + S\times Aſ \pm \&c.$

FIG. 253. 1°. Soit presentement tout le système de la Fig. 253. mû de maniere que son point A parcourant la partie quelconque A*a* de la direction AK du poids K, tous les cordons ou directions AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puissances P, Q, R, S, T, &c. demeurent toûjours paralleles chacune à soi-même; & que lorsque le point A sera en *a*, & le poids K descendu de la valeur de A*a* suivant sa premiere direction AK, ces autres directions ou cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. soient encore perpendiculaires en *a* aux mêmes lignes fixes *ap*, *aq*, *ar*, *aſ*, *at*, &c. ausquelles elles l'étoient en *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, &c. avant ce mouvement du point A, ou de tout le système de la presente Figure 253. Un tel mouvement faisant ainsi reculer ou avancer les puissances P, Q, R, S, T, &c. suivant ces directions, chacune suivant la sienne, des valeurs A*p*, A*q*, A*r*, A*ſ*, A*t*, &c. pendant que le poids K descend de la valeur de A*a* suivant la sienne: la Déf. 31. fait voir qu'en prenant ici A*a* pour la vîtesse virtuelle de ce poids K, l'on y aura A*p*, A*q*, A*r*, A*ſ*, A*t*, &c. pour les vîtesses virtuelles de ces puissances P, Q, R, S, T, &c. & que K×A*a*, P×A*p*, Q×A*q*, R×A*r*, S×A*ſ*, T×A*t*, &c. seront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puissances.

FIG. 254. 2°. Soit aussi mû tout le système de la Fig. 254. mais de maniere que son point A parcourant la partie infiniment petite A*a* de la direction AK du poids K, les cordons AB, AC, AE, AF, AM, &c. des puissances P, Q, R, S, T, &c. qui y sont appuyez sur les poulies fixes β, λ, ϵ, φ, μ, &c. passent de AβP, AλQ, AϵR, AφS, AμT, &c. en *a*βP, *a*λQ, *a*ϵR, *a*φS, *a*μT, &c. lesquelles secon-

des situations de ces cordons font avec les premieres, chacune avec sa correspondante, des angles Aβa, Aλa, Aϵa, Aμa, &c. infiniment petits, à cause de leur base commune Aa supposée infiniment petite par rapport à ses distances finies des sommets β, λ, ϵ, φ, μ, &c. de ces angles. Ce qui confondant les perpendiculaires infiniment petites ap, aq, ar, as, at, &c. supposées du point a sur les côtez Aβ, Aλ, Aϵ, Aφ, Aμ, &c. de ces angles avec les arcs infiniment petits, qui décrits de leurs sommets β, λ, ϵ, φ, μ, &c. comme centres, par ce point a, seroient compris entre leurs côtez, chacun entre les deux de chacun de ces angles, donne les differences infiniment petites Ap, Aq, Ar, As, At, &c. pour les quantitez dont les puissances P, Q, R, S, T, &c. reculeroient ou avanceroient ici suivant leurs directions, chacune suivant la sienne, pendant que le poids K y descendroit suivant la sienne AK de la valeur de la partie infiniment petite Aa de cette direction. D'où l'on voit, suivant la Déf. 31. qu'en prenant ici cette ligne infiniment petite Aa pour la vîtesse virtuelle de ce poids K, l'on y aura les infiniment petites Ap, Aq, Ar, As, At, &c. pour les vîtesses virtuelles de ces puissances P, Q, R, S, T, &c. & que K×Aa, P×Ap, Q×Aq, R×Ar, S×As, T×At, &c. y seront les Energies de ce même poids & de ces mêmes puissances.

L'on aura donc ici en general (*nomb.* 1. 2.) dans l'un & dans l'autre système des Fig. 253. 254. les produits K×Aa, P×Ap, Q×Aq, R×Ar, S×As, T×At, &c. pour les Energies du poids K & des puissances P, Q, R, S, T, &c. supposées en équilibre avec lui avant la rupture qu'on y a supposée faite par une force étrangere; desquels produits les lignes Aa, Ap, Aq, Ar, As, At, &c. qui expriment les vîtesses virtuelles de ce poids & de ces puissances, sont (*nomb.* 1.) quelconques (finies ou infiniment petites à volonté) dans la Fig. 253. & infiniment petites (*nomb.* 2.) dans la Fig. 254. Et desquelles Energies la Déf. 31. fait voir que les affirmatives sont K×Aa, P×Ap, T×At, &c. & les négatives sont Q×Aq, R×Ar, S×As, &c. dans le FIG. 253. 254.

mouvement supposé de l'un & de l'autre systême des Fig. 253. 254. Or avant les nomb. 1. 2. l'on a trouvé pour l'un & pour l'autre de ces systêmes K×A*a*+P×A*p*+T×A*t*+&c=Q×A*q*+R×A*r*+S×A*s*+&c. Donc en general dans l'un & dans l'autre systême du poids quelconque K, soûtenu en équilibre par tant de puissances quelconques P, Q, R, S, T, &c. qu'on voudra, avec des cordes seulement, ou appuyées sur des poulies fixes; la somme des Energies positives de ce poids & de ces puissances, est toûjours égale à la somme de leurs Energies négatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

Ce qu'on voit des Energies résultantes de l'équilibre rompu dans le précedent art. 1. *par un mouvement de A vers a suivant la direction AK du poids K, & en consequence de tout le systême de chacune des Fig.* 253. 254. *se trouvera de même des Energies résultantes de cet équilibre rompu par le mouvement de ce point A, suivant toute autre direction, & de tout le systême mû en consequence comme dans cet art.* 1. *Voici comment.*

FIG. 255. 256. II. Le poids K étant encore ici soûtenu en équilibre par tel nombre qu'on voudra de puissances P, Q, R, S, T, &c. avec des cordes seulement dirigées à volonté: le tout comme dans le précedent art. 1. soit presentement cet équilibre rompu dans chacune des Figures 255. 256. par le mouvement de A vers *a* suivant une direction quelconque *em*, & de tout le systême mû en consequence comme dans l'art. 1. sçavoir, de maniere que pendant que ce point A parcourra une partie A*a* quelconque dans la Fig. 255. & infiniment petite dans la Fig. 256. de cette direction *em*, les directions ou cordons AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. du poids K, & des puissances P, Q, R, S, T, &c. emportées avec le systême, demeurent toûjours paralleles chacun à soi-même, c'est-à-dire, à sa premiere situation dans la Fig. 256. comme dans la Fig. 253. nomb. 1. de l'art. 1. où passent toûjours par-dessus les mêmes poulies fixes δ, β, λ, ε, φ, μ, &c. dans la Fig. 256.

chacune par-dessus la sienne, comme dans la Fig. 254. nomb. 2. du même art. 1. de maniere, dis-je, que si du point *a* on imagine sur ces cordons ou directions AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. autant de perpendiculaires *ak*, *ap*, *aq*, *ar*, *aſ*, *at*, &c. qui les rencontrent prolongées en *k*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, &c. ces directions ou cordons soient encore perpendiculaires en *a* à chacune d'elles, lorsque le point A sera en *a* dans la Fig. 255. comme dans le nomb. 1. de l'art. 1. Fig. 253. où se trouvent en *aδ*, *aβ*, *aλ*, *aε*, *aφ*, *aμ*, &c. appuyez encore sur les poulies fixes δ, β, λ, ε, φ, μ, &c. de la Fig. 256. comme dans le nomb. 2. de l'art. 1. Fig. 254.

Cela posé, si suivant la Déf. 32. on prend ici A*a* pour la vîtesse virtuelle du point A, l'on y aura A*k*, A*p*, A*q*, A*r*, A*ſ*, A*t*, &c. pour les vîtesses virtuelles du poids K, & des puissances P, Q, R, S, T, &c. dans chacune des Fig. 255. 256. comme dans les Fig. 253. 254. nomb. 1. 2. de l'art. 1. Ce qui, suivant la même Déf. 32. donnera ici comme là K×A*k*, P×A*p*, Q×A*q*, R×A*r*, S×A*ſ*, T×A*t*, &c. pour les Energies de ce poids & de ces puissances.

Presentement si après avoir pris AN, AB, AC, AE, AF, AM, &c. proportionnelles au poids K, & aux puissances P, Q, R, S, T, &c sur leurs directions, on mene des extrêmitez N, B, C, E, F, M, &c. de ces proportionnelles autant de perpendiculaires N*n*, B*b*, C*c*, E*e*, F*f*, M*m*, &c. en *n*, *b*, *c*, *e*, *f*, *m*, &c. sur la direction *em* du mouvement supposé du point A, comme *ak*, *ap*, *aq*, *ar*, *aſ*, *at*, &c. le sont (*Hyp.*) en *k*, *p*, *q*, *r*, *ſ*, *t*, &c. sur ces directions prolongées; les triangles rectangles A*ka*, A*n*N; A*pa*, A*b*B; A*qa*, A*c*C; A*ra*, A*e*E; A*ſa*, A*f*F; A*ta*, A*m*M, &c. seront ici semblables deux à deux, comme dans l'art. 1. & pour la même raison que dans cet art. 1. de sorte que si l'on prend ici *n*, *b*, *c*, *e*, *f*, *m*, &c. pour les efforts suivant A*m* ou A*e*, résultans des absolus du poids K, & des puissances P, Q, R, S, T, &c. suivant leurs directions, l'on aura ici comme dans l'art. 1.

$$Aa. Ak :: AN. An :: K. n = \frac{K \times Ak}{Aa}.$$

$$Aa. Ap :: AB. Ab :: P. b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa. Aq :: AC. Ac :: Q. c = \frac{Q \times Aq}{Aa}.$$

$$Aa. Ar :: AE. Ae :: R. e = \frac{R \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa. Aſ :: AF. Af :: S. f = \frac{S \times Aſ}{Aa}.$$

$$Aa. At :: AM. Am :: T. m = \frac{T \times At}{Aa}.$$

&c.

Or les efforts n, b, m, &c. de A vers m ſuivant Am, étant ici directement contraires aux efforts c, e, f, &c. de A vers e ſuivant Ae en ligne droite (*Hyp.*) avec Am; & en équilibre avec ceux-ci : l'ax. 4. donnera ici $n + b + m +$ &c. $= c + e + f +$ &c. comme dans la démonſtr. 2. du Th. 6. Donc on aura ici $K \times Ak + P \times Ap + T \times At +$ &c. $=$ $Q \times Aq + R \times Ar + S \times Aſ +$ &c. Mais on vient de voir que les produits dont cette égalité eſt faite, ſont autant d'Energies du poids K, & des puiſſances P, Q, R, S, T, &c. ſuppoſées en équilibre avec lui. Donc ſuivant la Déf. 32. le premier membre de la même égalité étant tout d'Energies affirmatives, & le ſecond tout d'Energies négatives, ce cas d'équilibre donnera ici, comme dans l'art. 1. la ſomme des Energies affirmatives, égale à la ſomme des Energies négatives priſes affirmativement, quelque mouvement qu'on donne au ſyſtême. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

III. 1°. Si l'on veut preſentement que la direction Aa du point A ſoit celle du poids K, comme dans l'art. 1. cette hypotheſe, qui fait tomber a en k, rendant Ak = Aa, changera l'équation du précedent art. 2. en celle de cet art. 1. dans le cas duquel on ſera pour lors.

2°. Et si l'on veut que cette direction Aa du point A soit celle d'une quelconque des puissances P, Q, R, S, T, &c. par exemple, celle de la puissance P; cette hypothese rendant de même Ap=Aa, changera l'équation generale du précedent art. 2. en K×Ak+P×Aa+T×At+ &c. =Q×Aq+R×Ar+S×A$ſ$+&c. donc P×Aa sera pour lors l'Energie affirmative de la puissance P; & ainsi des autres puissances P, Q, R, S, T, &c.

3°. Si l'on veut presentement que la direction Aa du point A soit perpendiculaire à la direction d'une de ces puissances, ou du poids K, par exemple, à la direction de la puissance P; cette hypothese, qui fait tomber ap sur Aa rendant Ap=o, réduiroit l'équation generale du précedent art. 2. à K×Ak+T×At+&c.=Q×Aq+R×Ar+S×A$ſ$+&c. Ce seroit la même chose, si la corde ABP de la puissance P, étoit attachée à quelque clou ou crochet fixe en B, lequel suppléât par sa résistance cette puissance P; mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle décrit de ce centre B par A, devroit être infiniment petite, & consequemment aussi toutes les autres Ak, Aq, Ar, A$ſ$, At, &c. pour conserver la ressemblance des triangles qui, dans le précedent art. 2. ont donné l'égalité generale d'où résulte celle-ci.

4°. Enfin si dans les art. 1. 2. & dans les précedens nomb. 1. 2. 3. de celui-ci, on veut moins de puissances en équilibre avec le poids K, ou entr'elles, qu'on n'y en a supposé; il n'y aura qu'à y faire =o toutes celles qu'on en voudra rejetter, & alors toutes les équations de ces art. 1. 2. & des nomb. 1. 2. 3. de celui-ci se réduiront à celles de ce cas-ci pour chacune des hypotheses de ces art. 1. 2. & de ces nomb. 1. 2. 3. de celui-ci.

Voilà (art. 1. 2.) *pour les Energies d'un poids, & de tant de puissances qu'on voudra, qui le soûtiennent en équilibre avec des cordes seulement attachées ensemble toutes par un seul & même nœud. Voici dans les articles suivans pour les Energies de ce poids quelconque soûtenu encore par tel nombre*

de puissances qu'on voudra, avec une corde à plusieurs branches issues presentement de plusieurs nœuds à volonté.

FIG. 257. IV. Soit le poids quelconque K soûtenu encore en équilibre avec des cordes seulement par tel nombre qu'on voudra de puissances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S, &c. appliquées à autant de cordons de directions quelconques, issus presentement de tant de nœuds A, B, M, P, &c. qu'on voudra : le tout comme dans la Fig. 257.

1°. Sur le cordon AK du poids K soit prise depuis A vers K, une partie Aa de longueur arbitraire ; & du point a soient menées sur les cordons AC, AB, AM, AP, prolongés de ce côté-là, autant de perpendiculaires ac, $a\beta$, $a\mu$, $a\pi$; qui les rencontrent en c, β, μ, π.

2°. Après avoir pris sur le cordon AB, depuis B vers A, la partie Bb=Aβ, du point b soient menées sur les cordons EB, DB, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires be, $b\delta$, qui les rencontrent en e, δ.

3°. Après avoir pris sur le cordon BD depuis D vers B, la partie Dd=Bδ, du point d soient menées sur les cordons DF, GD, HD, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires df, dg, dh, qui les rencontrent en f, g, h.

4°. Après avoir pris sur le cordon AM depuis M vers A, la partie Mm=Aμ, du point m soient menées sur les cordons LM, NM, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires ml, mn, qui les rencontrent en l, n.

5°. Après avoir pris sur le cordon AP depuis P vers A, la partie Pp=Aϖ, du point p soient menées sur les cordons PS, QP, RP, prolongez de ce côté-là, les perpendiculaires ps, pq, pr, qui les rencontrent en s, q, r.

6°. Après tout cela soient appellées B, D, M, P, les forces avec lesquelles les cordons AB, BD, AM, AP, sont tirez suivant leurs longueurs par le concours des puissances appliquées aux extrêmitez de chacun d'eux.

V. Tout cela posé, l'art. 1. donnera,

1°. $K \times Aa + C \times Ac + P \times A\varpi = B \times A\beta + M \times A\mu$, ou $K \times Aa + C \times Ac = B \times A\beta + M \times A\mu - P \times A\varpi$.

2°.

2°. $B\times Bb = E\times Be + D\times B\delta$, ou (à cause que les nomb. 2. 3. de l'art. 4. donnent $Bb = A\beta$, $B\delta = Dd$) $B\times A\beta = E\times Be + D\times Dd$.

3°. $D\times Dd + F\times Df = G\times Dg + H\times Dh$, ou $D\times Dd = G\times Dg + H\times Dh - F\times Df$. De sorte qu'en substituant cette valeur de $D\times Dd$ dans la derniere équation du précedent nomb. 2. l'on aura $B\times A\beta = E\times Be + G\times Dg + H\times Dh - F\times Df$.

4°. $M\times Mm = L\times Ml + N\times Mn$, ou (à cause que le nomb. 4. de l'art. 4. donne $Mm = A\mu$) $M\times A\mu = L\times Ml + N\times Mn$.

5°. $P\times Pp + S\times PS = Q\times Pq + R\times Pr$, ou (à cause que le nomb. 5. de l'art. 4 donne $Pp = A\varpi$) $P\times A\varpi = Q\times Pq + R\times Pr - S\times Pf$.

Donc en substituant dans la seconde équation du précedent nomb. 1. les valeurs de $B\times A\beta$, $M\times A\mu$, $P\times A\varpi$, trouvées dans les nomb. 3. 4. 5. qui le suivent; l'on aura enfin $K\times Aa + C\times Ac = E\times Be + G\times Dg + H\times Dh - F\times Df + L\times Ml + N\times Mn - Q\times Pq - R\times Pr + S\times Pf$, ou $K\times Aa + C\times Ac + F\times Df + Q\times Pq + R\times Pr = E\times Be + G\times Dg + H\times Dh + L\times Ml + N\times Mn + S\times Pf$.

VI. Soit presentement tout le systême mû d'un mouvement parallele à AK dans tous ses points, lequel mouvement fasse décrire au point A une partie quelconque Aa de la direction AK du poids K. Il est visible (*art.* 4. & *Déf.* 32.) qu'en prenant Aa pour la vîtesse virtuelle de ce poids K.

1°. L'on aura Ac pour la vîtesse virtuelle de la puissance C, & $A\beta$, ou (*art.* 4. *nomb.* 2.) son égale Bb pour la vîtesse virtuelle de la force B, résultante du concours d'action des puissances E, F, G, H; & qu'ainsi la puissance E aura Be pour sa vîtesse virtuelle; & la force D résultante du concours des forces F, G, H, aura $B\delta$, ou (*art.* 4. *nomb.* 3.) son égale Dd pour sa vîtesse virtuelle; en consequence de laquelle Df, Dg, Dh, seront aussi les vîtesses virtuelles de ces puissances F, G, H.

2°. L'on aura de même $A\mu$, ou (*art.* 4. *nomb.* 4.) son égale Mm pour la vîtesse virtuelle de la force M résultan-

te du concours d'action des puissances L, N; & en consequence Ml, Mn, pour les vîtesses virtuelles de ces puissances L, N.

3°. L'on aura encore de même $A\varpi$, ou (*art.* 4 *nomb.* 5.) son égale Pp, pour la vîtesse virtuelle de la force P, résultante du concours d'action des puissances Q, R, S; & en consequence Pq, Pr, Ps, pour les vîtesses virtuelles de ces puissances Q, R, S. Et toûjours de même en quelque nombre qu'elles soient, & les nœuds aussi de leurs cordons.

VII. Puisque suivant les nomb. 1. 2. 3. du précedent art. 6. en prenant ici Aa pour la vîtesse virtuelle du poids K, l'on y aura Ac, Be, Df, Dg, Dh, Ml, Mn, Pq, Pr, Ps, pour les vîtesses virtuelles (contemporaines de Aa) des puissances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S; les produits $K\times Aa$, $C\times Ac$, $E\times Be$, $F\times Df$, $G\times Dg$, $H\times Dh$, $L\times Ml$, $N\times Mn$, $Q\times Pq$, $R\times Pr$, $S\times Ps$, exprimeront (*Déf.* 32.) les Energies de ce poids K, & de ces puissances C, E, F, G, H, L, N, Q, R, S, supposées en équilibre avec lui. Donc l'art. 4. venant de donner $K\times Ak + C\times Ac + F\times Df + Q\times Pq + R\times Pr = E\times Be + G\times Dg + H\times Dh + L\times Ml + N\times Mn + S\times Ps$; de laquelle égalité (suivant la Déf. 32.) le premier membre étant tout d'Energies affirmatives, & le second membre tout d'Energies negatives prises affirmativement, la somme des Energies affirmatives sera encore ici égale à la somme des Energies negatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

Il est à remarquer que cette égalité de sommes d'Energies du poids K & des puissances P, Q, R, S, T, &c. trouvée dans les précedens art. 1. & 7. Fig. 253. 255. dans le cas d'équilibre entre ce poids & ces puissances avec des cordes seulement, se trouvera de même entre les forces de plusieurs corps qui en choquent tous à la fois un autre, qui sans force ni action aucune de sa part, demeure en repos, nonobstant tous ces chocs simultanez. Voici comment.

Fig. 253. 255. VIII. Pour appliquer ce qui précede au choc des corps, imaginons-en presentement un à la place du point

ou nœud A des cordes précedentes, lequel ſans peſanteur ni action aucune de ſoi-même, ſoit choqué à la fois par autant d'autres corps qu'il y a ci-deſſus de puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. (en y prenant le poids K pour une de ces puiſſances, laquelle ſoit d'une force égale à la peſanteur de ce poids, & de même direction que lui) ſuivant leurs directions, directement à contre-ſens de ceux ſuivant leſquels ces puiſſances tirent ce point ou nœud A, & avec des forces égales à celles de ces puiſſances, en ſorte que chacun de ces corps choquans pouſſe le choqué en A avec une force égale à celle dont il eſt tiré directement à contre-ſens par la puiſſance dont ce corps choquant eſt ſuivant la direction.

Il eſt manifeſte (*Ax.* 2.) que puiſque (*Hyp.*) tous ces corps choquans pouſſent le choqué en A avec des forces égales & directement contraires à celles dont le nœud A eſt tiré par les puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. qu'on ſuppoſe ſuppléées par ces corps choquans, chacune par celui, qui de force égale à celle de cette puiſſance, ſuit la direction de cette même puiſſance à contre-ſens: tous ces chocs enſemble retiendroient le corps choqué en repos & en équilibre en A, comme ce nœud A y eſt retenu (*Hyp.*) par le concours de toutes ces puiſſances; & que quelque mouvement droit qu'on donnât alors à ce corps choqué, tel que celui qu'on a donné (*art.* 1. 6.) au nœud A dont ce corps choqué tient ici (*Hyp.*) la place, les vîteſſes virtuelles & les Energies de ces corps choquans ſeroient égales à celles de ces puiſſances K, P, Q, R, S, T, &c. c'eſt-à-dire, égales chacune pour chacun de ces corps choquans à celle de la puiſſance correſpondante, qu'il égaleroit (*Hyp.*) en force abſolue, & de laquelle il ſuivroit la direction à contre-ſens. Donc ayant trouvé ci-deſſus (*art.* 1. 7.) qu'en cas d'équilibre entre toutes ces puiſſances, la ſomme de leurs Energies affirmatives ſeroit toûjours égale à la ſomme de leurs Energies negatives affirmativement priſes, l'on aura pareillement ici (en cas d'équilibre entre les corps choquans qu'on y ſuppoſe agir

tous à la fois sur le corps choqué en A, comme les puissances dont ils suivent les directions à contre-sens, agissent sur ce nœud A, c'est-à-dire, en cas de repos de ce corps choqué, nonobstant tous les chocs qu'il recevroit à la fois de tous ces corps choquans) la somme des Energies affirmatives des corps choquans, égale à la somme de leurs Energies negatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

IX. Si le corps choqué en A, qu'on vient de supposer (*art.* 8.) sans aucune force ni action de sa part, en avoit quelqu'une avec laquelle les corps choquans le trouvassent déja en mouvement à l'instant qu'ils le choquent tous à la fois, & avec laquelle tous ces corps choquans fissent alors équilibre ; il n'y auroit qu'à regarder cette force propre ou ce mouvement du corps choqué, comme l'effet d'un nouveau corps (que j'appelle *choquant imaginaire*) qui l'auroit choqué avant tous ceux-là, & qui à l'instant de tous leurs chocs simultanez feroit comme s'il commençoit avec eux à pousser le corps choqué, lequel étant en ce cas comme s'il n'avoit plus ni force ni action de soi-même, & qu'il reçût tous ces chocs à la fois, tant des corps choquans effectifs, que de l'imaginaire, aura encore ici, comme dans le précedent art. 7. la somme des Energies affirmatives de tous ces corps choquans en équilibre entr'eux, égale à la somme de leurs Energies négatives prises affirmativement. Donc la force & la direction du corps choquant imaginaire étant (*Hyp.*) les mêmes que celles qu'avoit le corps choqué à l'instant qu'il l'a été par tous les autres à la fois, avec lesquels il est (*Hyp.*) demeuré en équilibre ; & consequemment l'Energie de ce corps choqué étant ainsi la même que celle du choquant imaginaire : l'on aura pareillement ici la somme des Energies affirmatives des corps choquans effectifs & du choqué, égale à la somme de leurs Energies négatives prises affirmativement. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

FIG. 255. *Cela* (art. 8. 9.) *démontré dans l'art.* 8. *dépendamment des puissances K, P, Q, R, S, T, &c. pourroit aussi l'être*

indépendamment d'elles, en raisonnant sur les forces & directions des corps choquans en équilibre entr'eux, comme l'on a fait dans les art. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. *Fig.* 253. *sur les forces & directions de ces puissances en équilibre entr'elles; & en rompant cet équilibre des corps choquans par un mouvement du corps choqué, & de tout le systême, semblable à celui qu'on a donné* (art. 1. 6.) *au nœud A, & tout le systême de ces puissances dont il a rompu l'équilibre. Mais cette autre démonstration indépendante des poids soûtenus avec des cordes seulement, seroit d'autant plus inutile, qu'elle reviendroit à celle du précedent art.* 8. *outre qu'elle exigeroit des Figures, qui ne feroient ainsi que multiplier inutilement le nombre de celles-ci: ceux qui voudront une telle démonstration, la pourront faire à l'imitation des précedentes; & les Figures en seront aisées à imaginer sur les Fig.* 253. 255.

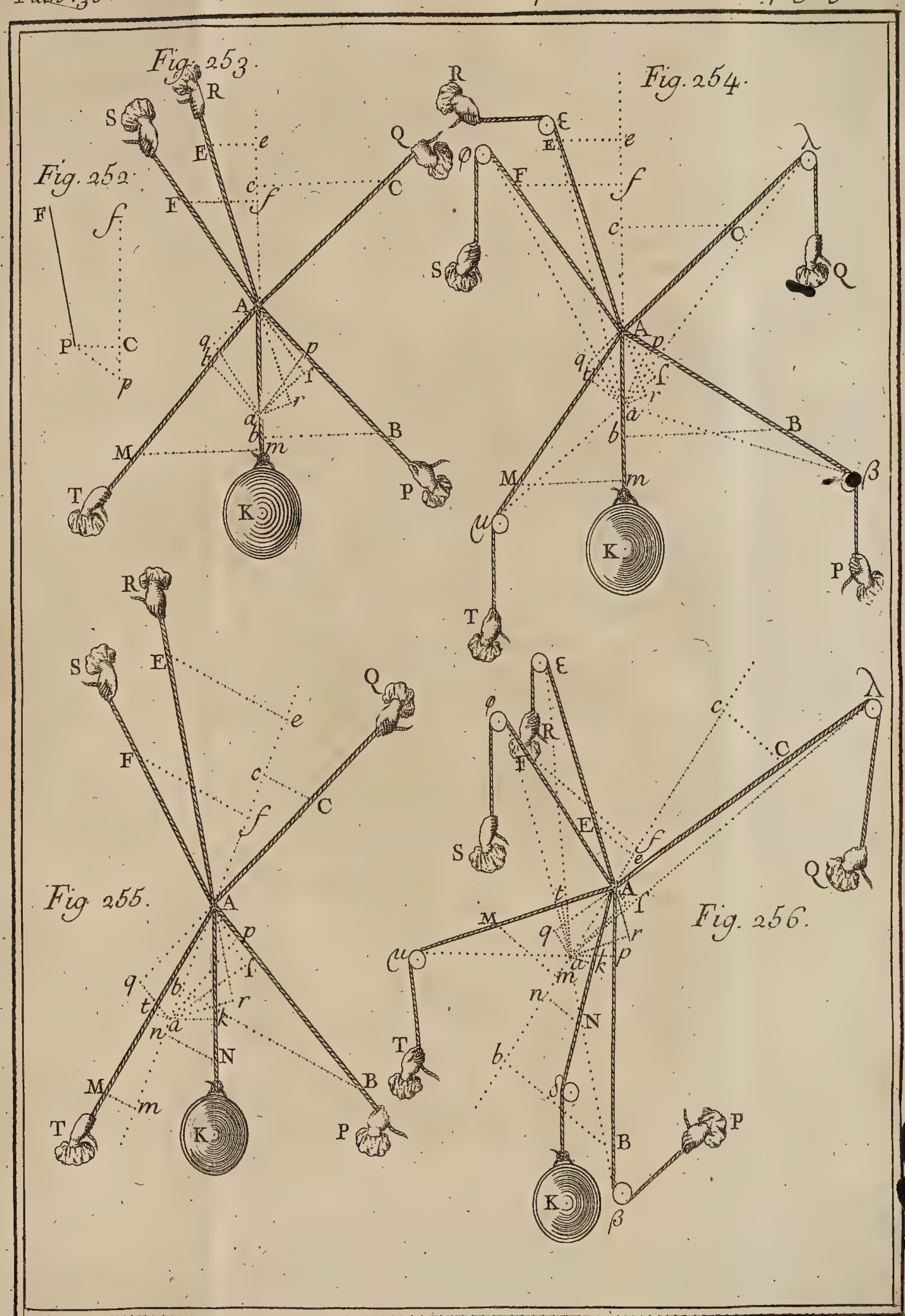
Il est a observer dans les Fig. 255. 256. *que si la direction A*a *du mouvement donné dans les art.* 2. 6. *au nœud A, & à tout le systême, excepté aux centre fixe des poulies de la Fig.* 256. *étoit perpendiculaire à quelqu'une des directions des puissances P, Q, R, S, T, & du poids K supposé en équilibre avec toutes ces puissances, la vîtesse virtuelle* (Déf. 30.) *& consequemment l'Energie de cette puissance (le poids K étant pris pour une) s'y trouveroit anéantie; & des Energies restantes aux autres puissances, plusieurs y deviendroient affirmatives ou negatives, de negatives ou d'affirmatives qu'elles sont ici. Par exemple, si A*a *étoit perpendiculaire sur la direction AN du poids K, il est manifeste, non seulement que ce poids auroit alors sa vîtesse virtuelle* Ak=o, *& consequemment aussi son Energie* K×AK=o, *mais encore que l'angle alors droit* aAK *rendroit* Ap, Ar, As, *negatives; & consequemment changeroit* (Déf. 32.) *de negatives en affirmatives les Energies des puissances R, S, & d'affirmative en negative celle de la puissance P, sans rien faire de pareil aux Energies des puissances Q, T. Ce qu'on voit ici de A*a *perpendiculaire sur la direction AN du poids K, on le verra pareillement de la même A*a *perpendiculaire sur la direction de quelqu'une des puissances P, Q, R, S, T, &c. supposées en équilibre avec ce poids K.*

PARTIE II.

Pour l'équilibre d'un poids soûtenu avec des Poulies.

Fig. 258. I. Soit la puissance M en équilibre avec le poids P sur la Poulie HK fixe en son centre C. Il est manifeste que quelque mouvement qu'on donne à cette Poulie autour de ce centre fixe C, la puissance M & le poids P, appliquez aux extrêmitez d'une corde MHKP, que le frottement empêche de glisser sur cette Poulie HK, parcourront des chemins égaux, en conservant toûjours leurs mêmes directions HM, KP; & qu'ainsi (*Déf.* 32.) ils auront toûjours des vîtesses virtuelles égales: de sorte que leur équilibre supposé les rendant toûjours (*Th.* 14. *Cor.* 1.) égaux entr'eux, ils auront aussi toûjours (*Déf.* 32.) des Energies égales, dont l'affirmative est du côté vers lequel on aura fait tourner la Poulie, & la negative de l'autre. *C'est cette égalité d'Energies qu'il falloit ici 1°. démontrer.*

II. Pour voir encore ici autrement une telle égalité d'Energies, soit tout le systême mû d'un mouvement qui fasse parcourir à tous ses points des lignes paralleles & égales à la droite quelconque A*a* perpendiculaire à AC, menée du centre C de la Poulie par le point A de concours des directions prolongées MH, PK, de la puissance M & du poids P supposez en équilibre entr'eux: soit, dis-je, ce mouvement tel que lorsque A sera en *a*, ces directions AM, AP, soient sur leurs paralleles *aμ*, *aϖ*. Cela posé, soient *am*, *ap*, perpendiculaires en *m*, *p*, sur ces directions prolongées; l'on aura, suivant la Déf. 32. A*m*, A*p*, pour les vîtesses virtuelles de la puissance M & du poids P; & M×A*m*, P×A*p*, pour leurs Energies, dont la seconde sera ici affirmative, & la premiere negative. Or la droite AC divisant également en deux l'angle HAK, les droits (*Hyp.*) CA*a*, & en *m*, *p*, rendent A*p*=A*m*, de même que le Corol. 1. du Th. 14. rend P=M; ce qui donne P×A*p*=M×A*m*. Donc l'Energie affirmative du


Fig. 252.
Fig. 253.
Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.

poids P est ici égale à l'Energie negative de la puissance R supposée en équilibre avec lui. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

Voilà pour les Poulies de centres fixes : voici presentement pour celles dont les centres sont mobiles.

III Si le poids P est suspendu au centre C mobile d'une Poulie HK, que deux puissances M, N, soûtiennent avec une corde MHKN, sur laquelle cette Poulie soit appuyée avec le poids qui la charge ; de laquelle corde les parties HM, HN, prolongées, rencontrent ensemble (*part.* 1. *du Th.* 14.) en quelque point A la direction CP aussi prolongée du poids P ; sur laquelle direction CP prolongée vers B, soit de longueur quelconque la diagonale AB du parallelogramme AEBF, dont les côtez AE, AF, soient sur les directions HM, KN, des puissances M, N, & dont la seconde diagonale EF rencontre la premiere AB en D. Soit prise aussi A*a* de longueur quelconque sur la direction BP du poids P ; & de son point *a* soient *aμ*, *ar*, paralleles aux directions HM, KN, des puissances M, N ; duquel point *a* soient aussi *am*, *an*, perpendiculaires en *m*, *n*, à ces directions prolongées. Fig. 259. 260.

Cela fait ou imaginé, le Corol. 5. du Lem. 3. fera voir, comme dans la démonstr. 1. de la part. 2. du Th. 14. que les lignes AB, AE, AF, sont proportionnelles au poids P, & aux puissances M, N, (*Théor.* 14. *Corol.* 1.) égales entr'elles, leurs proportionnelles AE, AF, seront aussi égales entr'elles ; & consequemment la diagonale EF du parallelogramme AEBF sera perpendiculaire en D à son autre diagonale AB, de même que *am*, *an*, le sont (*Hyp.*) aux directions AE, AF, prolongées des puissances M, N. Donc les triangles rectangles A*ma*, ADE ; A*na*, ADF, sont ici semblables entr'eux d'eux à deux, & même tous quatre semblables entr'eux, chacun à chacun. Par consequent en appellant D chacun des efforts de A vers D, que font (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) les puissances M, N, directement contre le poids P ; lesquels efforts de A vers D, ou vers B, sont égaux entr'eux, à cause que (*Th.* 14.

Corol. 1.) ces deux puiſſances M, N, le ſont entr'elles, de même que leurs proportionnelles AE, AF : l'on aura ici (comme dans l'art. 1. de la part. 1.) A*a*. A*m* : : AE. AD : : M. D $=\frac{M \times Am}{Aa}$. Et A*a*. A*n* : : AF. AD : : N. D $=\frac{N \times An}{Aa}$. Ce qui (à cauſe de l'égalité qu'on vient de voir entre ces efforts D) donne $2 \times D = \frac{M \times Am + N \times An}{Aa}$. Or on vient de voir que D. M : : AD. AE. Et M. P : : AE. AD. Ce qui (en raiſon ordonnée) donne D. P : : AD. AB. Et conſequemment 2×D. P : : 2×AD. AB. Donc, puiſque AB $=$ 2×AD, l'on aura pareillement ici P $= 2 \times D = \frac{M \times Am + N \times An}{Aa}$; d'où reſulte $P \times Aa = M \times Am + N \times An$.

Soit preſentement une force étrangere qui rompe l'équilibre ſuppoſé entre les puiſſances M, N, & le poids P, en faiſant parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite quelconque A*a*, de maniere que ces directions ſoient toûjours paralleles chacune à ſoi-même, & que lorſque ce point A ſera en *a*, celles AM, AN, des puiſſances M, N, ſoient ſur leurs paralleles *aμ*, *aν* chacune ſur la ſienne. Il eſt manifeſte, ſuivant la Déf. 32. qu'en ce cas de rupture d'équilibre par un tel mouvement de tout le ſyſtême, les lignes A*a*, A*m*, A*n*, exprimeroient les vîteſſes virtuelles du poids P, & des puiſſances M, N, dont l'équilibre ſuppoſé entr'eux ſeroit ainſi rompu ; & que les produits P×A*a*, M×A*m*, N×A*n*, en exprimeroient auſſi les Energies. Donc venant de trouver ici $P \times Aa = M \times Am + N \times An$, l'on y aura l'Energie affirmative du poids P, égale à la ſomme des Energies negatives (affirmativement priſes) des puiſſances M, N, ſuppoſées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Fig. 261, 262. IV. Si l'on veut que le point A de concours des directions

ctions AM, AN, AP, des puiſſances M, N, & du poids P en équilibre avec elles, comme dans le précedent art. 3. ſoit preſentement mû de A vers a ſuivant une droite arbitraire Aa de direction quelconque, qui ne ſoit (ſi l'on veut) aucune de celles des puiſſances, ni du poids dont ce point A ſuivoit la direction CP dans cet art. 3. ſoit le parallelogramme AEBF le même encore ici que là, & de ſes angles E, B, F, ſoient autant de perpendiculaires Ee, Bb, Ff, ſur la droite Aa prolongée juſqu'à leurs rencontres en e, b, f. Du point a ſur les directions prolongées MA, NA, AP, des puiſſances M, N, & du poids P, ſoient auſſi autant de perpendiculaires am, an, ap, qui les rencontrent en m, n, p. Enfin de ce même point a ſoient $a\mu$, $a\nu$, $a\varpi$, paralleles à ces directions AM, AN, AP, chacune à chacune.

Cela fait, il eſt manifeſte que l'on aura encore ici les triangles rectangles Ama, AeE; Ana, AfF; Apa, AbB, ſemblables entr'eux deux à deux diſtinguez, comme on les voit ici: ce qui joint à la part. 1. du Lem. 3. comme dans la démonſtr. 2. du Th. 6. (en appellant e, f, b, les efforts ſuivant Ae, Af, bA, réſultans des abſolus des puiſſances M, N, & du poids P, ſuivant leurs directions AM, AN, AP) donnera

$$Aa.\,Am :: AE.\,Ae :: M.\,e = \frac{M \times Am}{Aa}.$$

$$Aa.\,An :: AF.\,Af :: N.\,f = \frac{N \times An}{Aa}.$$

$$Aa.\,Ap :: AB.\,Ab :: P.\,b = \frac{P \times Ap}{Aa}.$$

$$\text{Donc } b.\,e + f :: \frac{P \times Ap}{Aa}.\,\frac{M \times Am + N \times An}{Aa} :: P \times Ap.\,M \times Am + N \times An.$$

Or la part. 1. du Lem. 3. & la démonstr. de la part. 2. du Th. 14.

$$\text{Donnent ensemble} \begin{cases} e.\ M :: Ae.\ AE. \\ M.\ N :: AE.\ AF. \\ N.\ f :: AF.\ Af. \end{cases}$$

Donc (en multipliant par ordre) l'on aura ici $e. f :: Ae. Af.$ Et (en composant) $e + f. f :: Ae + Af. Af.$

$$\text{L'on aura donc ici} \begin{cases} e + f.\ f :: Ae + Af.\ Af. \\ f.\ N :: Af. \quad AF. \\ N.\ P :: AF. \quad AB. \\ P.\ b :: AB. \quad Ab. \end{cases}$$

Par consequent (en multipliant encore par ordre) l'on y aura $e + f. b :: Ae + Af. Ab.$ Or (*Lem.* 10.) $Ab = Ae + Af.$ Donc aussi $b = e + f.$ Mais on vient de trouver $b. e + f :: P \times Ap. M \times Am + N \times An.$ Donc enfin $P \times Ap = M \times Am + N \times An.$

Concevons presentement (comme dans le précedent art. 2.) que l'équilibre ici supposé entre les puissances M, N, & le poids P, soit rompu par une force qui fasse parcourir au point A de concours de leurs directions, la droite Aa de longueur & de direction quelconques, de maniere que ces trois autres directions là soient toûjours paralleles chacune à soi-même, & que lorsque le point A de leur concours sera en a, ces trois directions AM, AN, AP, des puissances M, N, & du poids P, soient sur leurs paralleles $a\mu$, $a\nu$, $a\varpi$, chacune confondue avec la sienne.

Un tel mouvement de tout le systême ainsi conçû rompre l'équilibre ici supposé entre les puissances M, N, & le poids P, fera voir, suivant la Déf. 32. qu'alors les lignes Am, An, Ap, exprimeroient leurs vîtesses virtuelles; & que les produits $M \times Am$, $N \times An$, $P \times Ap$, en exprimeront les Energies. Donc venant de trouver $P \times Ap = M \times Am$

$+N \times An$, l'on aura encore ici (comme dans le précedent art. 3.) l'Energie affirmative du poids P, égale à la somme des Energies negatives (prises affirmativement) des puissances M, N, supposées en équilibre avec ce poids. *Ce qu'il falloit encore 2°. démontrer.*

V. 1°. Si l'on veut presentement que la direction Aa du mouvement donné (*art.* 4.) au point A de concours des directions des puissances M, N, & du poids P, soit celle AP de ce poids P, comme dans l'art. 3. Cette hypothese, qui fait tomber a en p, rendant $Ap = Aa$, changera l'équation $P \times Ap = M \times Am + N \times An$ du précedent art. 4. en $P \times Aa = M \times Am + N \times An$, qui est celle de l'art. 3. dans lequel le mouvement du point A se fait comme ici, suivant la direction AP du poids P, parallelement à laquelle on suppose ici comme là, que tous les autres points du systême se meuvent pendant le passage de A en a suivant Aa.

2°. Si l'on veut que cette direction Aa du point A, soit celle d'une des puissances M, N, par exemple, celle MA de la puissance M; cette hypothese rendant $Am = Aa$, changera pour ici l'équation du précedent art. 4. en $P \times Ap = M \times Aa + N \times An$. Et si Aa étoit suivant NA, l'on auroit de même $P \times Ap = M \times Am + N \times Aa$.

3°. Si l'on veut presentement que cette direction Aa du point A, soit perpendiculaire à la direction d'une des puissances M, N, ou du poids P, par exemple, à la direction AM de la puissance M, comme dans la Fig. 263. Cette hypothese, qui dans les Fig. 261. 262. fait tomber am sur Aa, rendant ainsi $Am = o$, réduiroit pour ici l'équation du précedent art. 4. à $P \times Ap = N \times An$. Ce seroit la même chose, si le cordon MH de la puissance M, étoit attaché à quelque clou ou crochet fixe en M, lequel par sa résistance suppléât la puissance M, comme dans la Fig. 263. Mais alors la ligne Aa devenant un arc de cercle, qui auroit M pour centre, devroit être infiniment petite; & consequemment aussi An, Ap, pour conserver la ressemblance des triangles, qui dans le précedent art. 4.

ont donné l'équation dont celle-ci resulte, par laquelle on voit que l'Energie $M \times Am$ de la puissance M, seroit ici nulle.

1.e. 263. VI. Ce nomb. 3. du precedent art. 5. peut encore se démontrer immediatement, en supposant un arc infiniment petit A*a*, décrit du centre M, de l'extrêmité *a* duquel tombent deux perpendiculaires *an*, *ap*, sur les directions prolongées NA, AP, de la puissance N, & du poids P en équilibre avec elle à l'aide du clou ou crochet fixe M, auquel la corde NKHM, qui soûtient la Poulie KH chargée du poids P en son centre mobile C, est attachée par son extrêmité M. Car si de quelque point du cordon MH, par exemple, de son point M on mene MB, MD, perpendiculaires en B, D, sur les directions prolongées PA, AN, du poids P, & de la puissance N, les angles (*constr.*) droits MA*a*, A*pa*, A*na*, qui rendent les autres A*ap*=MAB, A*an*=MAD, rendant ainsi les triangles rectangles A*pa*, MBA; A*na*, MDA, semblables entr'eux deux à deux, distinguez comme on les voit ici; l'on y aura $Aa.\ Ap$

$$::AM.\ MB = \frac{AM \times Ap}{Aa}.\ \text{Et}\ Aa.\ An :: AM.\ MD = \frac{AM \times An}{Aa}$$

$$\text{Et par consequent}\ MB.\ MD :: \frac{AM \times Ap}{Aa}.\ \frac{AM \times An}{Aa} :: Ap.\ An.$$

Or en prenant A*m* pour le sinus total, l'on aura (*Déf. 9. Corol.* 1.) MB, MD, pour les sinus des angles MAB, MAD, dont le second est ici double du premier; & consequemment dont les sinus MB, MD, sont entr'eux (*Th.* 14. *part.* 2.) comme la puissance N, & le poids P supposé en équilibre avec elle. Donc on aura ici N. P :: A*p*. A*n*. Et consequemment $P \times Ap = N \times An$. Or si l'on imagine cet équilibre rompu par une force qui fasse parcourir A*a* au point A, en faisant passer MA sur M*a*, infiniment proche d'elle, & AP, AN, sur *aϖ*, *aν*, soit qu'elles leur soient paralleles chacune à chacune, ou qu'elles fassent des angles infiniment petits chacune avec sa correspondante; suivant la Déf. 32. que A*p*, A*n*, exprimeront les vîtesses

virtuelles du poids P, & de la puissance N; & que $P \times Ap$, $N \times An$ en exprimeront les Energies, desquelles la premiere sera ici affirmative, & la seconde negative. Donc l'Energie affirmative du poids P sera ici égale à l'Energie negative de la puissance N supposée en équilibre avec lui, à l'aide du clou ou crochet fixe M, & la résistance de ce clou ou crochet sans aucune Energie: le tout comme dans le nomb. 3. du précedent art. 5. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Si sans aucune Poulie HK, le poids P étoit soûtenu seulement avec des cordes AP, AM, AN, attachées ensemble par un nœud commun A, desquelles cordes la seconde AM fut attachée par son extrêmité M au crochet fixe de ce nom, & la troisiéme AN retenue par une puissance N, qui soûtient ainsi ce poids P appliqué à la premiere AP: ce poids P étant encore ici (*Th.* 1. *Corol.* 3.) à cette puissance N, comme le sinus MD de l'angle total MAN, au sinus MB de l'angle partial MAB, quelque rapport qu'il y eût presentement entre ces deux angles; un raisonnement semblable au précedent, fera voir que l'Energie affirmative $P \times Ap$ du poids P, est encore ici égale à l'Energie negative $N \times An$ de la puissance N en équilibre avec lui, de la maniere qu'on le suppose ici.

Ceci peut entrer dans la précedente part. 1. *comme peut entrer dans celle-ci ce qu'on a fait voir dans les art.* 1. 2. *de celle-là touchant l'équilibre d'un poids soûtenu par plusieurs puissances avec des cordes appuyées sur des Poulies de centres fixes dans les Fig.* 254. 256.

PARTIE III.

Pour l'équilibre d'un Poids soûtenu par une puissance sur le Tour.

I. Soit la puissance R en équilibre avec le poids P sur le Tour DBN. Du centre A de cette Machine vûe de profil, soient deux rayons AM, AN, qui interceptent des arcs quelconques semblables BN, *bn*, des circonferences de la FIG. 264.

roue DBN, & de son rouleau *Mbn*. Il est visible que si autour du centre fixe A de cette Machine, on lui cause quelque mouvement qui fasse passer B en N, & consequemment *b* en *n*; le cordon NR que la puissance R tient ferme sans le laisser couler, s'alongera de la valeur de BN sans changer de direction, la puissance R reculant de cette valeur suivant cette même direction NR, pendant que le cordon MP du poids P s'accourcira de la valeur de *bn*, sans changer non plus de direction, en faisant monter ce poids P de cette valeur suivant cette même direction MP: de sorte que (*Déf.* 32.) BN, *bn*, exprimeront ici les vîtesses virtuelles de cette puissance R, & de ce poids P, dont les Energies seront ainsi exprimées (*Déf.* 32.) par les produits R×BN, P×*bn*; desquelles Energies (*Déf.* 32.) la premiere sera affirmative, & l'autre negative. Or l'équilibre ici supposé entre ce poids P & cette puissance R, y donne (*Th.* 19. *Cor.* 1.) R. P: : A*b*. AB : : *bn*. BN. D'où résulte R×BN=P×*bn*. Donc en ce cas d'équilibre l'Energie affirmative de la puissance R sera égale à l'Energie negative (prise affirmativement) du poids P. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer*.

FIG. 265. 266. 267. 268. II. Cette égalité d'Energies peut encore se démontrer en rompant l'équilibre ici supposé entre le poids P & la puissance R, par un mouvement de tout le systême, qui fasse décrire à tous ses points des lignes droites égales, & toutes perpendiculaires à la droite AE menées du centre A de la Machine par le point E de concours des directions prolongées MP, NR, du poids P & de la puissance R; de sorte que pendant que ce centre A de la Machine parcourra A*a*, le point de concours E de ces directions parcourre E*e* parallele & égale à A*a*, & perpendiculaire (comme elle) sur AE; & que lorsque les points A, E, seront en *a*, *e*, les directions ME, NE, AE, du poids P, & de la puissance R, & (*Th.* 30. *part.* 2.) de la charge du centre A de la Machine, ainsi mûes parallelement chacune à soi-même, soient sur leurs paralleles *me*, *ne*, *ae*.

Cela conçû, si du point *e* on mene *ep*, *er*, perpendicu-

laires en p, r, sur les directions prolongées ME, NE, du poids P, & de la puissance R, l'on aura (*Déf.* 32.) Ep, Er, pour les expressions des vîtesses virtuelles de ce poids P & de cette puissance R; ce qui donnera (*Déf.* 32.) P×Ep, R×Er, pour leurs Energies, dont la premiere sera ici (*Déf.* 32.) affirmative, & la seconde negative dans les Fig. 265. 268. la premiere au contraire sera negative, & la seconde affirmative dans les Fig. 266. 267.

De plus, si l'on mene les rayons AM, AN, du rouleau & de la roue de la Machine par les points M, N, où ils sont touchez par les directions ME, NE, du poids P & de la puissance R; les angles (*constr.*) droits AEe, epE, erE, rendant les autres angles Eep=AEM, Eer=AEN, les triangles (*constr.*) rectangles Epe, AME; Ere, ANE, seront ici semblables entr'eux deux à deux, comme on les y voit distinguez: ce qui donnera Ee. Ep : : AE. AM= $\frac{AE \times Ep}{Ee}$. Et Ee. Er : : AE. AN= $\frac{AE \times Er}{Ee}$. Donc on aura ici AM. AN : : $\frac{AE \times Ep}{Ee}$. $\frac{AE \times Er}{Ee}$: : Ep. Er. Or dans l'équilibre qu'on y suppose entre le poids P & la puissance R, le Corol. 1. du Th. 14. donne R. P : : AM. AN. Donc on y aura aussi pour lors R. P : : Ep. Er. Et par consequent P×Ep= R×Er; c'est-à-dire (suivant ce qu'on vient de voir des Energies) que l'Energie P×Ep du poids P, affirmative dans les Fig. 265. 266. & negative dans les Fig. 266. 267. sera ici égale à l'Energie R×Er de la puissance R supposée en équilibre avec ce poids P, laquelle seconde Energie R×Er sera au contraire negative dans les Fig. 265. 268. & affirmative dans les Fig. 266. 267. de sorte que dans le cas present d'équilibre entre ces deux forces P, R, l'Energie affirmative de l'une sera toûjours égale à l'Energie negative (affirmativement prise) de l'autre. *Ce qu'il falloit encore 1°. demontrer.*

III. Si avec les Energies du poids P, de la puissance R, supposez en équilibre entr'eux sur le Tour DN, on veut Fig. 269. 270. 271. 272.

y comprendre aussi l'Energie de la résistance du centre fixe A de ce Tour directement (*Ax.* 4.) opposée & égale à la charge qui lui résulte (*Th.* 14. *part.* 2. 3.) de A vers F suivant EF du concours de ce poids P & de cette puissance R, soit encore ici tout le systême mû parallelement à la droite A*a* de longueur arbitraire, mais presentement de direction quelconque, & de maniere encore que pendant que le centre A de la Machine parcourra cette droite A*a*, le point E de concours des directions PE, RE, AE, du poids P, de la puissance R, & de la résistance (que j'appelle B) du centre A de la Machine, parcourre E*e* égale & parallele à A*a*; & que lorsque A sera en *a*, & E en *e*, ces directions PE, RE, AE, du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine, ainsi mûes parallelement à elles-mêmes, soient sur leurs paralleles *me*, *ne*, *ae*. Alors si du point *e* l'on mene *ep*, *er*, *eb*, perpendiculaires en *p*, *r*, *b*, sur ces directions prolongées du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine, l'on aura (*Déf.* 32.) E*p*, E*r*, E*b*, pour les vîtesses virtuelles de ce poids P, de cette puissance R, & de cette résistance B; & P×E*p*, R×E*r*, B×E*b*, pour leurs Energies, desquelles la derniere B×E*b* sera affirmative, & les deux autres negatives dans les Fig. 269. 270. Pour dans les Fig. 271. 272. les Energies R×E*r*, B×E*b*, y sont toutes deux affirmatives, & P×E*p* est la seule qui y soit negative.

Ces Energies étant ainsi reconnues, soit le parallelogramme EGFH d'une diagonale quelconque EF, prise depuis E vers F sur la direction EA ou AE prolongée de la résistance B de la Machine, & des côtez EG, EH, pris sur les directions prolongées ME, NE, du poids P & de la puissance R. Si des angles G, H, F, de ce parallelogramme, on mene G*g*, H*h*, F*f*, perpendiculaires en *g*, *h*, *f*, sur *e*E prolongée, comme le sont (*Hyp.*) *ep*, *er*, *eb*, en *p*, *r*, *b*, sur ces directions ME, NE, AE, prolongées du poids P, de la puissance R, & de la résistance B de la Machine; il est visible que les triangles ainsi rectangles E*pe*, E*g*G,

EgG ; Ere, EbH ; Ebe, EfF, seront semblables entr'eux deux à deux distinguez comme on les voit ici, ayant ainsi deux à deux leurs angles opposez au sommet E, égaux entr'eux.

$$\text{Donc} \begin{cases} Ee.\ Ep :: EG.\ Eg = \frac{EG \times Ep}{Ee}. \\ Ee.\ Er :: EH.\ Eh = \frac{EH \times Er}{Ee}. \\ Ee.\ Eb :: EF.\ Ef = \frac{EF \times Eb}{Ee}. \end{cases}$$

Or (*Lem.* 10.) $Ef = Eg \pm Eh$, en y prenant le superieur du double signe $\pm$ pour le cas des Fig. 269. 270. & l'inferieur pour le cas des Fig. 271. 272. Donc aussi $EF \times Eb = EG \times Ep \pm EH \times Er$, en y prenant de même le double signe $\pm$. Or (*Th.* 19. *part.* 3.) B. P :: EF. $EG = \frac{EF \times P}{B}$. Et B. R :: EF. $EH = \frac{EF \times R}{B}$. Donc la substitution de ces valeurs de EG, EH, dans l'équation qui les précede ; la changeant en $EF \times Eb = \frac{EF \times P \times Ep \pm EF \times R \times Er}{B}$, l'on aura ici $B \times Eb = P \times Ep \pm R \times Er$: sçavoir, $B \times Eb = P \times Ep + R \times Er$ dans le cas des Fig. 269. 270. Et $B \times Eb = P \times Ep - R \times Er$, ou $B \times Eb + R \times Er = P \times Ep$ dans le cas des Fig. 271. 272. D'où l'on voit (suivant les Energies trouvées ci-dessus) que dans le cas des Fig. 269. 270. l'Energie affirmative de la résistance B du centre A de la Machine en question, est égale à la somme des Energies negatives (affirmativement prises) du poids P & de la puissance R supposée en équilibre avec lui sur cette Machine ; & que dans le cas des Fig. 271. 272. la somme des Energies affirmatives de la résistance B du centre A de la Machine, & de la puissance R, est égale à l'Energie negative (affirmativement prise) du poids P. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

On voit assez par tout ce qu'on a dit jusqu'ici des Energies, qu'elles ne sont affirmatives ou negatives, qu'autant que le mouvement du systême favorise ou contrarie les puissances (j'y comprends aussi les poids) & les résistances dont elles sont les Energies; & qu'ainsi ce mouvement étant arbitraire, il le sera aussi de rendre affirmative ou negative celle qu'on voudra de ces Energies; il sera de même de celles dont nous allons encore parler. Voici dans les articles suivans quelques exemples de ces changemens arbitraires d'Energies affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives.

IV. 1°. Si dans les Fig. 269. 272. on imagine A*a* en ligne droite avec AE, ou sa parallele E*e* couchée sur EA, ayant *e* vers A; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire A*a* couchée sur AE ou sa parallele E*e* en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A: ce changement de situation A*a* ou E*e*, du mouvement supposé (*art.* 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le systême, ne faisant qu'augmenter les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, sans rien changer à l'affirmatif ou au negatif de ces Energies, & sans en anéantir aucune; les égalitez qu'on en vient de trouver dans le précedent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. resteront encore ici les mêmes, & avec les mêmes significations d'affirmatifs ou de negatifs d'Energies, qu'on leur a trouvées là pour chacune de ces quatre Figures.

2°. Mais si dans les Fig. 269. 270. l'on imagine A*a* couchée sur AE, ou sa parallele E*e* en ligne droite avec EA, ayant *e* de l'autre côté de E par rapport à A; & que dans les Fig. 270. 271. l'on imagine au contraire A*a* en ligne droite avec AE, ou sa parallele E*e* couchée sur EA, ayant *e* vers A: ce changement de situation de la direction A*a*, ou E*e*, du movement supposé (*art.* 3.) de A vers *a*, ou de E vers *e*, à tout le systême, changeant seulement les Energies du poids P, de la puissance R, & de la résistance B du centre fixe A de la Machine, d'affirmatives en negatives, & de negatives en affirmatives, en les

augmentant encore toutes comme dans le nomb. 1. les égalitez qu'on vient de trouver dans le précedent art. 3. pour toutes ces Fig. 269. 270. 271. 272. resteront encore ici les mêmes que là, & que dans le précedent nomb. 1. mais presentement avec des significations d'affirmatif & de negatif de ces Energies, contraires à celles qu'elles ont dans cet art. 3. & dans ce précedent nomb. 1.

V. Si presentement on suppose que la droite A*a* ou sa parallele E*e* soit perpendiculaire sur EA dans les presentes Fig. 269 270. 271. 272. comme dans l'art. 2. Fig. 265. 266. 267. 268. Ce cas rendant $Eb = o$, & consequemment aussi $B \times Eb = o$, réduiroit par cela seul à $o = P \times Ep + R \times Er$ l'équation que le précedent art. 3. a donné pour les Fig. 269. 270. & à $R \times Er = P \times Ep$ celle que ce même art. 3. a aussi donnée pour les Fig. 271. 272. Donc conformément à l'art. 2. de qui c'est ici le cas,

1°. Ce cas de E*e* perpendiculaire sur EA, rendant de plus E*r* negative, en la renversant de l'autre côté de E sur RE prolongée vers H dans la Fig. 269. comme elle l'est dans la Fig. 266. & rendant aussi E*p* negative, en la renversant de même de l'autre côté de E sur EP dans la Fig. 270. comme elle l'est dans la Fig. 265. changera l'équation $o = P \times Ep + R \times Er$ qu'il vient de donner pour ces Fig. 269. 270. en $P \times Ep = R \times Er$, qui dans la Fig. 267. ainsi conformée à la Fig. 266. fera voir qu'alors l'Energie affirmative de la puissance R sera égale à l'Energie negative du poids P, comme dans l'art. 2. Fig. 266. dont c'est ici le cas; & qui dans la Fig. 270. pareillement conformée à la Fig. 265. fera voir au contraire qu'alors l'Energie negative de la puissance R, sera égale à l'Energie affirmative du poids P, comme dans le même art. 2. Fig. 266. dont c'est pareillement ici le cas. FIG. 269. 270.

2°. Le cas supposé de E*e* perpendiculaire sur EA, rendant à la fois E*p*, E*r*, negatives dans la Fig. 272. en y renversant E*p* de l'autre côté de E sur EP, & E*r* de l'autre côté de E sur RE prolongées, comme elles le sont dans la Fig. 268. sans rien changer à la Fig. 271. que d'y ren- FIG. 271. 272.

dre E*e* perpendiculaire sur AE, comme dans les trois autres précedentes Fig. 269. 270. 271. de ce present art. 5. laissera l'équation R×E*r*=P×E*p*, telle qu'on l'y vient de trouver pour les Fig. 271. 272. sans en changer que la signification d'affirmatif ou de negatif d'Energies pour la Fig. 272. ainsi conformée à la Fig. 269. dans laquelle Fig. 272. ainsi conformée, cette équation signifiera que l'Energie negative de la puissance R sera pour lors égale à l'Energie affirmative du poids P, comme dans l'art. 2. Fig. 268. dont c'est ici le cas; signifiant au contraire dans la Fig. 271. que l'Energie affirmative de la puissance R, sera pour lors égale à l'Energie negative du poids P, comme dans cet art. 2. Fig. 266. dont c'est pareillement ici le cas, qui anéantit seulement l'Energie de la résistance B du centre fixe A de la Machine dans cette Fig. 271. comme dans les trois autres Fig. 269. 270. 272. du present art. 5. sans rien changer à l'affirmatif ni au negatif des Energies de la puissance R, & du poids P dans cette Fig. 271.

Un raisonnement pareil à celui du précedent art. 5. fera voir que Ee perpendiculaire sur la direction EP du poids P, ou sur celle ER de la puissance R, y anéantiroit l'Energie de ce poids ou de cette puissance, & qu'elle y feroit ou ne feroit pas des changemens d'affirmatif ou de negatif, ou tous les deux ensemble dans les deux autres Energies restantes, comme l'on voit dans cet art. 5. qu'il doit arriver aux Energies restantes de ce poids P & de cette puissance R, lorsque Ee perpendiculaire sur la direction EA de la résistance B du centre fixe A de la Machine, y anéantit l'Energie de cette résistance B. Tout cela est presentement trop manifeste pour s'y arrêter davantage.

Fig. 269. 270. 271. 272. VI. Il est à remarquer que si les directions ER, EP, de la puissance R, & du poids P, supposez en équilibre entr'eux sur le Tour en question, devenoient paralleles entr'elles, & consequemment aussi (*Lem. 6. Corol.* 1. 2.) à la direction AE de la résistance B du centre fixe A de cette Machine; & que la direction A*a* ou E*e* du mouvement

ſuppoſe (*art.* 3. 4. 5.) dans tout le ſyſtême, fût perpendiculaire à quelqu'une de celles-là ; les Energies de cette puiſſance R, de ce poids P, & de cette réſiſtance B, y ceſſeroient toutes à la fois dans l'art. 4. comme dans les art. 3. & 5. dans leſquels E*e* perpendiculaire (*Hyp.*) à AE, le ſeroit auſſi à ER, EP, ici paralleles à AE. Car cette direction E*e* du mouvement de tout le ſyſtême, ſe trouvant ainſi perpendiculaire aux trois directions ER, EP, AE, de la puiſſance R, du poids P, & de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, les lignes *er*, *ep*, *eb*, auſſi perpendiculaires (*Hyp.*) à ces trois directions ER, EP, AE, ſe confondroient toutes trois avec *e*E ; ce qui anéantiſſant à la fois toutes les vîteſſes virtuelles (*Déf.* 32.) E*r*, E*p*, E*b*, de la puiſſance R, du poids P, & de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, anéantiroit auſſi à la fois toutes leurs Energies (*Déf.* 32.) R×E*r*, P×E*p*, B×E*b*, ainſi qu'il le falloit faire voir.

C'eſt par cette raiſon que dans les art. 3. 5. dans leſquels E*e* eſt ſuppoſée perpendiculaire à la direction AE de la réſiſtance B de l'axe ou du centre A de la Machine, cette réſiſtance B n'y a aucune Energie ; & que ſi les directions ER, EP, de la puiſſance R, & du poids P, y devenoient paralleles entr'elles, & conſequemment auſſi (*Lem.* 6. *Corol.* 1. 2.) à celle AE de la réſiſtance B, les Energies de cette puiſſance R, & de ce poids P, ceſſeroient de même de s'y trouver. FIG. 265. 266. 267. 268.

Rien de tout cela ne doit paroître étrange ; puiſqu'en ce cas de paralleliſme entr'elles des trois directions ER, EP, AE, auſquelles E*e* ou ſa parallele A*a* ſeroit (*Hyp.*) perpendiculaire, quelque mouvement qu'on donnât à tout le ſyſtême, ſuivant cette ligne E*e* ou A*a*, à laquelle tous les points de ce ſyſtême décriviſſent des paralleles comme dans les art. 3. 4. 5. deſquels il s'agit ici, la puiſſance R, ni le poids P, ni la réſiſtance B priſe pour une puiſſance contraire en A ſuivant AE, n'auroient aucun mouvement ſuivant leurs directions ; ni conſequemment FIG. 267. & ſuivantes juſqu'à 272.

(*Déf.* 32.) aucune vîtesse virtuelle, ni consequemment encore (*Déf.* 32.) aucune Energie.

PARTIE IV.

Pour l'équibre sur des Leviers quelconques entre des puissances de directions aussi quelconques.

FIG. 273. 274. 275. I. Soient les puissances E, F, de forces & de directions quelconques, appliquées à volonté à un Levier de figure aussi quelconque, & en équilibre entr'elles sur tel appui B qu'on voudra de ce Levier; duquel point B soient menées BD, BP, perpendiculaires en D, P, sur les directions prolongées ED, EP, de ces deux puissances E, F. Par ce point fixe B soit une ligne droite XO, posée à volonté, laquelle rencontre ces directions en X, O, & qui peut ainsi passer pour Levier droit, sur lequel appuyé en B, ces deux puissances E, F, qui lui seroient appliquées en X, O, suivant leurs directions supposées, seroient (*Th.* 21. *part.* 2. 5.) en équilibre entr'elles, comme on les suppose y être sur le Levier proposé quelconque suppléé par celui-ci pour épargner les Figures, que la varieté de celles de ce Levier proposé, multiplieroit inutilement.

Cela posé, & le Levier droit XO qui supplée celui-là, étant imaginé comme d'une piece avec lui, & d'angles invariables avec les directions proposées des puissances E, F, afin que le tout ensemble puisse être conçû mû comme d'une piece autour de l'appui fixe B, par quelque force étrangere que je suppose rompre presentement l'équilibre supposé entre les puissances E, F, & donner à tout le systême un mouvement infiniment petit ou instantané autour de cet appui fixe B, lequel mouvement fasse passer XO en $x\omega$, en faisant décrire des infiniment petits Xx, $O\omega$, aux points X, O, de ce Levier, & en faisant aussi passer les directions XE, OF, en xe, ωf, infiniment voisines d'elles, avec lesquelles elles fassent quelque part des

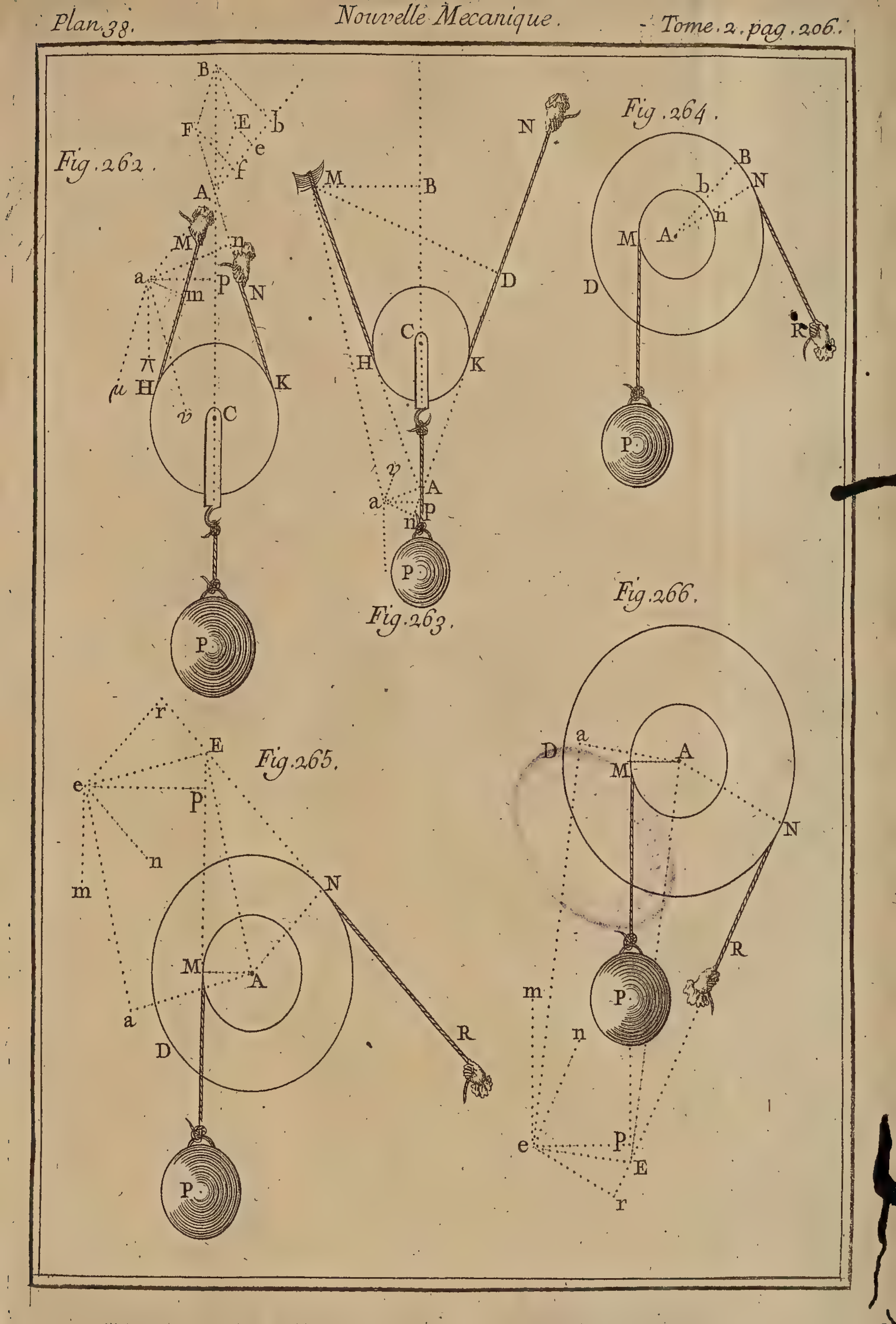
Fig. 257.

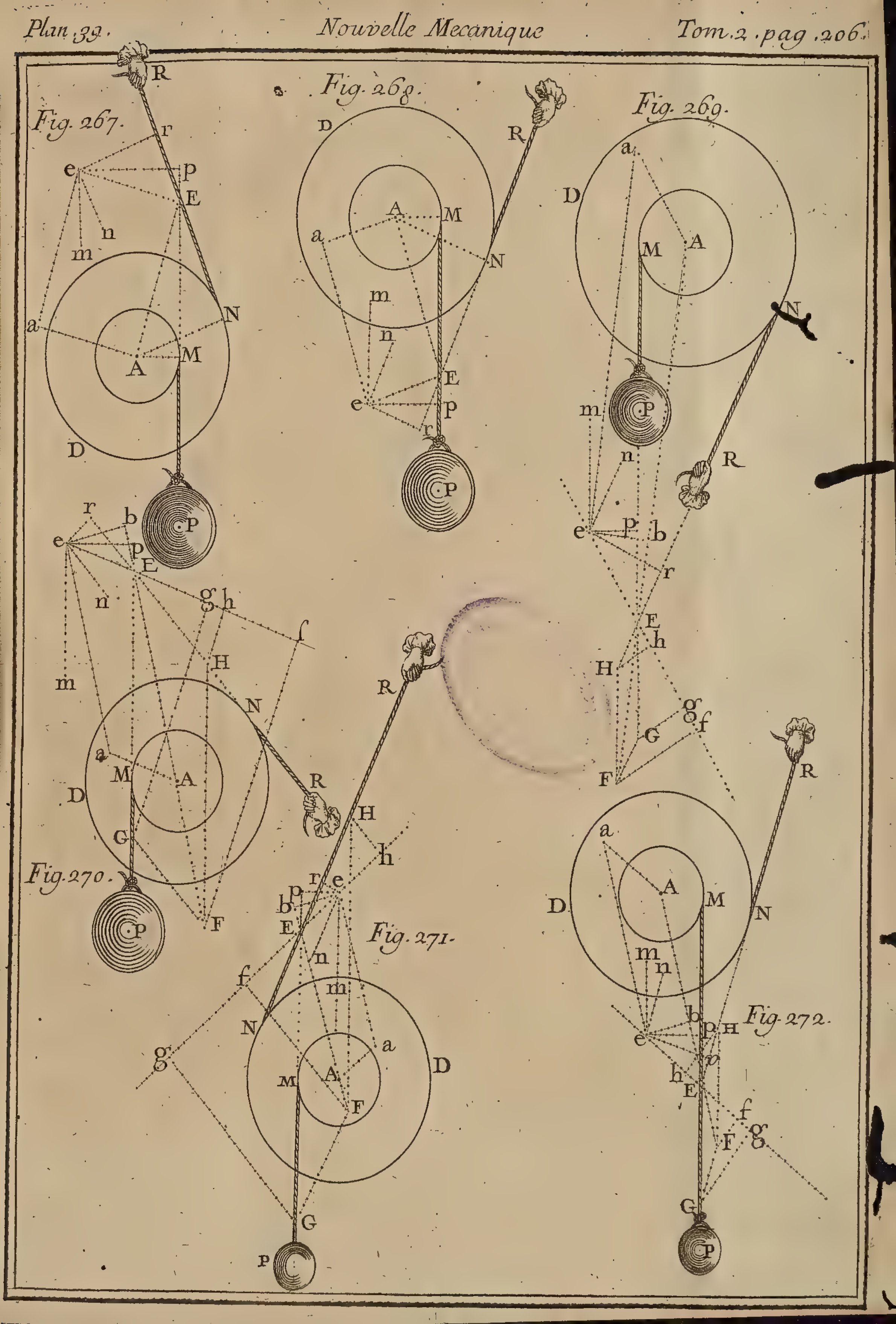
Fig. 258.

Fig. 260.

Fig. 259.

Fig. 261.


Fig. 262.
B
F
E
b
e
f
A
M
n
a
P
N
m
π
μ
H
K
v
C
P
M
B
N
D
C
H
K
v
A
a
p
n
P
Fig. 263.
Fig. 264.
B
b
N
n
M
A
D
R
P
Fig. 266.
r
E
Fig. 265.
e
P
n
m
N
M
A
a
D
R
P
a
D
A
M
N
R
P
m
n
e
P
E
r


Fig. 267.
Fig. 268.
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.

angles infiniment petits M, N, chacune avec sa correspondante, qui peut ainsi passer pour elle.

Un tel mouvement de tout le systême autour du point fixe B, étant supposé, si des points x, ω, on imagine $x\varepsilon$, $\omega\varphi$, perpendiculaires en ε, φ, sur les directions proposées XE, OF, des puissances E, F; on verra qu'il doit faire avancer la puissance E de la valeur de $X\varepsilon$ suivant sa direction, & faire reculer l'autre puissance F de la valeur de $O\varphi$ suivant la sienne, pendant l'instant que le Levier XO passeroit de XO en $x\omega$; & qu'ainsi (*Déf.* 32.) les vîtesses virtuelles de ces deux puissances E, F, seroient ici exprimées par $X\varepsilon$, $O\varphi$; & leurs Energies par $E\times X\varepsilon$, $F\times O\varphi$, dont la premiere seroit affirmative, & la seconde negative.

Or les angles (*constr.*) droits BXx, BDX, donnent $xX\varepsilon = XBD$; & les angles (*constr.*) droits $BO\omega$, BPO, donnent de même $\omega O\varphi = OBP$. Donc les angles en ε, φ, étant aussi (*constr.*) droits comme en D, P, les triangles rectangles $X\varepsilon x$, BDX; $O\varphi\omega$, BPO, sont ici semblables entr'eux deux à deux, comme on les voit ici distinguez.

Par consequent on aura ici $Xx. X\varepsilon :: BX. BD = \frac{BX\times X\varepsilon}{Xx}$

Et $O\omega. O\varphi :: BO. BP = \frac{BO\times O\varphi}{O\omega}$. Donc $BD. BP :: \frac{BX\times X\varepsilon}{Xx}$.

$\frac{BO\times O\varphi}{O\omega}$ (à cause de $\frac{BX}{Xx} = \frac{BO}{O\omega}$) $:: X\varepsilon. O\varphi$. Or l'équilibre ici supposé donne (*Th*, 21. *Corol*, 2.) BD. BP :: F. E. Donc on y aura aussi F. E :: $X\varepsilon$. $O\varphi$. Et par consequent $E\times X\varepsilon = F\times O\varphi$. Donc enfin venant de trouver $E\times X\varepsilon$ pour l'Energie affirmative de la puissance E, & $F\times O\varphi$ pour l'Energie negative de la puissance F, la premiere de ces deux Energies sera ici égale à la seconde. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

II. Si l'on veut presentement que les directions XE, OF, des puissances E, F, soient non seulement paralleles entr'elles, mais aussi perpendiculaires au Levier XO: alors

les parties infiniment petites Xε, Oφ, de ces directions, se confondant avec les arcs infiniment petits Xx, Oω, perpendiculaires comme elles à ce Levier droit XO; l'on aura ici E×Xx=E×Xε, F×Oω=F×Oφ. Donc venant de trouver (*art.* 1.) que ces Energies generales E×Xε, F×Oφ, des puissances E, F, supposées en équilibre entr'elles suivant des directions quelconques, sont égales entr'elles; & que la premiere de ces deux Energies est affirmative, & la seconde negative: l'on aura pareillement ici E×Xx, F×Oω, égales entr'elles, pour les Energies particulieres des puissances E, F, dans le cas present de leur équilibre entr'elles suivant des directions perpendiculaires au Levier droit XO; & la premiere de ces deux Energies particulieres encore affirmative, & la seconde negative.

Les moindres Geometres sçavent que ce cas particulier du précedent art. 2. pourroit encore se démontrer indépendamment du general de l'art. 1. mais il suit si naturellement de ce general, que je n'ai pas crû le devoir démontrer autrement.

III. Il est à remarquer que de quelque maniere que les directions XE, OF, des puissances E, F, soient paralleles entr'elles, c'est-à-dire, vers quelque côté que ce soit; leurs perpendiculaires (*Hyp.*) BD, BP, se trouvant alors en ligne droite, & rendant ainsi les triangles rectangles BDX, BPO, toujours semblables entr'eux: l'on aura aussi toujours alors BD. BP :: BX. BO :: Xx. Oω. Donc venant de trouver en general (*art.* 1.) Xε. Oφ :: BD. BP. Le cas present des directions XE, OF, paralleles quelconques donnera toujours aussi Xε. Oφ :: BD. BP :: BX. BO :: Xx. Oω. Ainsi,

1°. Les vîtesses virtuelles des puissances E, F, qui dans l'art. 1. sont exprimées en general par Xε, Oφ, pour toutes les directions possibles de ces deux puissances, pourroient aussi dans le present parallelisme quelconque de ces directions, être exprimées par les arcs Xx, Oω, comme dans l'art. 2. ou par les bras de ce Levier, BX, BO; ou enfin par ses perpendiculaires BD, BP, aux directions

de

de ces puiſſances ; & les Energies de ces mêmes puiſſances E, F, qui dans le même art. 1. ſont exprimées en general par E×Xε, F×Oφ, pourroient auſſi l'être ici par E×Xx, F×Oω, comme dans l'art. 2. ou par E×BX, F×BO ; ou enfin par E×BD, F×BP, qui ſont (*Déf.* 22.) les *Momens* de ces deux puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B du Levier auquel on les ſuppoſe appliquées.

2°. De même les vîteſſes virtuelles de ces puiſſances E, F, qui dans le cas de l'art. 5. y ſont exprimées par les arcs infiniment petits Xx, Oω, qui ſe confondent là avec les lignes infiniment petites Xε, Oφ, pourroient l'être par les finies BX, BO, ou BD, BP ; & les Energies de ces mêmes puiſſances E, F, qui dans cet art. 5. ſont exprimées par E×Xx, F×Oω, pourroient auſſi l'être par E×BX, F×BO, ou par E×BD, F×BP.

Il ſuit de ces nomb. 1. 2. que ces expreſſions (*nomb.* 2.) tant des vîteſſes virtuelles, que des Energies des puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B d'un Levier quelconque ſuivant des directions paralleles entr'elles, conviendroient également dans ce cas general de directions XE, OF, paralleles quelconques, & dans le particulier de l'art. 2. où ces paralleles ſont ſuppoſées perpendiculaires au Levier droit XO. Mais la Déf. 32. exigeant que les vîteſſes virtuelles des puiſſances E, F, ſoient exprimées par les chemins contemporains que ces puiſſances parcourroient ſuivant leurs directions dans le mouvement ſuppoſé du ſyſtême, & que les Energies de ces mêmes puiſſances ſoient exprimées par les produits faits de ces puiſſances multipliées par ces chemins contemporains, chacune par le ſien : les lignes & les produits pris dans les art. 1. 2. pour les vîteſſes virtuelles & pour les Energies des puiſſances E, F, en ſont les expreſſions naturelles telles que cette Déf. 32. les exige.

IV. Si avec les Energies des puiſſances E, F, ſuppoſées en équilibre entr'elles ſur l'appui B d'un Levier quelconque ſupplée (comme dans l'art. 1.) par le droit XO FIG. 276. 277. 278. 279.

ou XB de même appui B que lui; auquel Levier droit ces deux puissances E, F, soient appliquées suivant leurs directions supposées quelconques concourantes en quelque point A que ce soit; on veut aussi comprendre l'Energie de la résistance (que j'appelle B) de cet appui: soient deux droites Bβ, A*a*, paralleles & égales quelconques menées des points B, A, vers le même côté aussi quelconque, obliquement aux directions AE, AF, & à la droite AB, laquelle étant (*Th.* 21. *part.* 1. 2.) la direction de A vers B dans les Fig. 276. 279. & de B vers A dans les Fig. 277. 278. de la charge de l'appui B, résultante du concours d'action des puissances E, F, sur lui, est aussi en sens directement contraire (*Ax.* 4.) la direction de B vers A dans les Fig. 276. 279. & de A vers B dans les Fig. 277. 278. de la résistance B, avec laquelle cet appui fixe soûtient cette charge. Du point *a* soient *ae*, *af*, *ab*, perpendiculaires en *e*, *f*, *b*, sur ces trois lignes prolongées AE, AF, AB. Ensuite après avoir fait le parallelogramme ARGS d'une diagonale quelconque AG prise depuis A sur AB ou BA prolongées, & de côtez AR, AS, pris sur AE, AF, pareillement prolongées; des angles G, R, S, de ce parallelogramme soient les droites G*g*, R*r*, S*s*, perpendiculaires en *g*, *r*, *s*, sur A*a* prolongée de part & d'autre.

Cela fait ou imaginé, les triangles A*ea*, A*r*R; A*fa*, A*s*S; A*ba*, A*g*G, rectangles (*constr.*) en *e*, *r*, *f*, *s*, *b*, *g*, ayant leurs angles égaux en A deux à deux distinguez, comme on les voit ici, sont semblables entr'eux ainsi pris deux à deux. Donc

$$Aa.\ Ae :: AR.\ Ar = \frac{AR \times Ae}{Aa}.$$

$$Aa.\ Af :: AS.\ As = \frac{AS \times Af}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ab :: AG.\ Ag = \frac{AG \times Ab}{Aa}.$$

Or (*Lem.* 10.) $Ag = As \mp Ar$, dans laquelle égalité le superieur du double signe $\mp$ est pour le cas des Fig. 276. 277. & l'inferieur pour le cas des Fig. 278. 279. Donc aussi $AG \times Ab = AS \times Af \mp AR \times Ae$, de qui le double signe $\mp$ est de même signification que le précedent. Or la résistance B de l'appui de ce nom, étant (*Ax.* 4. *Th.* 21. *part.* 1. 2.) égale & directement opposée de G vers A suivant GA, à la charge de cet appui B, laquelle est au contraire (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1. & *Th.* 21. *part.* 1. 2.) dirigée de A vers G suivant AG; l'équilibre supposé entre les puissances E, F, donne par tout ici (*Th.* 2. *part.* 3. 4.) $B.E :: AG.\ AR = \frac{AG \times E}{B}$. Et $B.F :: AG.\ AS = \frac{AG \times F}{B}$.

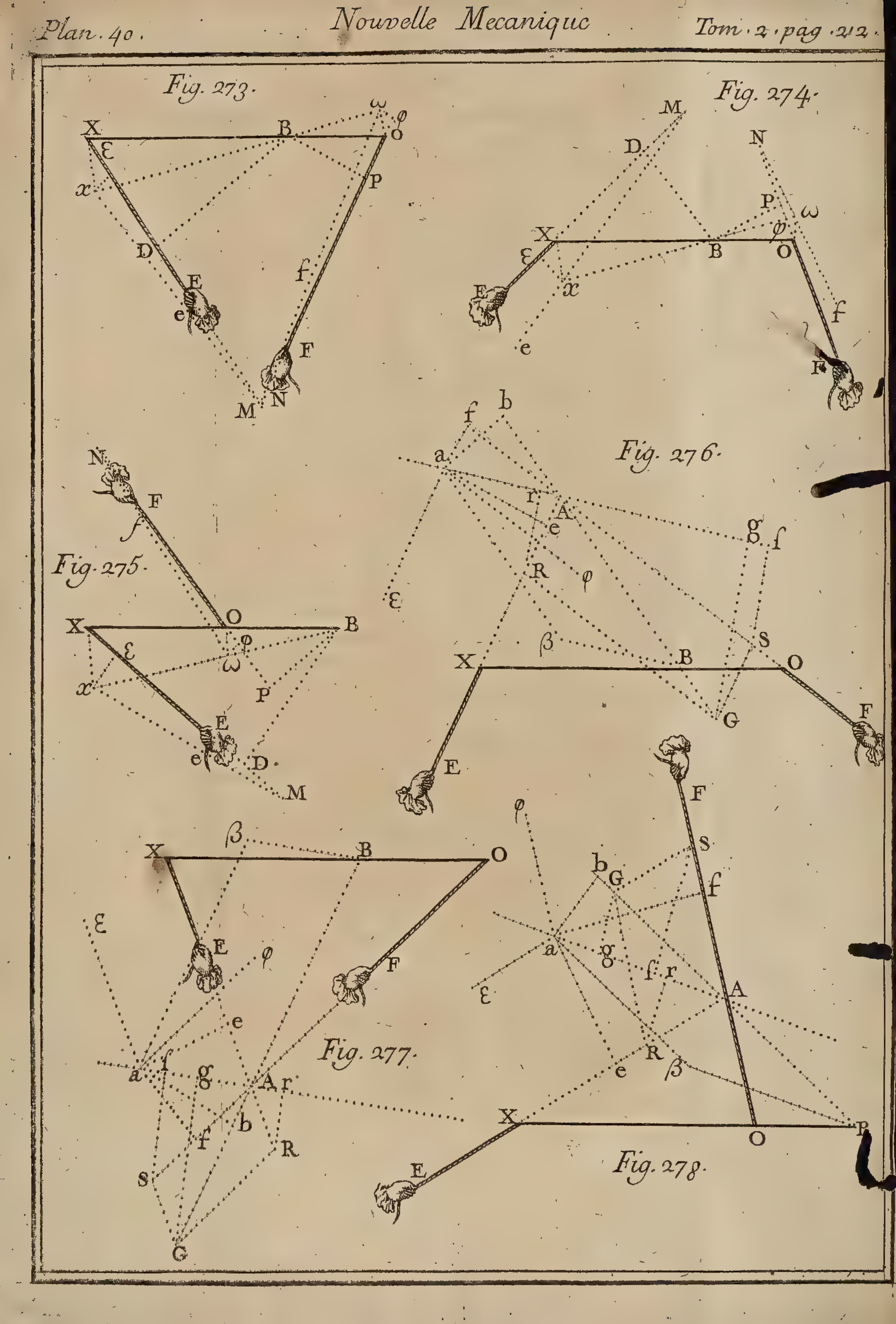
Donc en substituant ces valeurs de AR, AS, dans la derniere égalité precedente $AG \times Ab = AS \times Af \mp AR \times Ae$, on aura pareillement ici $AG \times Ab = \frac{AG \times F \times Af \mp AG \times E \times Ae}{B}$; d'où resulte $B \times Ab = F \times Af \mp E \times Ae$: c'est-à-dire, $B \times Ab = F \times Af - E \times Ae$, ou $B \times Ab + E \times Ae = F \times Af$ pour le cas des Fig. 276. 277. & $B \times Ab = E \times Ae + F \times Af$ pour le cas des Fig. 278. 279.

Imaginons presentement que l'équilibre ici supposé entre les puissances E, F, sur l'appui B, soit rompu par un mouvement de tout le systême, qui le fasse aller de AB vers Aβ, en faisant décrire en ce sens à tous les points des lignes paralleles & égales à Aα ou à Bβ, de maniere que lorsque la droite AB sera sur sa parallele αβ, les directions AE, AF, ainsi mûes parallelement chacune à soi-même, soient aussi sur leurs paralleles αε, αφ, chacune sur la sienne avec la puissance dont elle est la direction. Il est manifeste (*Déf.* 32.) qu'un tel mouvement de tout le systême donnera Ae, Af, Ab, pour les vîtesses virtuelles des puissances E, F, & de la résistance B de l'appui de ce nom; & $E \times Ae$, $F \times Af$, $B \times Ab$, pour leurs Energies: desquelles Energies (*Déf.* 32.) la premiere & la troisié-

me sont ici affirmatives, & la seconde negative dans la Fig. 276. la premiere & la troisiéme sont au contraire negatives, & la seconde affirmative dans la Fig. 277. les deux premieres sont affirmatives, & la troisiéme negative dans la Fig. 278. Enfin les deux premieres sont au contraire negatives, & la troisiéme affirmative dans la Fig. 279. Donc venant de trouver B×A*b*+E×A*e*=F×A*f* pour les Fig. 276. 277. & B×A*b*=E×A*e*+F×A*f* pour les Fig. 278. 279. l'on aura ici dans les Fig. 276. 278. la somme de deux Energies affirmatives, égale à une Energie negative affirmativement prise; & au contraire dans les Fig. 277. 279. la somme de deux Energies negatives (affirmativement prise) égale à une Energie affirmative. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

V. Si l'on suppose presentement que A*a* soit perpendiculaire sur AB, comme l'est (*Hyp.*) *ab*, & fasse consequemment des angles aigus avec AX, AO, dans les Fig. 278. 279. Cette hypothese, qui fait passer A*f* de l'autre côté de A vers O dans ces deux Fig. 278. 279. & qui y fait tomber *b* en A, de même que dans les deux autres Fig. 276. 277. sans faire que ce seul changement dans ces deux-ci, rendant ainsi A*b*=*o* dans toutes les quatre Fig. 276. 277. 278. 279. & A*f* negative dans les deux dernieres, changera également pour toutes les deux égalitez qu'on leur vient de trouver sur la fin du precedent art. 4. en E×A*e*=F×A*f* sans Energie de la résistance B de l'appui du Levier, que A*b*=*o* vient de rendre nulle. Ce qui fait voir que l'Energie affirmative de la puissance E sera ici égale à l'Energie negative de la puissance F dans les Fig. 277. 279. & qu'au contraire l'Energie affirmative de F sera égale à l'Energie negative de la puissance E dans les Fig. 278. 276.

On fera sur ceci des reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans les art. 4. 5. 6. de la part. 3. touchant les Energies, tant de la puissance & du poids en équilibre entr'eux sur le Tour, *que de la résistance du centre ou de l'axe de la Machine à l'effort résultant sur lui du concours de ces deux forces; desquelles Ener-*


Fig. 273.
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.

gies les égalitées démontrés là, se pourroient encore déduire de celles qu'on vient de démontrer dans l'equilibre des Leviers, ausquels l'equilibre sur le Tour *se peut aisément rapporter.*

PARTIE V.

Pour l'equilibre d'un poids soûtenu sur un plan incliné par une puissance de direction quelconque.

I. Soit un poids OEZ de figure, de pesanteur P, & de direction AP quelconques, soûtenu sur un plan incliné HG par une puissance R de direction aussi quelconque AR; ce poids n'est ici de figure spherique que pour moins d'embarras de lignes, ce qu'on va dire de lui convenant également à des poids de figures quelconques. On a vû (*Th.* 26. *part.* 1.) que si du point A de concours des directions AP, AR, de ce poids OEZ & de la puissance R, qui (*Hyp.*) le soûtient, l'on mene AD perpendiculaire au plan HG, elle passera par quelque point O de la base de ce poids, lequel sera le point où le spherique touche ce plan; & que si autour de la diagonale AD prise à volonté de A vers D sur cette perpendiculaire, on fait un parallelogramme ABDC de côtez AB, AC, qui soient sur les directions AR, AP, de la puissance R, & de la pesanteur P du poids OEZ, cette pesanteur P de ce poids sera à la puissance R, comme AC à AB. Fig. 280.

Soit de plus la droite A*a* de longueur quelconque parallele à celle EG du plan incliné, sur laquelle A*a* prolongée de part & d'autre, tombent des angles B, C, du parallelogramme ABDC, deux perpendiculaires B*b*, C*c*, en *b*, *c*. Soient de plus du point *a* les droites *ap*, *ar*, perpendiculaires aussi en *p*, *r*, sur les directions prolongées AP, AR, du poids OEZ & de la puissance R.

Cela fait, les triangles A*pa*, A*c*C; A*ra*, A*b*B, rectangles (*Hyp.*) en *p*, *c*; *r*, *b*, ayant deux à deux, comme on les voit ici distinguez, leurs angles égaux en A, seront semblables entr'eux ainsi pris deux à deux, & donneront

ainsi $Aa. Ap :: AC. Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}$. Et $Aa. Ar :: AB. Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}$. Donc le Lem. 10. donnant $Ac = Ab$, l'on aura ici $AC \times Ap = AB \times Ar$. Or l'équilibre qu'on y suppose entre la puissance R & la pesanteur P du poids OEZ, donne (*Th. 26. part. 1.*) $R. P :: AB. AC = \frac{AB \times P}{R}$. Donc en substituant cette valeur de AC dans la derniere égalité $AC \times Ap = AB \times Ar$, l'on aura ici $\frac{AB \times P \times Ap}{R} = AB \times Ar$; d'où résulte $P \times Ap = R \times Ar$.

Soit presentement le systême mû de A vers *a*, de maniere que tous ses points décrivent des droites égales & paralleles à A*a*; & consequemment que lorsque le point A de concours des directions de la puissance R & de la pesanteur P du poids OEZ, sera en *a*, ces directions AR, AP, soient sur leurs paralleles $a\rho$, $a\pi$; & la droite AD aussi sur sa parallele *ad*, ayant son point O en ω sur le plan HG. En ce cas la Déf. 32. donnera A*p*, A*r*, pour les vîtesses virtuelles du poids P & de la puissance R, & $P \times Ap$, $R \times Ar$, pour leurs Energies, desquelles Energies la premiere sera ici affirmative, & la seconde negative. Donc venant de trouver $P \times Ap = R \times Ar$, l'on aura ici l'Energie affirmative de la pesanteur P du poids OEZ, égale à l'Energie negative (affirmativement prise) de la puissance R, sans que la résistance du plan HG y en ait aucune. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

II. 1°. Si la direction AR de la puissance R étoit parallele, comme (*Hyp.*) *bc*, à la longueur GH du plan incliné; & la direction AP de la pesanteur P du poids OEZ, parallele aussi à la hauteur HK de ce plan : cette hypothese faisant tomber en *a* le point *r* de cette direction AR prolongée, & rendant ainsi non seulement les triangles (*Hyp.*) rectangles A*pa*, HKG, semblables entr'eux, mais

encore $Ar = Aa$; la vîtesse virtuelle de la puissance R seroit alors (*Déf.* 32.) à la vîtesse virtuelle du poids OEZ :: Aa. Ap :: HG. HK. Donc l'équilibre supposé donnant aussi pour lors (*Th.* 26. *Corol.* 20. *art.* 1. *nomb.* 1.) P. R :: HG. HK. Cette hypothese rendroit P. R :: Aa. Ap. Et consequemment $P \times Ap = R \times Aa$. D'où l'on voit que les Energies (*Déf.* 32.) $P \times Ap$, $R \times Aa$, du poids OEZ & de la puissance R, seroient encore ici égales entr'elles : la premiere affirmative, & la seconde negative, comme le sont celles que ce poids & cette puissance ont dans le précedent art. 1.

2°. La direction AP de la pesanteur P du poids OEZ demeurant parallele à la hauteur HK du plan incliné HG, si la direction AR de la puissance R étoit parallele à la base GK de ce plan : le triangle arA se trouvant alors semblable au triangle Apa, qui le seroit aussi au triangle HKG; la vîtesse virtuelle (Ar) de la puissance R seroit alors à la vîtesse virtuelle (Ap) du poids OEZ :: ap. Ap :: GK. HK. c'est-à-dire, qu'alors on auroit Ar. Ap :: GK. HK. Or l'équilibre ici supposé y donne (*Th.* 26. *Cor.* 20. *art.* 2. *nomb.* 1.) R. P :: HK. GK. Donc (en multipliant ces deux analogies par ordre) l'on auroit ici $R \times Ar$, $P \times Ap$ :: $HK \times GK$. $GK \times HK$ :: 1. 1. c'est-à-dire, que ces deux Energies (*Déf.* 32.) $R \times Ar$, $P \times Ap$, de la puissance R & de la pesanteur P du poids OEZ, seroient encore ici égales entr'elles : la premiere negative, & la seconde affirmative, comme le sont celles de cette puissance & de ce poids dans l'art. 1. & dans le précedent nomb. 1.

III. Si avec les Energies de la puissance R & du poids OEZ en équilibre entr'eux sur le plan incliné HG, suivant des directions quelconques AR, AP, on veut comprendre aussi l'Energie de la résistance (que j'appelle D) de ce plan HG, égale & directement opposée (*Ax.* 4.) à l'effort résultant de A vers D (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *nomb.* 1. & *Th.* 21. *part.* 1. 2.) du concours d'action de cette puissance & de ce poids contre ce plan suivant AD perpendiculaire (comme dans l'art. 1.) à ce même plan HG en

quelque point O où il soit touché par la base de ce poids OEZ de figure quelconque ; soit le parallelogramme ABDC fait comme dans l'art. 1. des angles B, C, D, duquel tombent les droites B*b*, C*c*, D*δ*, perpendiculaires en *b*, *c*, *δ*, à une droite *bc* menée à volonté par le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan incliné HG, sur lequel cette puissance & ce poids sont supposez en équilibre entr'eux. Après cela d'un autre point *a* quelconque de la droite *b*A prolongée, soient menées A*r*, A*p*, A*d*, perpendiculaires en *r*, *p*, *d*, sur les directions prolongées AR ; AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan HG.

Cela fait, les triangles A*ra*, A*b*B ; A*pa*, A*c*C ; A*da*, A*δ*D, rectangles (*constr.*) en *r*, *b*, *p*, *c*, *d*, *δ*, ayant deux à deux, comme on les voit ici distinguez, leurs angles égaux en A seront semblables entr'eux, ainsi pris deux à deux ; & en consequence donneront

$$Aa.\ Ar :: AB.\ Ab = \frac{AB \times Ar}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ap :: AC.\ Ac = \frac{AC \times Ap}{Aa}.$$

$$Aa.\ Ad :: AD.\ A\delta = \frac{AD \times Ad}{Aa}.$$

Par consequent le Lemme 10. donnant $A\delta = Ac \pm Ab$, dont le superieur du double signe $\mp$ est pour la Fig. 281. & l'inferieur pour la Fig. 282. l'on aura ici $AD \times Ad = AC \times Ap \mp AB \times Ar$, dont le double signe $\mp$ sera de même signification que le précedent. Or l'équilibre ici supposé donne (*Th.* 26. *Cor.* 7.) $D.\ P :: AD.\ AC = \frac{AD \times P}{D}$. Et $D.\ R :: AD.\ AB = \frac{AD \times R}{D}$. Donc en substituant ces valeurs de

AC,

AC, AB, dans l'égalité qui les précede, l'on aura ici AD $\times Ad = \frac{AD \times P \times Ap \mp AD \times R \times Ar}{D}$; d'où résulte $D \times Ad = P \times Ap \mp R \times Ar$: sçavoir, $D \times Ad = P \times Ap - R \times Ar$, ou $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ dans le cas de la Fig. 281. & $D \times Ad = P \times Ap + R \times Ar$ dans la Fig. 282.

Soit presentement le systême mû de A vers *a*, comme dans l'art. 1. c'est-à-dire, de maniere que tous ses points décrivent des droites égales & paralleles à A*a* de longueur & de position quelconques; & que lorsque le point A de concours des directions AR, AP, DA, de la puissance R, de la pesanteur P du poids OEZ, & de la résistance D du plan HG, sera en *a*, ces directions mûes ainsi parallelement à elles-mêmes, soient sur leurs paralleles *a*ρ, *a*ϖ, *af*; & ce plan HG (mû aussi parallelement à lui-même) sur sa parallele *hg*, ayant son point O en celui ω de rencontre de cette parallele *hg* avec sa perpendiculaire *af*; auquel point ω celui O de ce plan arrive après avoir parcouru la droite Oω parallele & égale à A*a*, dans le tems que le point A a employé cette autre droite A*a*, & que toutes les lignes AR, AP, DA, HG, ont aussi mis à arriver sur leurs paralleles *a*ρ, *a*ϖ, *af*, *hg*.

Ce mouvement supposé de tout le systême, la Déf. 32. donnera A*r*, A*p*, A*d*, pour les vîtesses virtuelles de la puissance R du poids OEZ de pesanteur P, & de la résistance D du plan HG, & $R \times Ar$, $P \times Ap$, $D \times Ad$, pour leurs Energies, dont la seconde sera affirmative, & les deux autres negatives dans la Fig. 281. & dont la troisiéme sera affirmative, & les deux premieres negatives dans la Figure 282. Par consequent venant de trouver $D \times Ad + R \times Ar = P \times Ap$ pour le cas de la Figure 281. & $D \times Ad = P \times Ap + R \times Ar$ pour le cas de la Fig. 282. l'on aura ici pour l'un & pour l'autre cas une Energie affirmative égale à la somme de deux Energies negatives affirmativement prises. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

IV. Si l'on suppose presentement que *a*A soit perpen-

diculaire sur AD, comme l'est (*Hyp.*) *ad* & fasse conséquemment des angles aigus avec A*p*, A*r*, dans la Fig. 282. comme dans la Fig. 281. Cette hypothese, qui fait passer A*p* de l'autre côté de A vers P dans la Fig. 282. & qui y fait tomber *d* en A, de même que dans la Fig. 281. rendant ainsi A*d*=*o* dans toutes deux, & A*p* negative dans la Fig. 282. changera également en P×A*p*= R×A*r* pour ces deux Fig. 281. 282. les égalitez qu'on vient de trouver pour chacune d'elles sur la fin du précedent art. 3. y faisant cesser l'Energie D×A*d* de la résistance D du plan GH par A*d*=*o*, qui résulte de cette hypothese dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. D'où l'on voit que dans toutes deux cette hypothese de A*a* perpendiculaire sur AD, rendra l'Energie affirmative du poids OEZ égale à l'Energie negative (affirmativement prise) de la puissance R: le tout comme dans l'art. 1. Fig. 280.

On pourra faire encore ici sur l'art. 3. d'autres reflexions pareilles à celles qu'on a faites dans l'art. 4. de la part. 3. & dans la reflexion italique qui ensuit l'art. 5. touchant les Energies, tant de la puissance & du poids en équilibre entr'eux sur le Tour, *que de la résistance du centre ou de l'axe de cette Machine à l'effort résultant sur lui du concours d'action de ces deux forces.*

PARTIE VI.

Pour l'équilibre de la charge de la Vis ou de son Ecroue avec la puissance qui lui est appliquée.

Fig. 243. Section 7. I. Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. Fig. 243. soit l'équilibre supposé entre la puissance P & la charge de l'Ecroue PQ, la Vis VXYZ étant fixe, ou entre la puissance T, & la charge de cette Vis, si c'est l'Ecroue qui soit fixe: soit, dis-je, cet équilibre rompu par quelque augmentation ou diminution de force de cette puissance P ou T, ou bien par quelque dimi-

nution ou augmentation de la charge de l'Ecroue ou de la Vis. Il est manifeste que pendant que cette augmentation ou diminution de force ou de charge fera faire un tour entier à la puissance T ou P, & lui fera ainsi décrire un cercle entier du rayon ST ou EP, autour de l'axe MS de cette Vis; la charge de cette même Vis VXYZ, ou de son Ecroue PQ, avancera de la valeur d'un pas HK de cette Vis suivant cette direction parallele à son axe MS; & qu'ainsi, suivant la Déf. 32. (en appellant O la circonference entiere de ce cercle quelconque; & A la charge aussi quelconque de la Vis ou de son Ecroue) cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, exprimeront les vîtesses virtuelles de la puissance T ou P, & de la charge A de cette Vis ou de son Ecroue; & les produits T×O ou P×O, & A×HK, en exprimeront les Energies. Or dans l'équilibre ici supposé le Th. 33. donnant P. A :: HK. O. lorsque la Vis est fixe, & T. A :: HK. O. lorsque c'est l'Ecroue qui est fixe, donne consequemment pour le premier cas P×O=A×HK, & T×O=A×HK pour le second. Donc en cet équilibre supposé, l'Energie de la puissance P ou T, est toujours égale à l'Energie de la charge A que cette puissance soûtient par le moyen de la Vis VXYZ, ou de son Ecroue PQ. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

II. Ce qu'on voit ici de la circonference O du cercle décrit du rayon ST ou EP, & du pas HK de la Vis, se dira de même de leurs parties proportionnelles quelconques $\frac{O}{n}$, $\frac{HK}{n}$; lesquelles parcourues par des mouvemens contemporains, comme le sont les totaux en vertu desquels cette circonference O, & ce pas HK de la Vis, seroient parcourus dans l'art. 1. expriment comme eux (*Déf.* 32.) les vîtesses virtuelles de la puissance T ou P, & de la charge A de la Vis VXYZ, ou de son Ecroue PQ: & consequemment (*Déf.* 32.) les produits $\frac{T\times O}{n}$ ou $\frac{P\times O}{n}$, & $\frac{A\times HK}{n}$, exprimeroient aussi les Energies de cette puis-

ſance T ou P, & de cette charge A; leſquelles Energies (pour ainſi dire) partiales ſeroient encore égales entr'elles, comme le tout (*art.* 1.) les totales T×O ou P×O, & A×HK.

FIG. 245. III. Quant à la Vis ſans fin de la Fig. 245. toutes choſes demeurant ici les mêmes que dans le Th. 35. imaginons que l'équilibre ſuppoſé entre la puiſſance R & le poids Q, y ſoit rompu par quelque augmentation de la force de la puiſſance R, ou par quelque diminution de la peſanteur du poids Q. Il eſt viſible qu'alors à chaque tour entier de la manivelle DFR autour de ſon axe GK, ou de la puiſſance R autour du centre K, la dent P de la roue dentée P*p*S, qui eſt entre les ſpires ou helices AP, BP, de la Vis, en ſortira, & la dent ſuivante *p* y entrera, de maniere que chacune de ces dents P, *p*, parcourra pour lors la valeur de chacun des pas AB de cette Vis. Donc ſi l'on imagine du centre C un cercle qui paſſe par les extrêmitez de toutes ces dents, ce tour entier de la manivelle DFR autour de ſon axe GK, ou de la puiſſance R autour du centre K, fera mouvoir ce cercle imaginaire de la valeur d'un arc *p*P=AB; & conſequemment auſſi le poids Q de la valeur d'un arc ſemblable *e*E : de ſorte qu'en appellant O la circonference entiere du cercle décrit autour du centre K par la puiſſance R dans un tour entier de la manivelle DFR, l'on aura ici (*Déf.* 3.1.) cette circonference O, & l'arc E*e*, pour les expreſſions des vîteſſes virtuelles de la puiſſance R, & du poids Q; & R×O, Q×E*e*, pour les expreſſions de leurs Energies.

Cela poſé, puiſque l'on vient de trouver P*p*=AB, l'on aura AB. E*e* : : P*p*. E*e* : : CP. CE. Ce qui donne AB×CE=CP×E*e*. Donc le Th. 35. donnant R. Q : : AB×CE. CP×O. dans le cas d'équilibre qu'on ſuppoſe ici comme là entre la puiſſance R & le poids Q ſur la Vis compoſée dont il s'agit ici, l'on y aura auſſi R. Q : : CP×E*e*. CP×O : : E*e*. O. D'où réſulte R×O=Q×E*e*. Donc venant de trouver R×O, Q×E*e*, pour les expreſſions des Energies de la puiſſance R, & du poids Q, leurs Energies ſeront ici égales entr'elles. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

Un raisonnement semblable à celui du précedent art. 2. fera encore voir que ces Energies de la puissance R & du poids Q, peuvent aussi être exprimées par $\frac{R \times O}{n}$, $\frac{Q \times Ee}{n}$, quelque soit le nombre *n*, qui les laisseroit encore égales entr'elles.

La Déf. 32. fait assez voir que des Energies trouvées égales deux à deux dans les précedens art. 1. 2. 3. il y en a toûjours une affirmative, & l'autre negative; que l'affirmative est toûjours celle de la force en faveur de laquelle s'est fait le mouvement donné à la Machine, & la negative, toûjours celle de l'autre force à qui ce mouvement s'est trouvé contraire: j'appelle ici Forces, *la charge de la Vis ou de son Ecroue dans la Fig. 243. le poids Q dans la Fig. 245. & la puissance en équilibre avec cette charge dans la Fig. 243. ou avec ce poids dans la Fig. 245. c'est pour m'exprimer plus clairement, & en moins de mots que je les appelle de ce nom commun.*

PARTIE VII.

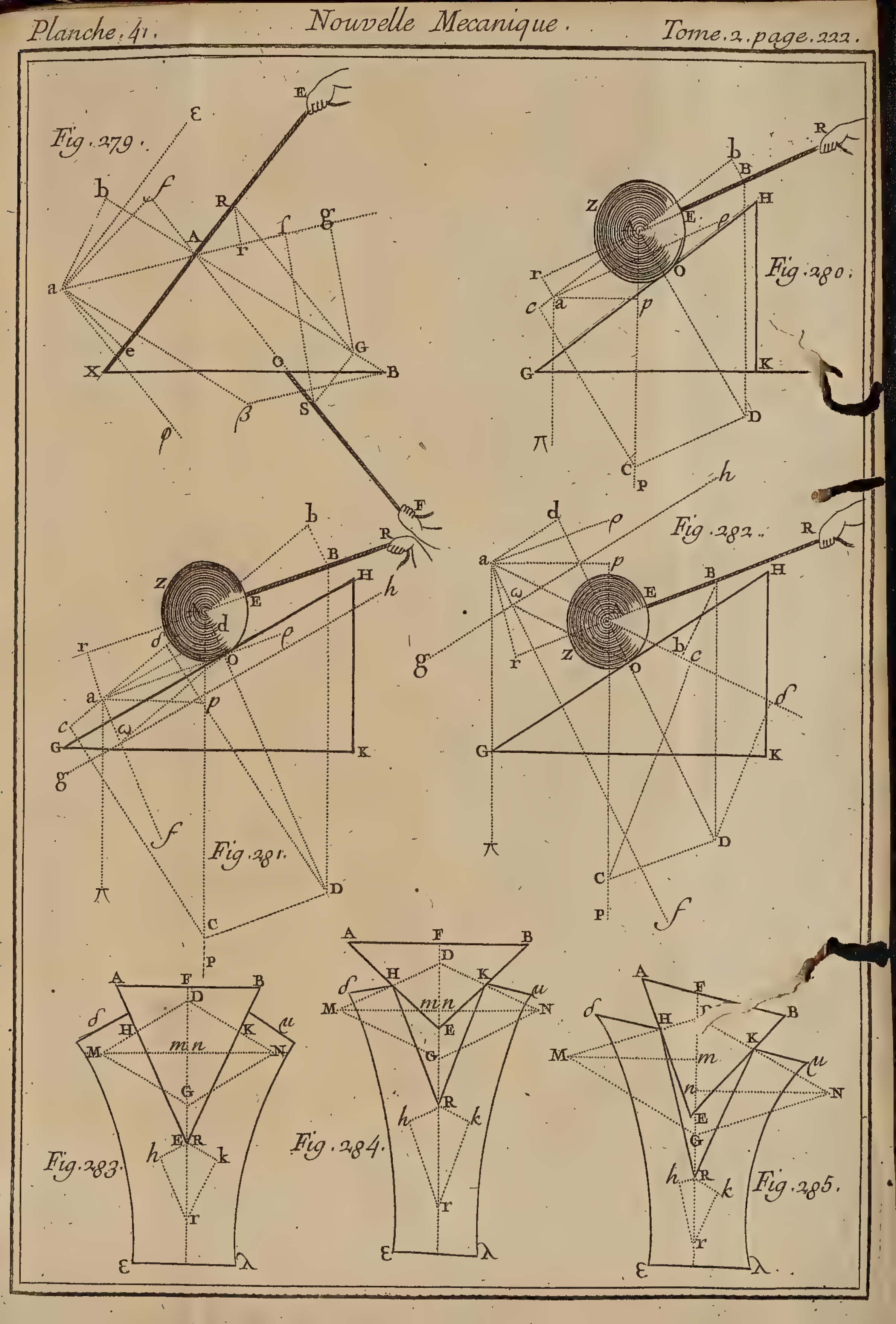
Pour l'équilibre de l'effort du Coin avec la résistance des côtez de la fente qu'il tend à faire ou à augmenter dans le corps à fendre.

I. Soit comme dans le Th. 37. le Coin AEB poussé d'une force F suivant une direction FG, qui doit toûjours (*Th.* 37.) passer par l'angle R de la fente HRK du corps à fendre δελμ, dans laquelle cette force F tend à enfoncer ce Coin, & le tient en équilibre avec les résistances des côtez HR, KR, de cette fente, touchez par ceux de ce même Coin AEB en des points H, K, par lesquels on peut toûjours* (*Th.* 37.) mener de quelque point D de la direction FG du Coin, des perpendiculaires DM, DN, à ces côtez HR, KR, de la fente HRK; sur lesquelles perpendiculaires soient les côtez du parallelogramme DMRN, dont la diagonale de longueur arbitraire DG soit sur la direction FG du Coin AEB. Des- Fig. 283. 284. 285.

angles M, N, de ce parallelogramme soient Mm, Nn, perpendiculaires en m, n, sur cette diagonale DG; & d'un point r infiniment proche de R, de cette même diagonale prolongée, soient rh, rk, paralleles aux côtez RH, RK, de la fente HRK, avec Rh, Rk, perpendiculaires en h, k, sur ces paralleles rh, rk.

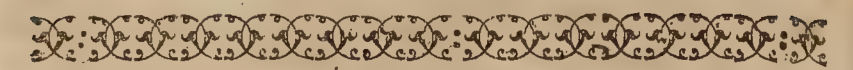
Suivant cette construction, l'on aura les triangles rectangles Rhr, DHR, DmM; Rkr, DKR, DnN, semblables entr'eux trois à trois distinguez comme on les voit ici; ce qui avec le nomb. 1. du Corol. 1. du Lem. 3. (en appellant F la force du Coin AEB suivant sa direction DG ou Fr; M, N, les résistances des côtez HR, KR, de la fente HRK, suivant leurs directions HD, KD, ou MD, ND; & m, n, les efforts qui en résultent suivant mD, nD, directement à contre-sens de la force F du Coin) donnera $Rr.Rh :: DM.Dm :: M.m = \frac{M \times Rh}{Rr}$. Et $Rr.Rk :: DN.Dn :: N.n = \frac{N \times Rk}{Rr}$. Donc $m + n = \frac{M \times Rh + N \times Rk}{Rr}$. Or (*Lem.* 3. *part.* 2.) $m.n :: Dm.Dn$. Ce qui (en composant) donne $m.m+n :: Dm.Dm+Dn$. De plus (*Lem.* 3. *Corol.* 6.) $F.M :: DG.DM$. Et $M.m :: DM.Dm$. Ce qui (en raison ordonnée) donne $F.m :: DG.Dm$. Donc ayant déja $m.m+n :: Dm.Dm+Dn$. l'on aura ici (en raison ordonnée) $F.m+n :: DG.Dm+Dn$. Par consequent venant de trouver $m+n = \frac{M \times Rh + N \times Rk}{Rr}$, on aura pareillement ici $F.\frac{M \times Rh + N \times Rk}{Rr} :: DG.Dm+Dn$. Or $Gn = Dm$ rend $DG = Dm + Dn$. Donc aussi $F = \frac{M \times Rh + N \times Rk}{Rr}$; & consequemment $F \times Rr = M \times Rh + N \times Rk$.

II. Imaginons presentement une nouvelle force suivant FR, laquelle rompe l'équilibre supposé entre la force F


Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 281.
Fig. 282.
Fig. 283.
Fig. 284.
Fig. 285.

du Coin AEB suivant FR, & les résistances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK suivant leurs perpendiculaires HD, KD, ou MD, ND; laquelle nouvelle force faisant enfoncer ce Coin en augmentant de la valeur infiniment petite Rr la profondeur de cette fente HRK du corps à fendre $\delta\epsilon\lambda\mu$; fasse ainsi avancer ce même Coin AEB de cette valeur Rr, pendant que les côtez HR, KR, de cette même fente HRK; seront ainsi forcez d'aller se coucher sur leurs paralleles hr, kr, en s'écartant de leurs premieres situations, c'est-à-dire, l'un de l'autre, des valeurs infiniment petites de leurs perpendiculaires Rh, Rk, paralleles à leurs directions DM, DN. Alors suivant la Déf. 32. ces lignes infiniment petites Rh, Rk, ainsi parcourues par les côtez HR, HK, de la fente HRK, pendant que le Coin AEB avanceroit de la valeur de Rr, suivant sa direction Fr: alors, dis-je, ces petites lignes Rh, Rk, exprimeroient les vîtesses virtuelles de ces côtez HR, KR, de la fente HRK, de même que Rr exprimeroit celle du Coin AEB; de sorte que suivant la même Déf. 32. les produits M×Rh, N×Rk, F×Rr, exprimeroient les Energies des résistances M, N, de ces côtez de la fente, & de la force F du Coin, dont l'Energie F×Rr sera ici affirmative, & les deux autres negatives. Or on vient de trouver (*art.* 1.) F×Rr=M×Rh+N×Rk. Donc on aura ici l'Energie affirmative de la force F du Coin AEB, égale à la somme des Energies negatives (affirmativement prises) des résistances M, N, des côtez HR, KR, de la fente HRK du corps à fendre $\delta\epsilon\lambda\mu$, supposées en équilibre avec cette force F du Coin AEB. *Ce qu'il falloit démontrer.*





SECTION X.

De l'Equilibre des Liqueurs.

QUelques personnes habiles prévenues en faveur du principe de Statique de M. Descartes, qui est qu'*il faut autant de force pour faire monter un poids, par exemple, d'une livre à 100 pied de hauteur, que pour en faire monter un de 100 livres à un pied*: ces personnes, dis-je, prévenues en faveur de ce principe, sur tout par rapport à l'explication de l'équilibre des Liqueurs, parmi lesquelles est un Auteur, dont on verra les objections Latines resolues dans la suite, m'ayant marqué toutes simplement qu'elles ne voyoient pas comment on pourroit, hors lui, qui a dit nettement qu'on ne peut pas rendre raison de cet équilibre par le principe dont je me servis en 1687. & dont je me sers encore ici pour démontrer l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines; m'engagent à ajoûter ici cette Section pour les satisfaire sur ce sujet, & en même tems ce qu'il y en pourroit avoir d'autres, ausquels cette prévention commune à plusieurs, ou quelqu'autre cause ne laisseroit pas assez d'attention pour voir d'eux-mêmes que le principe qu'on suit ici, peut servir aussi aisément à rendre raison de l'équilibre des Liqueurs, qu'on l'a vû servir jusqu'ici à rendre celle de l'équilibre des forces ou des poids appliquez à des Machines, & ici comme là par la generation de l'équilibre toûjours & par tout résultant de l'opposition directe entre deux forces égales, ou entre une force & une résistance invincible, soit que chacune de ces forces soit simple, ou dérivée, ou composée de tant d'autres qu'on voudra. Cela s'est vû jusqu'ici par rapport à l'équilibre sur des Machines; le voici aussi par rapport à l'équilibre des Liqueurs, dont les pesanteurs quelconques seront par tout prises

prises ici à l'ordinaire, comme tendantes de haut en bas suivant des directions paralleles verticales.

Si je n'avois affaire qu'à des Cartesiens, tels que l'Auteur dont je viens de parler, & qui seul m'oblige de m'expliquer sur le principe de Statique de M. Descartes, par l'objection qu'il m'en fait; peut-être que pour en obtenir un peu plus d'attention à ce que je vas dire, il ne seroit pas hors de propos de leur demander la solution de quelques difficultez que voici par rapport à leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs: je leur proposerois le Ciphon MDEN de branches cylindriques verticales, MD, NE, inégales en grosseur, dans lequel il y auroit de l'eau en équilibre jusqu'au niveau AH; & je leur demandrois la raison de cet équilibre.

I. Ils me répondroient à leur ordinaire, que s'il n'y avoit pas ici d'équilibre, l'eau descendroit dans une des branches du Ciphon, & monteroit dans l'autre; de maniere que si sa surface, par exemple, AL descendoit de quelque hauteur AB que ce soit dans sa grosse branche MD, elle forceroit la surface HO de l'eau de la petite branche NE d'y monter d'une hauteur HK, telle qu'on auroit alors AL×AB=HO×HK. FIG. 286.

Cela est vrai, puisque les quantitez d'eau BALP, HKQO, sont égales entr'elles. Mais que s'ensuit-il de là? sinon qu'en ce cas de non équilibre les hauteurs AB, HK, qui exprimeroient également ici les vîtesses contemporaines & les chemins contemporains des surfaces AL, KO, y seroient entr'elles en raison reciproque de ces mêmes surfaces?

II. En voilà assez pour ce que nous prétendons, diront-ils sans doute; puisque, suivant le principe précedent de M. Descartes, il faut des forces égales pour faire parcourir à des poids des chemins differens qui soient en raison reciproque de ces mêmes poids; & que suivant le nomb. 1. en cas de non équilibre les surfaces ou lames d'eau AL, HO, où leurs poids seroient ici en raison reciproque des chemins AB, HK, qu'elles y parcourroient.



Donc elles y auroient des forces égales ; & par consequent elles y demeureroient en équilibre entr'elles au niveau AH, auquel on les a supposées d'abord, au lieu de se mouvoir, comme ces Messieurs viennent aussi de le supposer, pour en déduire ainsi cet équilibre.

Cette derniere consequence, si elle étoit valable, ne seroit tout au plus que *ab absurdo*, puisque ce ne seroit y conclure l'équilibre que du non-équilibre. Mais il s'en faut bien qu'elle soit juste ; puisque pour l'équilibre entre deux forces ce n'est pas assez qu'elles soient égales entr'elles, il faut de plus qu'elles soient contraires l'une à l'autre jusqu'à se détruire ou s'empêcher mutuellement. Or c'est ce qui ne se trouve point ici ; puisque ce n'est que du non-équilibre entre les surfaces ou lames d'eau AL, HO, qu'on leur y trouve des forces égales, qui bien loin d'être contraires entr'elles, y sont parfaitement d'accord, & tellement que l'une y faisant descendre AL, & l'autre faisant monter HO, la seconde y obéït à la premiere malgré la résistance qu'y fait le poids de l'eau qu'elle y fait monter dans la petite branche EN ; laquelle résistance ainsi surmontée dans ce cas de non-équilibre par la force du poids de l'eau de la grande branche MD, seroit consequemment ici moindre que cette force, dont l'excès sur la force du poids de l'eau de la petite branche, s'y distriburoit en deux parties qui seroient les forces égales de descente & d'ascension qu'on vient de trouver aux surfaces ou lames d'eau AL, HO, dans ce cas de non-équilibre, où les poids des colonnes d'eau comprises dans les branches MD, NE, du Ciphon MDEN, auroient ainsi des forces inégales pour les y faire descendre de part & d'autre. Donc de ce qu'en ce cas de non-équilibre les forces de descente d'une des surfaces ou lames d'eau AL, HO, & d'ascension de l'autre, sont égales entr'elles ; il ne s'ensuit pas, ainsi qu'on l'en vient de conclure à la maniere (ce me semble) des Cartesiens, que les efforts contraires que les poids des deux colonnes d'eau supposées d'abord à niveau en AH dans les deux branches du Ci-

phon MDEN, font pour les y faire deſcendre, ſoient égaux entr'eux ; ni conſequemment que ces colonnes ou cylindres d'eau doivent demeurer en équilibre à ce niveau.

III. Le défaut de juſteſſe de cette conſequence n'eſt pas le ſeul qui me paroiſſe dans le raiſonnement de l'art. 2. fait (ce me ſemble) à la maniere des Carteſiens : il m'y paroît encore un autre défaut, qui conſiſte en ce qu'on n'y compte que les mouvemens des ſurfaces AL, HO, quoiqu'il y en ait beaucoup davantage. Car pour que la ſurface ou lame d'eau AL deſcende de la hauteur quelconque AB dans la groſſe branche MD du Ciphon MDEN, il faut (en ſuppoſant horiſontal le plan touchant CF du canal de communication des deux branches MD, EN, de ce Ciphon) que tout le cylindre d'eau ACGL deſcende auſſi de cette hauteur AB ; puiſque la ſurface ou lame AL de ce cylindre d'eau contenue dans la branche MD, n'y ſçauroit deſcendre de cette hauteur AB en BP, à moins que cette ſeconde lame-ci ne deſcende d'autant en la place d'une troiſiéme de cette diſtance au-deſſous d'elle ; pour cela il faut de même que cette troiſiéme lame d'eau deſcende auſſi d'une pareille hauteur en la place d'une quatriéme de même diſtance au-deſſous d'elle, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere lame CG qui entrera pour lors dans le canal CFED de communication des deux branches du Ciphon MDEN : d'où l'on voit que pour que la ſurface ou lame d'eau AL deſcende de la hauteur AB, il faut que toutes les ſuivantes juſqu'en CG, & conſequemment auſſi que tout le cylindre d'eau ACGL, composé de toutes ces lames ou petits cylindres égaux, deſcende alors de cette hauteur AB. On démontrera de même que pour que la ſurface HO de l'autre cylindre d'eau HFPO, forcée par cette deſcente de ACGL (ſuppoſé d'abord lui être à niveau) de monter en KQ d'une hauteur HK, qui rende KQ×HK=AL×AB, monte en effet de cette hauteur, il faut que tout le cylindre KFPQ monte auſſi de cette hauteur HK, dans le tems que l'autre ACGL deſcend de la hauteur AB. Par conſequent

en ce cas-ci de non-équilibre les vîtesses de ce cylindre d'eau ACGL, & d'ascension de l'autre KFPQ, seront ici entr'elles en raison de ces hauteurs AB, HK, qu'ils y parcourent en même tems en ces deux sens contraires. Ainsi les quantitez de mouvemens de ces deux cylindres d'eau ACGL=AC×AL, & KFPQ=KF×KQ, seront ici entr'elles : : AC×AL×AB. KF×KQ×HK (à cause de AL×AB=KQ×HK) : : AC. KF.

Ce sont-là les quantitez de mouvement résultantes ici du non-équilibre qu'on y suppose, & non pas les seules des deux surfaces ou lames d'eau AL, HO, prises dans le raisonnement de l'art. 2. pour tout ce qui en résulte de ce non-équilibre. Donc outre le défaut de ce raisonnement, marqué dans cet art. 2. quand même il n'y auroit point ici d'autre mouvement que celui des surfaces AL, HO : y voici encore un autre défaut, qui vient de n'y avoir supposé que cette seule quantité de mouvement.

IV. Peut-être que ceux ausquels j'expose bonnement ici mes difficultez sur leur maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, diront que les quantitez de mouvement qu'ils prennent ici pour les résultantes du non-équilibre qu'ils y supposent entre les cylindres d'eau ACGL, HFPO, pour en conclure l'équilibre entr'eux, ne sont pas les seules des surfaces AL, HO, ainsi qu'on l'a crû dans l'art. 2. mais qu'elles sont celles des cylindres entiers ACGL, HFPO, telles qu'on les leur vient de trouver dans le précedent art. 3. en raison des hauteurs AC, FK, de ces deux cylindres d'eau ; lesquelles quantitez de mouvement sont égales entr'elles, non pas à la verité toûjours, mais du moins au premier instant de leurs naissances contemporaines ; puisque les hauteurs AB, HK, de descente de la colonne d'eau ACGL, & d'ascension de HFPO supposée d'abord à niveau de celle-là, parcourues par ces deux cylindres d'eau pendant ce même instant, se trouvant alors infiniment petites, & consequemment négligeables par rapport aux finies AC, FK ; n'empêchent point que celles-ci, ni consequemment (*art.* 3.) que les quantitez

de mouvement des cylindres d'eau ACGL, KFPQ, ne puiſſent être priſes pour égales entr'elles en ce cas de non-équilibre. Cela étant, & l'infinie petiteſſe de la hauteur HK permettant auſſi de prendre pour égaux entr'eux les cylindres KFPQ, HFPO, qui en montant la parcourent enſemble de vîteſſes égales ; & conſequemment comme ayant alors des quantitez égales de mouvement : les cylindres d'eau ACGL, HFPO, ſuppoſés d'abord à niveau entr'eux, auroient pareillement ici des quantitez égales entr'elles de mouvement au premier inſtant de leur non-équilibre, lequel par conſequent y rendroit ces deux cylindres d'eau ACGL, HFPO, ou leurs poids en raiſon reciproque de leurs vîteſſes exprimées par les hauteurs AB de deſcente du premier, & HK d'aſcenſion du ſecond, qu'ils y parcoureroient ce premier inſtant. Donc alors, diront ces Sectateurs de M. Deſcartes, ſuivant ſon principe rapporté ci-deſſus, ces deux cylindres d'eau auroient ici des forces égales ; & par conſequent y demeureroient en équilibre entr'eux, & leurs ſurfaces AL, HO, au niveau AH auquel on les a ſuppoſées d'abord, au lieu de ſe mouvoir ainſi que ces Meſſieurs le ſuppoſent auſſi d'abord pour prouver cet équilibre.

Cette derniere conſequence eſt la même que la derniere du raiſonnement de l'art. 2. avec cette ſeule difference, que là elle eſt déduite de l'égalité des ſeuls mouvemens que les ſurfaces AL, HO, des cylindres d'eau ACGL, HFPO, auroient dans le cas de leur non-équilibre ; & qu'ici elle eſt déduite de l'égalité de ce que ces deux cylindres en auroient alors ; l'un au gré de ſa peſanteur, & l'autre malgré la ſienne : de ſorte que des deux défauts que les art. 2. 3. font voir dans la premiere de ces deux conſequences des raiſonnemens Carteſiens de l'art. 2. & de celui-ci, la ſeconde eſt exempte du premier venu (*art.* 3.) de n'avoir pas employé dans l'art. 2. comme dans celui-ci, tout le mouvement de l'eau des branches du Ciphon, réſultant du non-équilibre ſuppoſé. Mais cette ſeconde conſequence, qui eſt la derniere du

raisonnement Cartesien de cet article-ci, a le second des défauts de celle-là, étant aussi peu juste qu'elle, comme on le verra par la même raison qui a fait voir le défaut de justesse de cette derniere consequence de l'art. 2. dans la réflexion faite sur elle dans ce même art. 2.

V. J'avouerai encore ici que ce même défaut de justesse me paroît de même, & pour la même raison dans la consequence que les Cartesiens tirent du même principe de leur Maître par rapport à l'équilibre entre deux forces ou deux poids appliquez à des Machines : par exemple, Fig. 287. après avoir dit à l'ordinaire que si deux poids A, F, appliquez aux extrêmitez du Levier AF appuyé en son point D placé entr'eux, sont en raison reciproque des bras DA, DF, de ce Levier, c'est-à-dire, que si A. F : : DF. DA. ces deux poids A, F, demeureront en equilibre entre-eux sur l'appui D de ce Levier : après, dis-je, cet énoncé, ces Messieurs, pour le prouver, disent que si ces deux poids A, F, ainsi conditionnez, ne demeuroient pas ici en équilibre entr'eux sur cet appui D, un d'eux, par exemple, A l'emporteroit sur l'autre ; & que pendant que ce poids A feroit ainsi passer le Levier AF en une autre situation quelconque CK, il parcourroit autour du centre D l'arc circulaire AC, en forçant l'autre poids F à parcourir en sens contraire l'arc semblable FK autour du même centre D : de sorte que l'on auroit alors FK. AC : : DF. DA (*Hyp.*) : : A. F. ou A. F : : FK. AC. c'est-à-dire, les poids A, F, entr'eux en raison reciproque des chemins AC, FK, qu'ils parcourreroient alors. D'où ces Sectateurs de M. Descartes concluent suivant son principe rapporté au commencement de cette Section-ci, que ces poids auroient alors des forces égales ; & consequemment qu'ils demeureroient ici en équilibre entr'eux sur l'appui D, au lieu de s'y mouvoir comme ces Auteurs le supposent d'abord, pour en déduire ainsi cet équilibre.

Cette derniere consequence est encore semblable à la derniere de l'art. 2. déduite de même à leur maniere ; & consequemment elle a aussi le même défaut de justesse

que celle-là, remarqué dans la réflexion faite sur cette autre-là dans cet art. 2. ou tout au plus celle ci ne prouveroit comme elle l'équilibre que *ab absurdo*, ou que par l'impossibilité du mouvement qui s'y opposeroit. La raison de cet inconvenient rapportée dans ce même art. 2. pour cette consequence-là par rapport à l'équilibre des Liqueurs, fera voir ce même inconvenient dans la précedente, par rapport à l'équilibre sur le Levier ici supposé : l'application y en est aisée à faire ; ainsi je ne m'y arrêterai pas davantage.

V I. Cette même raison pourroit aussi servir à faire voir de même cet inconvenient dans la maniere précisément la même dont les mêmes Auteurs expliquent l'équilibre sur les autres Machines, sans compter qu'il y a bien des Problêmes de Statique, qui ne seroient pas aisez à résoudre de cette maniere, sur tout ceux où il s'agiroit de mettre tant de puissances qu'on voudroit en équilibre sur celle qu'on voudroit de ces Machines (parmi lesquelles la funiculaire soit aussi comprise) n'en ayant de donné que l'appui, ou que les rapports de ces puissances, ou seulement leurs directions ; ce que les seules solutions qu'on voit ici de pareils Problêmes, font cependant voir être faciles à résoudre par le principe des forces composées ou dérivées, qu'on suit par tout ici.

Au reste, n'ayant en vûe que de faire faire attention à la fecondité de ce principe dans la Statique, & non d'attaquer l'usage qu'on y fait de celui de M. Descartes ; je n'expose ici mes difficultez sur cet usage, que forcé par l'Auteur qui m'en a fait une objection, & pour rendre en même tems le Lecteur prévenu en faveur de ce principe Cartesien, plus disposé à écouter l'explication que je vais donner de l'équilibre des Liqueurs suivant l'autre principe, toute aussi naturelle que celle qu'il m'a fournie jusqu'ici de l'équilibre des Solides : c'est dans les propositions suivantes que va se trouver cette explication démontrée de l'équilibre des Liqueurs, que je n'ajoûte ici



que parce qu'on m'a marqué la souhaiter, ne m'étant proposé jusques-là que de traiter (comme j'ai fait jusqu'ici) de l'équilibre des Solides, c'est-à-dire, des poids ou des puissances appliquées à des Machines; ce qui étoit tout le dessein du Projet qui parut de cet Ouvrage-ci en 1687. Ce qui s'y trouve démontré dans la prop. 3. comme ici dans la Section 6. des Poids soûtenus sur des Plans inclinez, réduisant toûjours l'équilibre de quantitez inégales d'une même Liqueur quelconque, ou de poids inégaux de Liqueurs differentes, contenues, par exemple, dans les branches du Ciphon, qui les auroit de grosseurs inégales, à l'équilibre de grosseurs égales & de poids égaux de ces Liquides, lesquelles s'y contrepesent, le surplus de ce qu'en contient la plus grosse des deux branches du Ciphon, étant toûjours soutenu (comme sur un plan incliné) sur ou contre le panchant du rétrécissement de cette grosse branche : c'est ce qu'on va démontrer, & en consequence que cette maniere d'expliquer l'équilibre des Liqueurs, est toute aussi naturelle que celle qu'on a vûe démontrée dans la prop. 3. du Projet de ceci publié en 1687. & qu'on voit encore ici démontrée de même dans la Section 6. de l'équilibre des Poids soûtenus sur des plans inclinez. Ce qu'auroient apperçû sans doute d'eux-mêmes, tant ceux qui m'ont marqué douter, que celui qui a nié que cet équilibre des Liqueurs pût aussi être démontré par le même principe de ce Projet & de tout ceci, si leur prévention pour la maniere Cartesienne d'expliquer cet équilibre des Liqueurs, leur eût permis assez d'attention pour cela : ils en jugeront mieux par ce qui suit, si les difficultez précedentes sur cette maniere Cartesienne, peuvent obtenir d'eux cette attention, pour laquelle obtenir j'ai fait ces difficultez, que j'aurois sûrement omises, si je n'y eusse point été forcé par l'Auteur dont je viens de parler, ne voulant de contestation avec personne.



DEFINITION

DEFINITION XXXIII.

On dit qu'une Liqueur est *à niveau*, lorsqu'elle a toute sa surface horisontale ; & l'on appelle *surface* d'une Liqueur ce qu'elle en a de non-touchée par le vase qui la contient, laquelle s'appellera aussi *surface libre*, & *non-empêchée* par les côtez du vase.

AXIOME IX.

Un corps pesant descend tant qu'il le peut, ou que rien ne l'en empêche absolument.

COROLLAIRE I.

Donc une Liqueur (parfaitement coulante, telles que seront celles dont on parlera dans la suite) abandonnée à elle-même dans un vase quelconque ABEF, doit toûjours s'y mettre à niveau : car si cette surface libre étoit MDN plus haute du côté de M que du côté de N, les parties de cette surface plus hautes du côté de M en pourroient descendre vers les plus basses du côté de N, le long de cette surface oblique MDN, comme le long d'un plan incliné, si on la suppose droite ou plane, ou comme le long de plusieurs plans inclinez contigus, si on la suppose faite de plusieurs planes, dont le nombre seroit infini, si on la supposoit courbe ; & toûjours de même jusqu'à ce qu'elle eût toutes ses parties d'égale hauteur dans un plan horisontal GH, qui la rencontrât en un endroit D, qui rendît égaux les espaces MDH, NDG. Donc, suivant l'Axiome précedent, si la surface de la Liqueur contenue dans le vase ABEF, étoit hors de niveau en MDN par quelque cause que ce fût, abandonnée à elle-même, elle s'y mettroit en GH par la chûte de la portion MDH de cette Liqueur dans l'espace égal NDG plus bas que MDH ; & par la même raison cette Liqueur resteroit à ce niveau GH, après toute agitation cessée, sa surface n'ayant plus alors de profondeur où aucune de ses parties puisse descendre. Donc une Liqueur abandonnée à elle-

Fig. 288. 289.



même dans un vase quelconque, doit toûjours enfin s'y mettre à niveau, & y rester en équilibre tant que rien ne l'y troublera.

COROLLAIRE II.

FIG. 290. En ce cas d'équilibre d'une Liqueur, ce n'est pas assez pour y rester à niveau, autrement l'eau d'une surface horisontale y pourroit rester à niveau sur de l'huile : il faut de plus que les colonnes voisines verticales PCDQ, QDKR, RKLS, &c. de cette Liqueur, se contre-balancent de maniere qu'aucune par son poids ne l'emporte sur l'autre ; autrement l'élevation de cette seconde colonne en rendroit les parties superieures plus élevées que les superieures de la premiere qui l'auroit fait monter, lesquelles se seroient ainsi abaissées : de sorte qu'alors, suivant l'Axiome, ces plus hautes parties tomberoient en la place ainsi abandonnée par les plus basses ; ce qui remettant (*Corol.* 1.) la Liqueur à niveau, & ses colonnes au même état qu'auparavant, celle qui auroit élevé sa voisine, l'éleveroit encore, & en feroit encore tomber (*Ax.* 9.) les parties superieures en la place abandonnée par les siennes en descendant, & toûjours de même : d'où résulteroit un mouvement perpetuel de cette Liqueur sans aucun niveau permanent, où elle demeurât en équilibre. Donc pour qu'elle y demeure à niveau, conformément au Corol. 1. ce n'est pas assez que la surface en soit horisontale, il faut de plus que ses colonnes verticales se contre-balancent, & se soûtiennent mutuellement, non seulement en s'appuyant contre les côtez du vase, mais encore en faisant effort sur son fond pour s'élever mutuellement comme feroient deux poids égaux aux extrêmitez d'une balance appuyée sur ce fond du vase. C'est ainsi que l'eau versée sur de l'huile dans un vase l'y force de monter, l'eau plus pesante que l'huile l'emportant sur elle dans le contre-balancement de leurs colonnes, quoiqu'égales : l'emportant, dis-je, par son plus grand poids, & non par la force de sa chûte en la versant ; autrement de l'huile

versée ainsi sur de l'eau, devroit de même la faire monter; ce qui est contraire à l'experience, au lieu que le cas de l'huile élevée par l'eau versée sur elle, y est conforme.

COROLLAIRE III.

Donc dans un vase rétréci par en haut, ou de côtez obliques à l'horison, qui de la Liqueur dont il est rempli, en retiennent une partie au niveau du reste ; ce reste de Liqueur plus élevée, est dans un effort continuel contre ces côtez obliques du vase, ou de son rétrécissement, pour élever à son niveau ce que ces côtez obliques en empêchent d'y monter : aussi l'experience fait-elle voir que si l'on fait un trou vertical à quelqu'un de ces côtez obliques, au-dessus duquel soit le niveau de la Liqueur, elle s'échappera aussi-tôt par ce trou en montant presque au niveau de la Liqueur qui y seroit entretenue, auquel on démontre que ce jet vertical atteindroit, si la résistance de l'air, & celle du frottement que la Liqueur souffre en passant par ce trou, ne s'y opposoient pas.

SCHOLIE.

I. L'experience fait aussi voir que telle est la nature generale des Liqueurs, que celle-ci, comme toute autre, s'échapperoit de même force par ce trou, quelqu'autre direction qu'il eût. D'où l'on voit en general que les Liqueurs pressées à volonté, font des efforts égaux en tous sens pour s'échapper des vases où elles se trouvent ainsi comprimées : c'est pour cela que l'eau d'un vase s'en échappe avec des vîtesses égales de tous côtez par des trous faits au-dessus du niveau de cette Liqueur à distances égales de ce niveau.

Je ne sçais personne qui ait donné la raison mécanique de cette experience, faute de connoître assez la nature des Liqueurs : faute de cela on ne voit que le fait, sans en voir la cause, ni comment des forces comprimantes, par exemple, verticales comme la pesanteur, produisent

des pressions horisontales égales aux verticales qu'elles causent au niveau de ces horisontales. Cependant l'experience atteste ce fait dans les Liqueurs comprimées dans des vases par leurs pesanteurs. Il faut donc conclure que ce fait ne vient pas de la pression seule de chacune de ces Liqueurs, mais de son concours avec quelqu'autre cause qui ne peut être (ce me semble) que la fluidité de cette Liqueur: autrement ces pressions ainsi égales en tous sens, se trouveroient dans des globules sans fluidité, ainsi comprimées dans un vase qui en seroit rempli; ce que l'experience & la Mecanique font voir n'être pas. Or comment la fluidité des Liqueurs contribue-t'elle avec leur pesanteur, secourue, ou non, de quelqu'autre cause comprimante, à produire des pressions ainsi égales en tous sens? C'est ce qu'on n'a point encore démontré, & ce que j'avoue ne pas voir non plus. On s'est contenté de dire que cette fluidité des Liqueurs consiste dans une égale facilité des parties de chacune à se mouvoir en tous sens, abstraction faite de leurs pesanteurs, ou de quelqu'autre force comprimante, sans dire la cause de cette égale facilité qu'une telle abstraction laisseroit voir de même dans des globules sans fluidité, les laissant voir indifferens à être en repos ou en mouvement, suivant des déterminations quelconques.

II. Il est vrai que les Cartesiens assignent la matiere subtile pour cause de la fluidité des Liqueurs, & consequemment pour cause de cette égale facilité des parties de chaque Liqueur à se mouvoir en tous sens, en ce que (disent-ils) la matiere subtile traversant chaque Liqueur en tous sens avec des forces égales, en agite aussi les parties en tous sens avec d'égales forces.



Je ne m'arrête point à demander la cause de ces mouvemens en tous sens de la matiere subtile, dont la fluidité qu'on lui suppose, seroit inutilement alleguée pour cause de tous ces mouvemens differens; puisqu'il s'agit ici de la cause elle-même de la fluidité qu'on fait consister en une égale facilité des parties de chaque Liqueur à se mouvoir

en tous sens ; ce qui permet à sa pesanteur de la mettre toûjours à niveau en poussant de tous côtez (lorsqu'elle n'y est pas) vers les plus basses ce que cette Liqueur a de parties plus élevées, qui par leur égale facilité à se mouvoir, ou plûtôt à être mûes en tous sens, obéïssent sans peine.

Je ne m'arrête point non plus à demander comment ces parties de chaque Liqueur, poussées (comme veulent ces Messieurs) chacune de tous côtez à la fois avec des forces égales par la matiere subtile, qui ne leur donneroit ainsi aucun mouvement, auroient plus de facilité chacune à se mouvoir en tous sens, que si cette matiere subtile étoit en repos entr'elles, ou qu'il n'y en eût point du tout entre-elles ; ni pourquoi ces particules de Liqueur auroient plus de cette facilité que des globules sans liquidité, qui leur seroient égaux en masses.

III. Je veux bien supposer avec ces Messieurs, que la matiere subtile donne effectivement aux particules de chaque Liqueur cette facilité à se mouvoir ou à être mûes avec des forces égales en tous sens, abstraction faite de leur pesanteur, & de toute autre force comprimante. Mais je demande comment sans cette abstraction, c'est-à-dire, lorsqu'on considere ces Liqueurs comme comprimées par leur pesanteur secourue, ou non, de quelqu'autre force étrangere, simple ou composée, à volonté : je demande, dis-je, comment il n'en résultera pas alors aux parties de chaque Liqueur, des pressions plus fortes suivant la direction commune de tout ce qu'il y a de forces qui les pressent, qu'en tout autre sens ; & par quelle raison mécanique on peut concevoir que toutes ces pressions seront égales en tous sens dans chaque couche de Liqueur perpendiculaire à cette direction commune. C'est cependant ici un fait que l'experience atteste de chaque couche horisontale d'eau comprimée par sa pesanteur dans un vase ou reservoir, d'où cette eau s'échappe avec des vîtesses égales par des trous faits au-dessous de son niveau à distances égales quelconques de ce niveau, ou par des

trous faits au fond de ce vase, s'il l'a horisontal, & a ses côtez à niveau de ce fond, fait de pressions égales en tous sens, qui doit arriver de même dans toute une couche quelconque de Liqueur quelconque perpendiculaire à la direction commune à sa pesanteur, & à tant d'autres forces comprimantes qu'on lui voudra supposer, lesquelles en compriment également toute la surface, & en consequence toutes les parties, comme fait la pesanteur.

IV. Quelqu'ignorée que soit la cause totale de ce fait, l'experience qu'on en a par rapport à l'eau comprimée par sa seule pesanteur dans un vase ou reservoir, où elle est tranquille & comme en repos, l'a fait prendre jusqu'ici pour un principe d'experience : c'est ainsi que nous le prendrons aussi dans la suite, ou en consequence nous supposerons à l'ordinaire que les pressions de l'eau comprimée par sa seule pesanteur, sont égales en tous sens à distances égales de son niveau ; & pour faire voir que ces pressions égales en tous sens ne sont pas l'effet de la seule pesanteur, voici celles qu'elle produiroit seule.

LEMME XIX.

FIG. 291. *Soit un cylindre ou prisme quelconque EAFDCVBT de base BVCT de figure quelconque, lequel soit coupé suivant sa longueur par un plan qui y fasse une section parallelogrammique ABCD. Soit ce même corps coupé en travers par deux autres plans HLGK, NSOZ, perpendiculaires à celui-là, avec lequel ils ayent des sections communes HG, NO, inclinées à volonté aux côtez paralleles AB, DC, de ce parallelogramme ABDC, en faisant les sections HLGK, NSOZ ; avec le cylindre ou prisme quelconque EAFDCVBT.*

Cela posé, je dis que les aires HLGK, NSOZ, de ces deux sections prismatiques transversales sont par tout entr'elles comme leurs sections communes HG, NO, avec le parallelogramme ABCD, c'est-à-dire, HLGK. NSOZ : : HG. NO.

DEMONSTRATION.

I. Soit aussi le cylindre ou prisme quelconque EAFDCVBT coupé par deux plans NRPQ, HLΠβ, paralleles à ceux des sections prismatiques proposées HLGK, NSOZ, chacun à chacun; & qui, en faisant avec ce corps les sections curvilignes NRPQ=HLGK, HLΠβ=NSOZ, paralleles & semblables chacune à son égale; & avec le parallelogramme ABCD. Les sections rectilignes NP=GH, HΠ=NO, paralleles aussi chacune à son égale, rendent égaux entr'eux les cylindres ou prismes partiaux KGLHNRPQN, LΠβHNSOZN.

II. Soit de plus NM perpendiculaire au côté AB du parallelogramme ABCD; & du point H de son côté opposé DC, les droites HX, HY, perpendiculaires en X, Y, sur les plans NSOZ, NRPQ, prolongez de ce côté là; & consequemment aussi perpendiculaires aux droites prolongées ON, PN. Ce qui rendant les triangles rectangles NMO, HXN, semblables entr'eux, & aussi NMP, HYN, donne HX. HN :: NM. NO. Et HN. HY :: NP. NM. Donc (en raison troublée) HX. HY :: NP. NO.

III. Or l'art. 1. vient de donner les cylindres ou prismes partiaux KGLHNRPQN=LΠβHNSOZN; & consequemment leurs valeurs NRPQ×HY=NSOZ×HX; d'où resultent les aires NRPQ. NSOZ :: HX. HY. Donc (*art.* 2.) NRPQ. NSOZ :: NP. NO. Mais l'art. 1. vient de donner aussi NRPQ=HLGK, & NP=HG. Donc enfin les aires HLGK. NSOZ :: HG. NO. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Puisque l'article 1. donne les aires NRPQ=HLGK, HLΠβ=NSOZ, & les lignes droites NP=GH, HΠ=NO, on voit que l'on aura aussi les aires HLGK. HLΠβ :: HG. HΠ. Et NRPQ. NSOZ :: NP. NO. Et aussi NRPQ. HLΠβ :: NP. HΠ. de sorte qu'en general, de quelque maniere qu'un prisme quelconque soit coupé transversa-

lement par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires à un qui le coupe suivant sa longueur en un parallelogramme quelconque ; les aires des sections transversales prismatiques causez au prisme, coupé par ces plans transversaux, seront toutes entr'elles comme les sections communes de ces plans avec celui de ce parallelogramme.

THEOREME XLI.

Fig. 192. *Soient deux tuyaux ou vases prismatiques AB, AD, l'un vertical AB, & l'autre AD arbitrairement incliné à l'horison, desquels les ouvertures en A, & les fonds ou bases BSCR, KODM, soient horisontales & de figures quelconques ; & les hauteurs AC, AE, terminées à ces fonds prolongez. Soient ces deux vases cylindriques ou prismatiques remplis jusqu'en A de Liqueurs de pesanteurs specifiques quelconques,* f, ϕ, *dirigées parallelement à la verticale AE, & en quantitez dont les masses prismatiques AB, AD, soient* m, μ ; *des poids desquelles résultent sur les fonds BSCR, KODM, des vases AB, AD, des pressions* p, λ, *longitudinales, c'est-à-dire, suivant les longueurs AC, AK, de vases ou tuyaux ; & de perpendiculaires* p, ϖ, *à ces mêmes fonds BSCR, KODM.*

Cela posé, l'on aura toûjours & par tout ici,

I. $p\mu\phi \times AE = \lambda m f \times AK$ (A) *pour les pressions longitudinales de ces fonds.*

II. $p\mu\phi \times \overline{AE}^2 = \varpi m f \times \overline{AK}^2$ (B) *pour les pressions perpendiculaires de ces mêmes fonds.*

DEMONSTRATION.

Fig. 193. Avant toutes choses, pour ne point se broüiller aux noms qui se trouvent dans ces deux formules A, B, ni à ce qui s'en trouvera d'autres dans ce que ces formules en produiront d'autres ; voici la liste de tous ces noms.

m, μ, masses des Liqueurs contenues dans les tuyaux AB, AD. Fig. 19

f, φ, les pesanteurs specifiques de ces Liqueurs.

e, ϵ, leurs densitez.

b, β, les fonds horisontaux BSCR, KODM, de ces vases prismatiques.

b, ν, leurs sections BSCR, KOQN, perpendiculaires à leurs longueurs AC, AK.

p, λ, pressions longitudinales des Liqueurs sur les fonds BSCR, KODM.

p, ϖ, leurs pressions perpendiculaires.

PART. I. Cela posé, puisque (*Hyp.*) m, μ, sont les masses des Liqueurs dont les tuyaux AB, AD, sont supposez remplis jusqu'en A; & que f, φ, sont les pesanteurs specifiques de ces Liqueurs: l'on aura mf, $\mu\varphi$, pour les poids absolus de ces prismes de Liqueurs. Soit presentement δ la pesanteur relative resultante suivant AK de la pesanteur specifique absolue φ de la Liqueur contenue dans toute cette longueur AK du tuyau AD: l'on aura de même $\mu\delta$ pour le poids relatif suivant AK de cette colonne prismatique AD de Liqueur. Or il est visible que les pressions longitudinales p, λ, que les poids mf, $\mu\delta$, dirigez par leurs pesanteurs f, δ, suivant AC, AK, font suivant ces directions sur les fonds horisontaux BSCR, KODM, sont en raison de ces poids. Donc $p.\lambda::mf.\mu\delta$. D'où resulte $p\mu\delta = \lambda mf$. Mais la pesanteur δ suivant AK, étant ici dérivée de l'absolue φ suivant la verticale AE rencontrée en E par l'horisontale KE; on aura ici AK. AE $::\varphi.\ \delta = \varphi \times \frac{AE}{AK}$. Donc $p\mu\varphi \times \frac{AE}{AK} = \lambda mf$, d'où resulte la formule $p\mu\varphi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A) *qu'il falloit* 1°. *démontrer*.



Autrement. Soit du tuyau AD continué une partie AH de base encore horisontale GH, & remplie dans toute sa longueur AG d'une portion de la même Liqueur de ce tuyau AD supposée de pesanteur specifique φ; de laquelle-

la portion ou colonne AH de Liqueur, la masse soit x; & consequemment dont le poids absolu soit $x\phi$, lequel soit capable de faire équilibre sur le plan incliné AG avec le poids absolu mf de la colonne AB de l'autre Liqueur dirigée suivant la verticale AC parallele aux directions de ces deux poids absolus $x\phi$, mf.

Cela posé, il est démontré dans la Section 6. que pour cet équilibre (soient les horisontales GF, KE, qui rencontrent en F, E, la verticale AC prolongée) il faudroit ici $x\phi . mf :: AG . AF :: AK . AE$. Et consequemment $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or ce cas d'équilibre entre les poids absolus $x\phi$, mf, des prismes AH, AB, de Liqueurs sur les plans AG, AC, étant un cas où ces poids auroient des forces égales suivant ces plans, & où consequemment ils presseroient également les bases horisontales GH, BSCR, suivant ces longueurs AG, AC; la pression longitudinale de la premiere GH de ces deux bases seroit ici égale à la longitudinale p de la seconde BSCR. Donc pour rendre ici égale à p la pression longitudinale de la base GH suivant AG ou AK, il y faudroit $x\phi \times AE = mf \times AK$. Or il est visible que les pressions longitudinales p, λ, des bases horisontales GH, KODM, causées suivant la même direction AR par les colonnes prismatiques AH, AD, de même Liqueur, sont entr'elles en raison des longueurs AG, AK, de ces prismes: c'est-à-dire, $p . \lambda :: AG . AK = \frac{\lambda}{p} \times AG$. Donc $x\phi \times AE = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$. Mais les masses x, μ, des mêmes colonnes AH, AD, de même Liqueur, sont entr'elles comme leurs longueurs AG, AK; c'est-à-dire, $x . \mu :: AG . AK$. D'où resulte $x = \mu \times \frac{AG}{AK}$. Donc $\mu\phi \times \frac{AE \times AG}{AK} = \frac{\lambda mf}{p} \times AG$; d'où resulte $p\mu\phi \times AE = \lambda mf \times AK$ (A).



Ce qu'il falloit encore démontrer.

PART. II. Si de l'extrêmité L de KL prise à volonté sur AK prolongée de ce côté-là, on mene LP perpendiculaire en P sur la verticale KP; si de plus on prend ϖ pour la pression ou force dont la colonne de Liqueur AD presse le fond horisontal KODM suivant cette verticale KP, c'est-à-dire, perpendiculairement à ce fonds, en consequence de la pression ou force λ dont ce fond KODM est pressé par la même AD suivant sa longueur AK : cette pression verticale ϖ suivant KP resultant ainsi de celle λ suivant AK ou KL, on aura ici $\lambda . \varpi :: KL . KP :: AK . AE$.

Et consequemment $\lambda = \varpi \times \frac{AK}{AE}$. Donc en substituant cette valeur de λ en sa place dans l'équation $p\mu\varphi \times AE = \lambda mf \times \overline{AK}^2$ (A) de la part. 1. l'on aura ici $p\mu\varphi \times AE = \varpi mf \times \frac{\overline{AK}^2}{AE}$, ou $p\mu\phi \times \overline{AE}^2 = \varpi mf \times \overline{AK}^2$ (B). *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Pour faire entrer presentement dans cette formule B, & dans celle A de la part. 1. Les fonds horisontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, lesquels fonds sont les bases horisontales des colonnes de Liqueurs que ces vases contiennent jusqu'en A : soient ces bases BSCR, KODM, appellées b, β; les hauteurs de ces colonnes prismatiques étant AC, AE, l'on aura $b \times AC$, $\beta \times AE$, pour leurs volumes; & si l'on prend e, ε, pour les densitez de ces Liqueurs, les prismes AB, AD, qu'on en suppose dans les vases ou tuyaux de ces noms, auront leurs masses $m = be \times AC$, $\mu = \beta\varepsilon \times AE$. Donc en substituant ces valeurs de m, μ, en leurs places dans les précedentes équations A, B, des part. 1. 2. elles les changeront en d'aussi generales.

1°. $p\beta\varepsilon\phi \times \overline{AE}^2 = \lambda bef \times AC \times AK$ (C) pour les pressions lon-

gitudinales p, λ, des fonds horisontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD.

2°. $p\beta\varepsilon\phi\times\overline{AE}^{3}=\varpi bef\times AC\times\overline{AK}^{2}$ (D) pour les pressions perpendiculaires p, ϖ, des mêmes fonds.

COROLLAIRE II.

Si de plus on suppose le tuyau ou vase prismatique AD coupé en KOQN perpendiculairement à sa longueur AK, l'on aura KODM×AE=KOQN×AK, c'est-à-dire (suivant les noms β, ν, des bases KODM, KOQN) $\beta\times AE=\nu\times AK$, d'où resulte $AK=\frac{\beta\times AE}{\nu}$. Cela se trouve aussi par le moyen du Corol. du Lemme . lequel donne les aires KODM (β). KOQN (ν) : : KD. KQ (à cause des triangles rectangles semblables KQD, AEK) : : AK. AE. D'ou résulte aussi $\beta\times AE=\nu\times AK$, & en consequence encore $AK=\frac{\beta}{\nu}\times AE$. Donc en substituant cette valeur de AK en sa place dans les équations C, D, du précedent Cor. 1. elles se changeront encore en d'aussi generales.

1°. $p\nu\varepsilon\phi\times AE=\lambda bef\times AC$ (E) pour les pressions longitudinales p, λ, des fonds horisontaux BSCR, KODM.

2°. $p\nu\varepsilon\phi\times\overline{AE}^{2}=\varpi bef\times AC\times AK$ (F) pour les pressions perpendiculaires ou verticales p, ϖ, des mêmes fonds.

COROLLAIRE III.



FIG. 294. Supposons presentement que les tuyaux ou vases prismatiques AB, AD soient de hauteurs égales AC, AE, comme dans la Fig. 294. que les grosseurs ou bases perpendiculaires BSCR, KOQN, de figures quelconques en soient aussi égales entr'elles, & qu'ils soient remplis d'une même Liqueur quelconque depuis l'horisontale CK jusqu'en A : la premiere de ces trois hypotheses rendant $b=\nu$ suivant la liste précedente des noms employez ici ; la se-

conde rendant AC=AE, & la troisiéme rendant $e=\epsilon$, $f=\phi$, suivant la même liste:

1°. L'équation E du nomb. 1. du précedent Corol. 2. se changera pour ce cas-ci en $p=\lambda$. Ce qui fait voir que les pressions longitudinales p, λ, des fonds horisontaux BSCR, KODM, causées à ces fonds par les poids des prismes AB, AD, de hauteurs égales, de grosseurs égales, & de même Liqueur quelconque, suivant les longueurs AC, AK, de ces prismes, seront toûjours ici égales entre-elles, quoique ces poids soient inégaux entr'eux, y étant en raison de ces longueurs AC, AK.

2°. L'équation F du nomb. 2. du même Corol. 2. se changera pareillement pour ce cas-ci en $p\times AE=\varpi\times AK$. Ce qui donnant $p.\ \varpi::$ AK. AE. fait voir que les pressions verticales ou perpendiculaires p, ϖ, des fonds horisontaux BSCR, KODM, des tuyaux ou vases prismatiques AB, AD, seroient ici comme la longueur AK de l'incliné AD y seroit à sa hauteur AE: de sorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AC=AE, ces pressions verticales p, ϖ, des fonds horisontaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, seroient ici en raison reciproque des longueurs AK, AC, de ces deux vases.

COROLLAIRE IV.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent Corol. 3. excepté que les bases ou fonds horisontaux BSCR (b), KODM (β), des vases prismatiques AB, AD, soient ici égaux, quelles que soient les grosseurs de ces prismes. Outre AC=AE, $e=\epsilon$, $f=\phi$, comme dans le précedent Corollaire 3. l'on aura ici $b=\beta$; & en consequence,



1°. L'équation C du nomb. 1. du Corol. 1. se changera ici en $p\times AC=\lambda\times AK$, d'où resulte $p.\ \lambda::$ AK. AC. Ce qui fait voir qu'en ce cas-ci les pressions longitudinales p, λ, des fonds horisontaux égaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, se-

roient entr'elles en raison reciproque des longueurs AC, AK, de ces prismes.

2°. L'équation D du nomb. 2. du même Corol. 1. se changera de même ici en $p\times\overline{AC}^2 = \varpi\times\overline{AK}^2$, d'où resulte $p.\ \varpi :: \overline{AK}^2.\ \overline{AC}^2$. Ce qui fait aussi voir qu'en ce cas-ci les pressions verticales ou perpendiculaires p, ϖ, des fonds horisontaux égaux BSCR, KODM, des vases prismatiques AB, AD, de hauteurs égales AC, AE, & toûjours remplis d'une même Liqueur quelconque, seroient pareillement ici en raison reciproque des quarrez des longueurs AC, AK, de ces deux prismes.

COROLLAIRE V.

Suivant les précedens nomb. 1. 2. du Corol. 4. dans lequel AK est toûjours plus grande que AC, si un vase prismatique vertical AB, & un prismatique AD arbitrairement incliné à l'horison ont des fonds horisontaux égaux, & qu'ils soient remplis jusqu'à des hauteurs égales d'une même Liqueur quelconque; la pression tant longitudinale que verticale du fond du vase vertical, sera toûjours plus grande que la pression tant longitudinale que verticale du fond égal du vase incliné.

SCHOLIE.

Jusqu'ici les fonds des vases prismatiques ont été supposez tous horisontaux: voici presentement pour de pareils vases de fonds arbitrairement inclinez à l'horison.

FIG. 295. I. Pour cela soit en general un vase cylindrique ou prismatique ACDF de position quelconque sur son fond AMFN de figure & de position aussi quelconque; lequel vase, d'ouverture horisontale CBDE, soit rempli de telle Liqueur qu'on voudra, jusqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra aussi. Soit O le centre de gravité de la quantité AGHF de ce que le vase contient de cette Liqueur; du point O soit OS perpendiculaire en S au fond AMFN rencontré en R par OR parallele à la longueur

Fig. 286.

Fig. 287

Fig. 288.

Fig. 289.

Fig. 290.

Fig. 291.

Fig. 292.

Fig. 293.

Fig. 294.

ou à un des côtez du vase prismatique ACDF que le plan ROS perpendiculaire au plan du fond AMFN, coupé en un quadrilatere de même nom ACDF, de deux côtez opposez CA, DF, paralleles entr'eux, d'un troisiéme côté CD qui est horisontal, & d'un quatriéme AF de position quelconque. De l'angle D de ce quadrilatere ACDF soit DF perpendiculaire en K sur le fond AMFN prolongé, & consequemment sur la droite AF aussi prolongée de ce côté-là; ce qui donnera le triangle rectangle DKF semblable au triangle OGR. Soient enfin les verticales OL, DZ, rencontrées en L, Z, par des plans perpendiculaires en R, F, aux paralleles OR, DF; ce qui rendra aussi les triangles rectangles ORL, DFZ, semblables entr'eux. Fig. 295. & suivantes jusqu'à 301.

II. Cela posé, puisque (*art.* 1.) les angles ORL, OSR, sont droits, & que la droite OL est verticale, le poids absolu de la quantité AGHF de Liqueur (dont O est supposé être le centre de gravité, & AL la direction) est à la force dont il presse suivant OR le fond AMFN : : OL. OR. Et cette force suivant OR est à ce qu'il en resulte de pression à ce fond AMFN suivant sa perpendiculaire OS : : OR. OS. Donc (en raison ordonnée) le poids absolu de tout ce que le vase prismatique ACDF contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire au fond AMFN : : OL. OS.

III. Or (*art.* 1.) les triangles ORL, DFZ, sont semblables entr'eux, & aussi entr'eux les triangles OSR, DKF; ce qui donne OL. OR : : DZ. DF. Et OR. OS : : DF. DK. d'où resulte (en raison ordonnée) OL. OS : : DZ. DK. Donc (*art.* 2.) le poids absolu de tout ce que le vase prismatique ACDF contient de Liqueur jusqu'au niveau quelconque GH, est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire au fond AMFN : : DZ. DK.

IV. Or en prenant T pour le sinus total, & *f* pour la caracteristique des autres sinus, ayant (*art.* 1.) les angles DFZ, DKF, droits; la Trigonometrie donnera par tout ici DZ. DF : : T. *f*DZF. Et DF. DK : : T. *f*DFK. Donc

(en multipliant par ordre) DZ. DK : T×T. ſDZF×ſDFK. Donc (*art.* 3.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe priſmatique ACDF, eſt à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond AMFN de ce vaſe : : T×T. ſDZF×ſDFK : : T×T. ſDZF×ſDFA.

V. Si le quadrilatere ACDF eſt vertical, & qu'ainſi la verticale DZ ſoit dans le plan de ce quadrilatere dont le côté CD (*art.* 1.) horiſontal ſoit prolongé vers X, l'on aura l'angle ZDX droit en même plan que le droit DFZ; ce qui donnera pour lors les angles ZDF+FDX=ZDX =DFZ=ZDF+DZF, & conſequemment FDX=FDZ, ou ſFDX=ſFDZ. Donc (*art.* 4.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe priſmatique ACDF, eſt ici à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond AMFN de ce vaſe (l'un & l'autre étant d'inclinaiſon quelconque à l'horiſon) : : T×T. ſFDX ×ſDFA. c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus total T eſt au produit du ſinus de l'angle FDX d'inclinaiſon de ce vaſe priſmatique ACDF avec l'horiſon DX, multiplié par le ſinus de l'angle DFA d'inclinaiſon de ce vaſe ſur ſon fond AMFN.

VI. Toutes choſes demeurant les mêmes que dans le précedent art. 5. ſi le vaſe priſmatique ACDF eſt également incliné entre ſon fond AMFN & ſon ouverture horiſontale CEDB, c'eſt-à-dire, ſi les angles FDX, DFK, qu'il fait avec eux ſont égaux entr'eux, ſoit que le fond AMFN ſoit auſſi horiſontal, comme dans la Fig. 297. ou non comme dans la Fig. 299. Ce cas rendant les angles FDX, DFK, égaux entr'eux, l'on aura ici ſFDX× ſDFA=ſDFK×ſDFK=ſFDA×ſDFA. Donc (*art.* 5.) le poids abſolu de tout le priſme oblique AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe ACDF, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique incliné : : T×T. ſDFK×ſDFK : : T×T. ſDFA×ſDFA. c'eſt-à-dire, comme le quarré du ſinus total

total T eſt ici au quarré du ſinus de l'angle DFK d'inclinaiſon de ce vaſe à l'horiſon.

VII. Si ce vaſe priſmatique ACDF eſt droit ou perpendiculaire à ſon fond horiſontal AMFN, comme dans la Fig. 298. Ce cas rendant droit ſon angle DFA d'inclinaiſon ſur ce fond horiſontal AMFN, on aura ici ſDFA=T. Donc (*art.* 6.) le poids abſolu de tout le priſme droit AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe ACDF, eſt à ce qu'il en reſulte de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique droit :: T×T. T×T. c'eſt-à-dire, que ce poids abſolu eſt ici égal à ce qu'il cauſe de preſſion perpendiculaire au fond horiſontal AMFN de ce vaſe priſmatique droit ou perpendiculaire à l'horiſon.

VIII. Si le vaſe priſmatique ACDF eſt incliné de quelque maniere que ce ſoit à l'horiſon, & qu'il ait ſon fond AMFN perpendiculaire à ſa longueur CA ou DF, comme dans la Fig. 299. ce cas rendant encore ici droit l'angle DFA, l'on y aura encore ſDFA=T. Donc (*art.* 5.) le poids abſolu de toute la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe priſmatique incliné ACDF, perpendiculaire à ſon fond AMFN, eſt ce que tout ce poids cauſe de preſſion perpendiculaire à ce fond :: T×T. T×ſFDX :: T. ſFDX (ſoit CV perpendiculaire en V ſur FD) :: ſDVC. ſVDC :: DC. CV :: DC. AF (*Corol. du Lem.* 19.) :: CEDB. AMFN :: GH. AMFN. c'eſt-à-dire, comme la ſurface ſuperieure GH de la Liqueur eſt à l'inferieure ou au fond AMFN.

IX. Si le vaſe priſmatique ACDF eſt vertical, & qu'il ait ſon fond AMFN arbitrairement incliné à l'horiſon, comme dans la Fig. 300. ce cas rendant droit l'angle FDX, l'on aura ici ſFDX=T. Donc (*art.* 5.) le poids total & abſolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vaſe juſqu'au niveau GH, eſt à la preſſion ou force dont ce poids total preſſe perpendiculairement le fond incliné AMFN de ce vaſe vertical ACDF :: T×T. T×ſDFA :: T. ſDFA (à cauſe des paralleles CA, DA)

: : T. ∫CAF (soit FP perpendiculaire en P sur CA) : : ∫APF. ∫PAF : : AF. PF : : AF. CD (*Corol. du Lem.* 19.) : : AMFN. CEDB : : AMFN. GH. c'est-à-dire, comme le fond ou la surface inferieure AMFN de la Liqueur est à sa surface superieure GH.

X. Toutes choses demeurant les mêmes que dans le précedent art. 9. si le fond AMFN du vase prismatique vertical ACDF est incliné de 60 degrez à l'horison, ou (ce qui revient au même) si l'angle DFK ou CAF d'inclinaison de ce vase sur ce fond, est de 30 degrez, l'on aura ici AF = 2×PF = 2×CD; & consequemment (*Corol. du Lem.* 19.) ce fond ou son aire AMFN = 2×CEDB = 2×GH. Ainsi venant de trouver (*art.* 9.) que le poids total & absolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vase prismatique vertical ACDF, est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire sur son fond AMFN d'inclinaison quelconque avec lui : : AMFN. GH. l'on aura ici ce poids absolu à cette pression perpendiculaire : : 2×GH. GH : : 2. 1. c'est-à-dire, que ce poids absolu sera ici double de cette pression perpendiculaire du fond AMFN.

FIG. 299. XI. Toutes choses étant aussi les mêmes que dans l'art. 8. si le vase prismatique ACDF du fond AMFN perpendiculaire à sa longueur CA, DF, est incliné de 30 degrez à l'horison; & qu'ainsi l'angle VDC soit de 30 degrez, l'on aura ici CD = 2×CV = 2×AF; & consequemment (*Corol. du Lem.* 19.) l'aire CEDB ou sa parallele GH = 2×AMFN. Or suivant l'art. 8. de quelqu'angle que le vase prismatique ACDF de fond AMFN perpenpendiculaire à sa longueur CA, DF, soit incline à l'horison; le poids absolu de la quantité AGHF de Liqueur contenue dans ce vase, est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire à son fond AMFN : : GH. AMFN. Donc en ce cas-ci de ce vase prismatique ACDF incliné de 30 degrez sur l'horison, le poids absolu de tout ce qu'il contient de Liqueur jusqu'au niveau quelconque GH, est à ce qu'il en resulte de pression perpendiculaire

au fond AMFN de ce vase : : 2×AMFN. AMFN : : 2. 1. c'est-à-dire, comme dans le précedent art. 10. que ce poids absolu sera encore ici comme là double de cette pression perpendiculaire du fonds AMFN.

REMARQUE.

Ce qu'on voit dans le précedent Th. 41. dans ses Corollaires, & dans son Scholie, seroit ce qui arriveroit si l'on ne consideroit, comme l'on a fait jusqu'ici, que l'action seule de la pesanteur, & les colonnes de Liqueurs comprises dans les tuyaux ou vases prismatiques, que comme des corps solides soûtenus sur des plans inclinez par les fonds de ces vases ou tuyaux, suivant les longueurs desquelles ces corps ne pressent ou chargent ces fonds ou bases que de ce que leurs pesanteurs leur donnent de forces suivant ces longueurs de ces mêmes tuyaux. Mais si l'on considere (*Schol. de l'Ax. 9.*) que la fluidité de ces colonnes de Liqueurs donne aux particules de chacune une égale facilité à être également pressée en tous sens, de la force entiere de la pesanteur ou du poids de ce qu'il y en a d'autres qui les chargent; on verra dans la suite que ces colonnes cylindriques ou prismatiques de Liqueurs soûtenues sur les fonds de leurs tuyaux inclinez, ou non, y doivent toûjours presser ou charger chacune chacun de ces fonds, comme feroit le poids entier de cette colonne totalement soûtenu sur ce fond : en voici la preuve dans le suivant Th. 42. & dans les autres, où l'on considerera ainsi les Liqueurs comme pesantes & comme fluides tout à la fois, & dans des vases de figures quelconques.

THEOREME XLII.

Soit un tuyau cylindrique ou prismatique quelconque AKDX arbitrairement incliné suivant le plan vertical AKI sur son fond horisontal KBDC de figure quelconque, & rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra, dont on considere presentement la fluidité. Je Fig. 302.

dis que cette fluidité jointe à la pesanteur de ce que le tuyau incliné AKDX contient de cette Liqueur, lui fera presser de tout son poids absolu le fond horisontal KBDC de ce tuyau, c'est-à-dire, d'une force verticale précisément égale à celle dont ce fond seroit pressé par un prisme droit ou vertical KYZD de la même Liqueur qui auroit ce fond pour base horisontale, & dont la hauteur seroit égale à celle KY du niveau GH de ce que le tuyau incliné AKDX en contient au-dessus de ce fond horisontal KBDC.

DEMONSTRATION.

Soit AKI l'angle quelconque d'inclinaison du tuyau proposé AKDX sur ce fond horisontal KBDC ; & le parallelogramme de même nom AKDX, la section de ce tuyau coupé par le plan vertical AKI prolongé, lequel en rencontre la base ou le fond en la droite KD. Imaginons presentement la Liqueur contenue dans ce tuyau incliné AKDX, comme divisée en un nombre presqu'infini de filets verticaux OM, RT, separément mobiles, ainsi que la fluidité le permet ; desquels les premiers OM soient empêchez en autant de points M par le côté inferieur AK de ce tuyau, de descendre suivant leurs directions ; & dont les autres RT soient aussi empêchez en autant de points T par le côté superieur opposé XD de ce tuyau, de monter jusqu'en S au niveau GH de la Liqueur qu'il contient. De deux points opposez M, T, pris sur une même horisontale MT, soient imaginées MN, TV, perpendiculaires à ces côtez opposez paralleles AK, XD, du tuyau incliné AKDX ; lesquelles de longueurs arbitraires, soient les diagonales de deux parallelogrammes rectangles EF, PQ, de côtez verticaux ME, TQ, pris sur les filets MO, TR, & d'horisontaux MF, TP, pris sur l'horisontale MT.

Cela posé, il est manifeste que les résistances que les côtez opposez AK, XD, du tuyau incliné AKDX font en M, T, à la descente verticale de OM filet de Liqueur, & à l'ascension verticale de l'autre filet RT que les plus longs que lui tendent à faire monter en S jusqu'à leur niveau

GH prolongé vers Z : que ces résistances que ces côtez opposez AK, XD, font aux filets OM, RT, sont suivant MN, TV, égales à des forces qui les suppléeroient en repoussant seulement comme eux suivant ces directions les points M, T, de ces filets OM, RT, de Liqueur ; & qu'ainsi chacune de ces résistances se décompose comme en deux forces purement passives, suivant MF, ME, & TP, TQ, dont chacune des horisontales suivant MF, TP, soûtient par son invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire à cette résistance horisontale. Quant aux autres forces suivant les verticales ME, TQ, resultantes de ces résistances suivant MN, TV, des côtez opposez AK, DX, de ce tuyau incliné AKDX;

1°. Il est pareillement visible que la premiere suivant ME directement opposée au poids du filet OM ; le soûtient en M dans le repos que lui exige le supposé de ce qu'il y a de Liqueur dans le tuyau incliné AKDX, sans lui laisser aucune action sur le fond KBDC de ce tuyau ; lequel consequemment n'en est aucunement chargé. La même chose se démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux OM de ce qu'il y a de Liqueur dans l'espace GKY sur le côté inferieur AK du tuyau incliné AKDX, dont il exprime tout ce qu'il a de surface concave de ce côté là autour du cylindre droit KYZD. Donc cette quantité GKY de Liqueur comprise entre ce cylindre droit & cette portion de surface inferieure du tuyau incliné AKDX, se trouvant ainsi soûtenue toute entiere sur cette même portion oblique AK de surface ; rien de cette quantité GKY de Liqueur n'agit ou ne pese sur le fond KBCD de ce tuyau incliné AKDX.

2°. Mais en recompense ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'espace HLD compris entre le plan HL perpendiculaire à la droite KD, & ce que ce plan retranche du côté de HD de la surface superieure de ce tuyau incliné AKDX, presse ce fond horisontal KBDC d'une force égale à celle dont il seroit pressé par la portion cylindrique HLDZ, que ce même plan HL retranche du cylin-

dre droit KYZD de la même Liqueur ; car la force suivant TQ, resultante de la résistance que le côté superieur XD du tuyau incliné AKDX, fait suivant sa perpendiculaire TV, à l'ascension du filet vertical RT de Liqueur, se trouvant directement opposée à l'effort dont le poids du surplus de longueur des plus longs tend à le faire monter jusqu'au point S de leur niveau GH, & empêchant cet effet, est égale à cet effort suivant RT, auquel par la même raison le poids d'une portion ST de la même Liqueur seroit aussi égal. Donc la force de résistance avec laquelle le côté oblique XD du tuyau incliné AKDX, repousse le filet vertical TR suivant sa direction, est égale au poids d'une portion ST de cette Liqueur. Par consequent le poids de ce filet TR, ainsi repoussé suivant TQ, fait le même effort en ce sens sur le fond vertical KBDC du tuyau incliné AKDX, qu'y feroit ce même poids du filet TR augmenté du poids de ST, c'est-à-dire, le même effort qu'y feroit le poids d'un filet vertical entier SR de la même Liqueur. La même chose se démontrera de même de chacun de tous les autres filets verticaux TR de ce qu'il y a de Liqueur dans l'espace HLD, retenus ou empêchez de monter par le côté superieur XD du tuyau incliné AKDX, dont il exprime tout ce qu'il y a de surface retranchée de ce côté-là par le plan vertical HL perpendiculaire à la droite KD. Donc cette portion HLD de Liqueur comprise entre ce plan vertical HL & cette portion de surface qu'il retranche de celle du tuyau incliné AKDX, charge ou presse verticalement le fond horisontal KBDC d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé en ce sens par le poids de la portion cylindrique HLDZ, que le plan HL retranche du cylindre droit KYDZ de la même Liqueur.

Donc ce fond horisontal KBDC étant outre cela pressé verticalement par tout le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'espace AYHL commun à ce cylindre droit KYZD, & au tuyau incliné AKDX, & ne l'étant aucunement (*nomb.* 1.) par ce qu'il y en a dans l'espace GYK

compris de ce côté-là entre ce tuyau oblique & ce cylindre droit ; il ſuit de ce nomb. 2. que ce fond horiſontal KBDC eſt verticalement preſſé par tout ce que le tuyau incliné AKDZ contient de Liqueur juſqu'au niveau GH, d'une force préciſément égale à celle dont il feroit preſſé par un cylindre vertical de même Liqueur, implanté ſur ce fond horiſontal KBDC, qui en fût la baſe, & de même hauteur que celle KY de ce niveau GH au-deſſus de ce fond ; & conſequemment d'une force égale au poids du cylindre oblique KGHD de ce qu'il y a de Liqueur contenue dans le tuyau incliné AKDY ; puiſque le cylindre vertical AYZD preſſeroit ce fond horiſontal KBDC de tout ſon poids, qui eſt égal à celui de l'oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur que ce vertical AYZD, ces deux cylindres (*Hyp.*) de même baſe & de même hauteur, étant égaux entr'eux. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puiſque ſuivant cela les cylindres KGHD de Liqueurs quelconques contenues dans des tuyaux AKDX d'inclinaiſons quelconques AKI ſur leurs baſes ou fonds horiſontaux quelconques ABDC, preſſent chacun de tout ſon poids abſolu le fond du ſien ; il ſuit que les preſſions ou forces avec leſquelles ces cylindres de Liqueurs quelconques preſſeront verticalement les fonds horiſontaux de leurs tuyaux inclinez à volonté ſur ces fonds, feront entr'elles comme les poids abſolus de ces cylindres de Liqueurs, c'eſt-à-dire, de ce qu'en contiennent leurs tuyaux.

COROLLAIRE II.

Donc lorſque ces tuyaux inclinez à volonté ont des baſes ou fonds horiſontaux égaux quelconques, & ſont remplis tous d'une même Liqueur quelconque juſqu'à des hauteurs égales quelconques au-deſſus de ces fonds ; les cylindres de ce qu'ils contiendront tous de cette mê-

me Liqueur, ſe trouvant tous alors de poids égaux, les preſſions verticales qui en reſulteront aux fonds horiſontaux de leurs tuyaux, ſeront auſſi pour lors toutes égales entr'elles, & chacune égale à chacun de ces poids égaux.

SCHOLIE.

I. Le preſent Th. 42. peut être encore démontré autrement que ci-deſſus, en imaginant un tuyau vertical λGZD de fond horiſontal λD, & rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau GZ. Dans ce tuyau vertical imaginons qu'il s'en forme un autre incliné KGHD de baſe ou fond KBDC (que j'appellerai ſimplement KD, pour l'uniformité des expreſſions) portion de l'horiſontale λD, lequel ſans aucun mouvement de la Liqueur du premier en intercepte une quantité qui le rempliſſe juſqu'au même niveau GH, & qui ne laiſſe de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions KGL, HDZ en expriment entre ces deux tuyaux λGZD, KGHD, deſquelles les portions de ſurface de l'incliné KGHD exprimées par ſes côtez obliques GK, HD, rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur. Cela imaginé ou ſuppoſé,

1°. Il eſt viſible que le côté ſolide & ferme GK du tuyau incliné KGHD traverſant en M le filet vertical O*m* de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λGZD, en ſoûtient dans l'oblique KGHD la partie OM comme ſon autre partie M*m* la ſoûtenoit dans le vertical λGZD, ſans lui laiſſer ici non plus que là aucune action contre le fond KD; & ainſi de tous les autres filets OM de Liqueur, appuyez de même en autant de points M ſur la portion de ſurface du tuyau incliné KGMD exprimée par ſon côté inferieur GK. Par conſequent ce qu'il y a de cette Liqueur ainſi ſoûtenue ſur GK dans la portion GKY de l'eſpace cylindrique vertical λGYK, comme elle l'étoit avant la ſuppoſition du tuyau incliné KGHD, dans le vertical λGZD ſur ce qu'il y a de la même Liqueur dans le reſte KGλ de ce cylindre λGYK, ne preſſera non plus

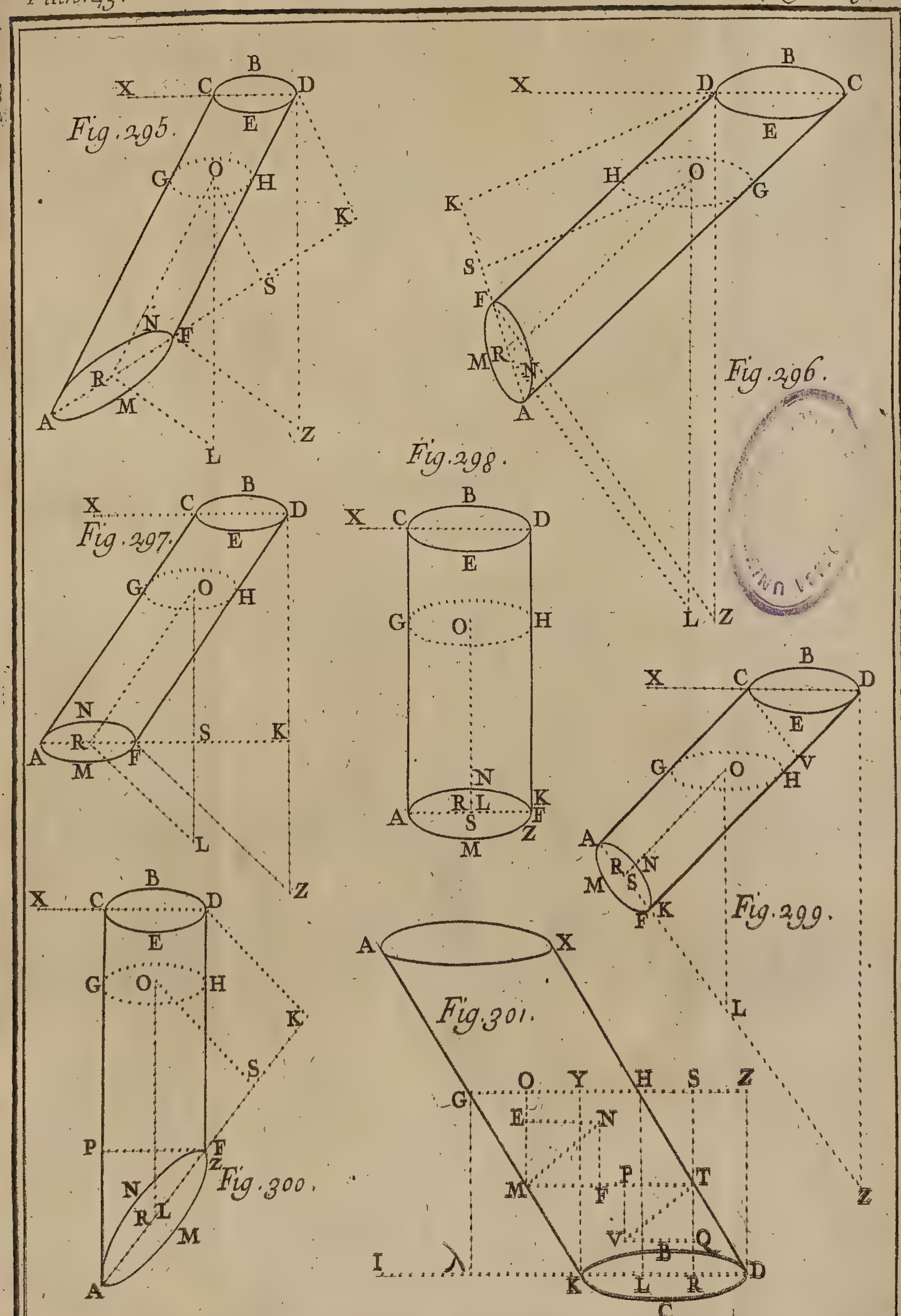
ce

ce fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que ce cylindre de Liqueur λGYK le pressoit libre dans le tuyau vertical λGZD, dont il ne pressoit le fond λD qu'en λK.

2°. Un pareil raisonnement fera voir que le côté solide & ferme HD du tuyau incliné KGHD, traversant en T le filet vertical SR de la Liqueur contenue dans le tuyau vertical λGZD, en retient la partie TR en même sujettion & en même action ou pression contre le fond KD dans le tuyau incliné KGHD, que celle que sa partie retranchée ST par le côté HD de ce tuyau incliné, lui causoit contre le fond λD dans le tuyau vertical λGZD avant l'intervention de ce côté HD de l'incliné; puisque cette intervention survenue ici par une formation subite de ce tuyau incliné KGHD, comme s'il n'étoit fait que d'une surface cylindrique de la Liqueur glacée là, & fluide dans tout le reste, s'est ici faite sans aucun mouvement, & qu'il faudroit qu'il y en eût eu quelqu'un pour que la pression que le filet SR libre avant cette intervention dans le tuyau vertical λGZD, causoit en R à son fond λD, eût varié par cette intervention dans le tuyau incliné KGHD, dont le fond KD, où se trouve ce point R, n'est (*Hyp.*) qu'une portion de celui-là. Donc cette partie TR du filet vertical SR de Liqueur, ainsi retenue par le côté HD du tuyau incliné KGHD en même action ou pression contre le fond KD, qui l'y retenoit libre dans le tuyau vertical λGZD le poids de sa partie retranchée ST alors joint à celui de cette autre TR, pressera ce fond KD en R d'une force verticale égale à celle dont y étoit pressé le fond λD par le poids entier du filet total SR, lorsque ce filet étoit libre dans le tuyau vertical λGZD; & ainsi de tous les autres filets verticaux TR de la même Liqueur, retenus de même en pression contre le fond KD par la portion de surface du tuyau incliné KGHD, exprimée par son côté superieur HD. Par consequent ce qu'il y a de cette Liqueur dans la portion DHL de l'espace cylindrique vertical LHZD, qu'on voit ainsi être autant pressée par HD contre le fond KD, qu'elle l'étoit

contre cette partie du fond KL avant la ſuppoſition du tuyau incliné KGHD dans le vertical λGZD, par le reſte HDZ de ce cylindre LHZD de la même Liqueur, preſſera ce fond KD du tuyau incliné KGHD d'une force égale à celle dont cette portion KD du fond horiſontal λD du tuyau vertical λGZD, étoit preſſée par la portion cylindrique LHZD de ce que ce tuyau vertical contenoit de cette Liqueur.

II. Supprimons preſentement ce tuyau vertical λGDZ, en ſorte qu'il ne reſte plus ici que l'incliné KGHD ou AKDX rempli de la même Liqueur quelconque juſqu'au niveau GH. Le nomb. 1. faiſant voir que le fond horiſontal KD de ce tuyau incliné n'eſt aucunement preſſé par ce qu'il contient de cette Liqueur dans l'eſpace GKY; & le nomb. 2. faiſant voir au contraire que ce fond KD eſt preciſement autant preſſé par ce qu'il y a de cette Liqueur dans la partie LHD de ce tuyau AKDX, qu'il le ſeroit par le poids entier d'un cylindre vertical LHZD de la même Liqueur : ſi à cette preſſion verticale l'on ajoûte celle que cauſe ſur ce fond KD le poids qu'il y a de cette Liqueur dans le reſte LHYK du cylindre vertical KYZD; on verra encore ici que ce qu'il y en a dans le tuyau incliné AKDX juſqu'au niveau quelconque GH, en preſſe le fond horiſontal KD d'une force verticale preciſement égale à celle dont il ſeroit preſſé en ce ſens par le poids entier d'un cylindre vertical KYZD de la même Liqueur, qui auroit ce fond KD pour baſe horiſontale, & pour hauteur celle KY du niveau GH de cette Liqueur dans ce tuyau incliné AKDX : de ſorte que le cylindre oblique KGHD (*Hyp.*) de même Liqueur, de même baſe, de même hauteur, & conſequemment de même poids que ce vertical KYZD preſſe auſſi de tout ſon poids le même fond horiſontal KD du tuyau incliné AKDX dans lequel il ſe trouve. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*


Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 297.
Fig. 298.
Fig. 299.
Fig. 300.
Fig. 301.

THEOREME XLIII.

Soit un vaſe ABCDEF plus large en haut où il ſoit ouvert, qu'en bas où il ſoit rétreci en BCDE, & terminé par un fond horiſontal moindre à volonté que ſon ouverture AF. Soit ce vaſe rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau ou plan horiſontal GH. Je dis que de toute la Liqueur dont on ſuppoſe le vaſe rempli juſqu'à ce niveau GH, la colonne verticale CYZD, qui aura le fond horiſontal CD pour baſe, ſera la ſeule qui peſe ou faſſe effort ſur ce fond, & qu'elle le preſſera de tout ſon poids.

DEMONSTRATION.

Imaginons encore ici la Liqueur du vaſe ABCDEF comme diviſée en pluſieurs filets verticaux RK, YC, CD, &c. à niveau en GH, dont ces égaux-ci YC, CD, aillent juſqu'au fond CD du vaſe, avec ceux qui ſont entr'eux, & dont les autres RK, plus courts que ceux-là, rencontrent les côtez obliques BC, DE, &c. de ce vaſe. Au point K, où chacun de ces filets RK rencontrent un de ces côtez obliques, par exemple, BC, ſoit BL perpendiculaire à ce côté BC; laquelle de longueur quelconque ſoit la diagonale d'un parallelogramme rectangle MN, dont un côté KN ſoit ſur le filet vertical RK, & l'autre KM horiſontal. FIG. 301.

Cela conçû, il eſt viſible (comme dans la démonſtr. du Th. 42.) que la reſiſtance que le côté BC fait en K à la deſcente de ce filet RK de Liqueur, en ſuivant KL, eſt égale à une force qui la ſuppléeroit en repouſſant comme lui ſuivant KL le bout K de ce filet; & qu'ainſi cette reſiſtance que le côté BC lui fait ſuivant KL, ſe décompoſe comme en deux forces purement paſſives ſuivant KM, KN, dont la premiere ſuivant KM ſoûtient par ſon invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire ſuivant MK, reſultante de ce que la fluidité permet (*art. 3. du Schol. de l'Ax. 9.*) aux filets collateraux d'en FIG. 303.

avoir en tous ſens ; & dont la ſeconde ſuivant KN de bas en haut, ſoûtient (comme dans le nomb. 2. du Th. 42.) l'effort directement contraire de haut en bas, dont la peſanteur du filet vertical RK tend à le faire deſcendre ſuivant cette direction : de ſorte que cet effort de peſanteur, qui eſt tout ce que ce filet RK en a pour deſcendre, étant ainſi ſoûtenu, ce filet doit être ici retenu en K ſur BC, comme ſur un plan incliné, ainſi qu'y demeureroit un poids égal au ſien, repouſſé comme lui ſuivant MK.

Cela ſe démontrera de même de tous les autres filets verticaux RK rencontrez en K par les côtez obliques du vaſe. Donc de toute la Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans ce vaſe ABCDEF retreci par en bas, il n'y a que le ſeul cylindre vertical YCDZ implanté ſur le fond horiſontal CD, qui le preſſe ; & comme il eſt vertical ſans être appuyé ſur ou contre aucun des côtez du vaſe, c'eſt de tout ſon poids qu'il preſſe ce fond CD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

A l'imitation du Scholie du Th. 42. imaginons pour un moment que la colonne cylindrique verticale YCDZ de Liqueur, qui a pour baſe le fond horiſontal CD du vaſe ABCDEF plus étroit là qu'ailleurs, eſt dans un tuyau cylindrique de cette baſe horiſontale CD, entouré de tout ce qu'il y a de Liqueur autour de ce cylindre vertical YCDZ dans ce vaſe qu'on en ſuppoſe rempli juſqu'au niveau GH. Il eſt manifeſte que les côtez fermes & ſolides YC, ZD, de ce tuyau vertical YCDZ ſoûtiendront entr'eux & les côtez du vaſe ABCDEF tout ce qu'il aura de Liqueur autour de ce même tuyau vertical, & qu'ils empêcheront cette Liqueur exterieure par rapport à lui, d'entrer dans la colonne YCDZ de ce qu'il en contient, en reſiſtant ſuivant leurs perpendiculaires, c'eſt-à-dire, horiſontalement à tout ce que cette Liqueur exterieure pourroit faire d'effort pour cela, & pour preſſer en

consequence le fond horisontal CD du vase ABCDEF, lequel dans la presente hypothese est le fond du tuyau YCDZ supposé dans ce vase.

Or si l'on imagine toute la Liqueur dont ce vase & ce tuyau sont remplis jusqu'au niveau GH, comme divisées en plusieurs couches horisontales, telles que KT; on verra, en concevant ce tuyau YCDZ n'y être plus, les particules M de la Liqueur de chacune de ces couches horisontales KT, appuyées contre les côtez du vase ABCDEF par la médiation de tout ce qu'il y en a dans cette couche jusqu'à ces côtez de ce vase, se faire mutuellement des resistances égales suivant le plan de cette couche; & consequemment on verra ce que le cylindre YCDZ a de ces particules dans cette même couche, empêcher ce qu'elle en a au dehors de lui, d'entrer dans ce cylindre en les repoussant du centre à la circonference, comme faisoient les côtez solides du tuyau retranché: outre que quand il y en entreroit quelqu'une, ce ne seroit qu'à la place d'une autre qui en sortiroit; ce qui revient au même.

La même chose, & pour la même raison, devant arriver depuis le fond CD jusqu'au niveau GH à toutes les autres couches horisontales de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF jusqu'à ce niveau GH; on voit que la colonne cylindrique verticale YCDZ de cette Liqueur y retient appuyé sur ou contre les côtez de ce vase, ce qu'il contient de cette Liqueur autour de cette colonne verticale, comme l'y retenoient les côtez fermes & solides du tuyau retranché, dans lequel cette colonne a été supposée d'abord. Donc de tout ce qu'il y a de Liqueur jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF, cette colonne verticale cylindrique YCDZ implantée sur le fond horisontal CD de ce vase plus étroit là qu'ailleurs non seulement est ici comme dans ce tuyau de même nom YCDZ, tout ce qui presse ce fond CD, mais encore le presse ici comme là de tout son poids absolu. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 304. Pour la verité de ce Th. 43. il n'eſt pas neceſſaire que le vaſe ABCDEF ſoit plus étroit en ſon fond horiſontal CD que par tout ailleurs, ni que les filets verticaux du cylindre vertical CYZD ſuppoſé de Liqueur la même quelconque, & de même hauteur que celle dont on ſuppoſe ce vaſe rempli juſqu'au niveau GH, ne rencontrent aucun des côtez de ce vaſe : il ſuffit que ce vaſe aille en s'élargiſſant depuis ſon fond horiſontal CD juſqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle que ſoit ſon ouverture ſuperieure AF. Car,

1°. Si quelques-uns, ou tous les filets verticaux de la Liqueur dont on ſuppoſe ce cylindre vertical CYZD, rencontrent quelque côté EF du vaſe comme les filets verticaux CG, RK, DL, font en G, K, L ; on démontrera, comme dans le nomb. 2. de la démonſtr. du Th. 42. que chacun de ces filets verticaux, par exemple, RK, qui rencontre en K ce côté EF, qui l'empêche de monter juſqu'en S au niveau GH prolongé vers Z, eſt repouſſé vers R ſuivant KR par la reſiſtance de ce côté EF, d'une force, qui jointe au poids de ce filet KR, preſſe préciſément autant le fond CD du vaſe, que le preſſeroit un filet libre SR de la même Liqueur. La même choſe ſe démontrera de tous les autres filets verticaux KR de la Liqueur du vaſe ABCDEF, compris entre les extrêmes GC, LD, ſur le fond horiſontal CD de ce vaſe : ſçavoir, que ſon côté EF, que ſes extrêmes rencontrent auſſi en G, L, comme tous ces filets KR en K, les empêchant tous de s'élever juſqu'en YZ au niveau GH de la Liqueur que ce vaſe contient, les repouſſe tous verticalement vers ce fond horiſontal CD avec des forces qui jointes à leurs peſanteurs, les fait preſſer tous enſemble ce fond auſſi fortement que le preſſeroit un cylindre vertical CYZD de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horiſontal CD pour baſe, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que ce vaſe ABCDEF contient de cette Liqueur.

2°. Quant aux autres filets de la même Liqueur, qui autour de la partie CGLD de ce cylindre CYZD, rencontrent en GH, LE, le même côté EF qui les empêche aussi de s'élever jusqu'à ce niveau GH; ce côté EF du vase ABCDEF les repousse de même tous verticalement en bas contre les côtez BC, DE, qui les soûtiennent comme dans les démonstrations du present Th. 43. sans leur laisser aucune action contre le fond horisontal CD, contre lequel, par la même raison la partie GM du côté BC n'en laisse de même à ce que le vase a de Liqueur de plus dans l'espace GHM terminé par la surface verticale HM.

Donc le fond horisontal CD, où ce vase ABCDEF est plus étroit que jusqu'à telle hauteur qu'on voudra au-dessus de ce fond, n'est ici pressé que par la colonne cylindrique verticale CGLD de la Liqueur contenue dans ce vase jusqu'au niveau GH; & que cette colonne verticale presse ce fond horisontal CD d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical CYZD de pareille Liqueur, lequel eût ce fond horisontal CM pour base, & pour hauteur celle CY du niveau GH de ce que le vase supposé ABCDEF contient de cette Liqueur: le tout conformement au present Th. 43.

COROLLAIRE II.

Suivant ce Corol. 1. & le present Th. 43. le fond horisontal CD d'un vase quelconque ABCDEF rétreci en ce fond, n'étant pressé par tout ce que ce vase contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, que comme il le seroit par un cylindre vertical CYZD de cette Liqueur, lequel le presseroit de tout son poids absolu; & (*Th.* 42. *Corol.* 2.) de même force verticale que celle dont le presseroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur dans un tuyau incliné CY à volonté, lequel auroit ce fond horisontal pour le sien; il suit de là que ce que le vase ABCDEF rétreci en ce fond horisontal CD, contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, Fig. 302. 303. 304.

ne presse ce fond CD que de la force dont ce même fond seroit pressé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur CY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horisontal CD pour le sien. D'où l'on voit que les pressions verticales ou perpendiculaires de ce fond horisontal CD par une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs dans un vase quelconque rétreci en ce fond, sont toûjours entre-elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond ; & consequemment en raison de ces seules hauteurs.

THEOREME XLIV.

Fig. 305. 306. 307. *Renversons le vase ABCDEF du précedent Th. 43. en sorte qu'il devienne plus large en bas, où il soit fermé par un fond horisontal AF, qu'en haut, où il soit rétreci en BCDE, & terminé par une ouverture CD moindre à volonté que la base ou fond AF. Soit ce vase rempli d'une Liqueur aussi quelconque jusqu'au niveau ou plan horisontal GH qui passe par son rétrecissement. Je dis presentement que la force dont ce fond AF sera pressé par le poids de la Liqueur dont on le suppose chargé jusqu'en GH, sera égale à celle dont il seroit pressé par le poids de tout ce qu'un vase cylindrique vertical AYZF de même base ou fond horisontal AF pourroit contenir de cette Liqueur jusqu'à ce niveau GH ou YZ.*

DEMONSTRATION.

Soit la Liqueur du vase ABCDEF conçûe comme divisée en plusieurs filets verticaux KR, PQ, dont ceux-ci PQ atteignent jusqu'au niveau GH de cette Liqueur, & dont les autres KR soient empêchez d'y arriver par les côtez obliques BC, DE, &c. du vase. Au point K où chaque filet KR rencontre un de ces côtez obliques, par exemple, BC, soit KL perpendiculaire à ce côté BC ; laquelle KL de longueur à volonté, soit la diagonale d'un parallelogramme rectangle MN dont le côté KN soit sur le filet vertical KR, & l'autre KM horisontal.

Cela

Cela conçû, il est visible (comme dans la démonstrat. du Th. 42.) que la résistance que le côté BC fait en K à l'ascension de ce filet RK, que ceux PQ du niveau GH tendent (*Ax.* 9. *Corol.* 2. 3.) à faire monter jusqu'au point S de ce niveau, est suivant KL, & égale à une force qui la suppléeroit, en repoussant comme ce côté BC suivant KL, le bout K de ce filet; & qu'ainsi cette résistance suivant KL se décompose comme en deux forces purement passives suivant KM, KN, dont la premiere suivant KM soûtient par son invincibilité ce que la Liqueur peut avoir d'action directement contraire suivant MK, & dont la seconde suivant KN de haut en bas, soûtient (comme dans le nomb. 2. de la démonstr. du Th. 42.) l'effort directement contraire de bas en haut suivant RK, dont le poids du surplus des filets PQ au-dessus de KR, tend à faire monter celui-ci jusqu'au point S de leur niveau GH; auquel effort suivant RK cette force de résistance du côté BC suivant KN, est consequemment égale. Mais le poids d'une portion SK de la même Liqueur seroit aussi égal à cet effort directement contraire suivant RK. Donc la force de résistance que le côté oblique BC du vase supposé, fait suivant KN ou KR à l'ascension de ce filet RK, en le repoussant suivant RK, est égal au poids d'une portion SK de cette Liqueur. Par consequent le poids de ce filet KR, ainsi repoussé par cette résistance verticale suivant KN, fait le même effort en ce sens sur le fond AF du vase ABCDEF, qu'y feroit ce même poids du filet KR augmenté du poids de SK, c'est-à-dire, le même effort qu'y feroit un filet vertical entier SR de la même Liqueur.

Ce qu'on voit du filet vertical KR de Liqueur, retenu au-dessous de la surface ou du niveau GH de cette Liqueur par le côté oblique BC du vase ABCDEF, se démontrera de même de tous les autres filets verticaux KR ainsi retenns au-dessous de ce niveau GH par le même côté BC, & par ce que ce vase en peut avoir d'autres obliques DE, &c. Donc ces filets verticaux KR trop

courts pour atteindre au niveau GH de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF, en presseront autant le fond AF, que s'ils atteignoient tous à ce Niveau. Par consequent tous les autres filets PQ y atteignant, le total de tous ces filets de Liqueur, c'est-à-dire, tout ce que ce vase ABCDEF contient de cette Liqueur jusqu'au niveau GH & au dessous en pressera le fond AF d'une force égale à celle dont il seroit pressé par tout ce qu'un vase cylindrique vertical AYZF de même base ou fond horisontal AF, pourroit contenir de cette Liqueur jusqu'à ce niveau GH ou YZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Encore à l'imitation du Schol. du Th. 42. comme dans la démonstration du Th. 41. supposons pour un moment que le vase cylindrique vertical AYZF de base ou fond horisontal AF, soit rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'au niveau YZ. Concevons que dans ce vase cylindrique sur son fond AF, il s'en forme un autre ABCDEF plus large en bas qu'en haut, lequel sans aucun mouvement de la Liqueur en intercepte une quantité qui le remplisse jusqu'au même niveau YZ, qui rencontre son rétrécissement en GH, & qui ne laisse de cette Liqueur au-dehors de lui que ce que les portions CBY, DEZ, en expriment entre ces deux vases, desquelles les portions de surface du rétréci, exprimées par ses côtez obliques CB, DE, rompent la communication avec ce qu'il contient de cette Liqueur.

Il est visible que le côté BC traversant en K le filet vertical SR de cette Liqueur, en retient dans ce vase rétréci ABCDEF la partie KR dans la même sujettion & dans la même action contre son fond AF que celle que la partie retranchée SK lui causoit contre ce fond dans le cylindre AYZF avant l'intervention de ce côté BC, puisqu'il retient dans le vase rétréci ABCDEF cette partie KR du filet SR aussi serrée contre ce fond AF que la retenoit

alors le poids de l'autre partie SK de ce filet SR, n'y ayant en ceci aucun mouvement, & y en fallant quelqu'un de cette partie KR vers S, pour diminuer la pression qu'elle causoit en R à ce fond AF, lorsquelle étoit chargée de SK libre dans le cylindre AYZF avant l'introduction ou la formation de ce rétréci ABCDEF. Donc cette partie KR du filet vertical SR, renfermée dans ce vase rétréci, en pressera le fond AF d'une force égale à celle dont il étoit pressé par le poids de ce filet entier SK, lorsque ce filet étoit libre dans le vase cylindrique AYZF.

Ce qu'on voit ici du filet vertical KR que le côté oblique BC du vase rétréci ABCDEF y retient au-dessous du niveau YZ ou GH des plus hauts PQ, qui tendent à l'y élever, se démontrera de même de tous les autres filets verticaux de la même Liqueur, que ce bord BC, & les autres obliques DE, &c. de ce vase rétréci par haut, empêchent d'être élevez jusqu'à ce niveau GH par ceux PQ, qui y atteignent: on démontrera, dis-je, de même que tous ces filets KR retenus plus bas que ce niveau YZ ou GH dans ce vase rétréci ABCDEF par les côtez obliques BC, DE, &c. en pressent tous le fond AF de même force que s'ils étoient tous à ce niveau YZ, augmentées de parties SK, que l'intervention de ces côtez obliques a retranchées des filets totaux SR, c'est-à-dire, de même force que celle dont ces filets SK libres dans le vase cylindrique AYZF avant cette intervention, en pressoient le même fond AF. Donc ce que le vase ABCDEF plus large en bas qu'en haut, contient de cette Liqueur quelconque jusqu'au niveau GH, en presse le fond AF d'une force égale a celle dont il seroit pressé par le poids de tout ce qu'un vase cylindrique vertical AYZF de même fond horisontal AF, contiendroit de la même Liqueur jusqu'au même niveau YZ. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

COROLLAIRE I.

Pour la verité de ce Th. 44. il n'est pas necessaire que FIG. 308.

vaſe ABCDEF ſoit plus large en ſon fond horiſontal AMFN que par tout ailleurs : il ſuffit que ce vaſe aille en ſe rétreciſſant depuis ce fond juſqu'à telle hauteur qu'on voudra, quelle qu'en ſoit l'ouverture ſuperieure CD.

Pour le voir, ſoit ce vaſe ABCDEF tel, par exemple, qu'on le voit ici, mais toûjours de baſe ou fond horiſontal AMFN, rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'à telle hauteur ou niveau GH qu'on voudra. Sur ſon fond horiſontal AMFN imaginons un cylindre vertical AYZF de la hauteur AY de la Liqueur dans ce vaſe ; & ce cylindre coupé par un plan vertical de même nom AYZF, lequel en rencontre la baſe horiſontale AMFN en la ſection AF, & auquel ſoit perpendiculaire un autre plan vertical, qui paſſant par E, le coupe en KL, que je prendrai pour ce ſecond plan, qui coupe auſſi en MN le fond AMFN du vaſe ABCDEF. Cela poſé,

1°. L'on verra, comme dans le nomb. 1. du Scholie du Th. 42. & comme dans les démonſtrations 1. 2. du Th. 43. que tout ce que ce vaſe ABCDEF contient de Liqueur entre lui & le cylindre vertical AYZF dans l'eſpace GBAY ſur ce que ſes côtez obliques AB, BC, expriment de ſa ſurface vers eux, eſt ſoûtenu ſur cette portion oblique de ſurface ABC ſans aucune action ſur ou contre le fond AMFN de ce vaſe ABCDEF. On verra de même que tout ce que ce vaſe contient de la même Liqueur dans l'eſpace oppoſé HEK ſur ce que ſon côté oblique DE exprime de la ſurface oppoſée, qui avec la portion KE du plan vertical KL, renferme cet eſpace HEK, eſt pareillement ſoûtenu ſur cette portion DE de ſurface oblique de ce vaſe ABCDEF, ſans aucune action non plus ſur ou contre ſon fond horiſontal AMFN.

2°. L'on verra auſſi, comme dans le nomb. 2. du Schol. du Th. 42. & comme dans les démonſtrations 1. 2. du preſent Th. 44. que ce que ce vaſe ABCDEF contient de la même Liqueur dans l'eſpace FEL entre l'autre portion EL du plan vertical KL, & de ce que le côté oblique EF de ce vaſe exprime de ſa ſurface juſqu'à cette partie

EL de ce plan vertical KL sur la portion MFN qu'il retranche de la base ou fond horisontal AMFN, charge ou presse ce fond de ce vase ABCDEF, d'une force verticale égale à celle dont ce même fond AMFN, seroit pressé en MFN par le poids entier d'un cylindre vertical LKZF de même Liqueur à même hauteur AY que celle du vase proposé; ayant pour base horisontale cette portion MFN du fonds AMFN de ce vase ABCDEF.

Donc ce fond horisontal étant outre cela pressé en MAN par le poids entier de l'autre portion cylindrique AYKL d'un cylindre vertical AYZF de même Liqueur que celle du vase ABCDEF de la hauteur AY qu'elle a dans ce vase, laquelle portion cylindrique AYKL de ce cylindre AYZF de Liqueur a pour base horisontale cette partie MAN du fond AMFN de ce vase ABCDEF; & ce fond horisontal AMFN n'étant (*nomb.* 1.) aucunement pressé parce que ce vase contient de Liqueur dans les espaces GBAY, HEK: il suit du nomb. 2. qu'il n'y a que ce que le vase ABCDEF contient de cette Liqueur dans l'espace KEFAY, qui en presse le fond AMFN; & que ce fond horisontal en est pressé verticalement par cette portion KEFAY de Liqueur, d'une force égale à celle dont il seroit pressé par le poids entier d'un cylindre vertical AYZF de pareille Liqueur de même base horisontale AMFN, & de même hauteur AY que la contenue dans le vase ABCDEF. Par consequent tout ce que ce vase contient de cette Liqueur quelconque jusqu'au niveau quelconque GH, presse encore ici verticalement son fond horisontal AMFN d'une force égale à celle dont ce fond seroit pressé par le poids d'un cylindre vertical AYZF à même hauteur AY que là dans un tuyau droit ou vertical qui auroit ce même fond horisontal AMFN pour le sien, conformément au present Th. 44.

COROLLAIRE II.

Suivant ce Corol. 1. & le present Th. 44. le fond horisontal AF (appellé AMFN dans ce Corol. 1. & que Fig. 305. 306. 307. 308.

j'appelle dans celui AF, pour l'accommoder aux Figures 305. 306. 307. du present Th. 44.) d'un vase quelconque ABCDEF élargi en ce fond, étant pressé par ce que ce vase contient de Liqueur quelconque jusqu'au niveau GH, comme il le seroit par un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel le presseroit de tout son poids absolu, & (*Th.* 42. *Corol.* 2.) de même force verticale dont le presseroit un cylindre d'obliquité quelconque de même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau incliné à volonté, lequel auroit ce fond horisontal AF pour le sien; il suit de là que ce que le vase ABCDEF élargi en ce fond horisontal AF, contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, presse ce fond AF de la force dont ce même fond seroit pressé par un cylindre quelconque de la même Liqueur à même hauteur AY dans un tuyau vertical ou incliné à volonté, lequel auroit ce fond horisontal AF pour le sien. D'où l'on voit que les pressions verticales ou perpendiculaires de ce fond horisontal AF pour une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs dans un vase quelconque élargi en ce fond, sont toûjours entr'elles comme les produits de ces hauteurs multipliées chacune par ce fond; & consequemment en raison de ces seules hauteurs.

COROLLAIRE III.

Ce Corol. 2. joint aux Corol. 2. des précedens Th. 42. 43. fait voir que si un vase de figure quelconque de largeurs par tout égales ou inégales à volonté, & d'un fond horisontal aussi quelconque, est rempli d'une même Liqueur quelconque à differentes hauteurs ou niveaux aussi quelconques; les differentes quantitez de même Liqueur dont ce vase sera successivement rempli jusqu'à ces differentes hauteurs, en presseront verticalement le fond horisontal avec des forces qui seront toûjours entr'elles en raison de ces hauteurs.

Cela suit encore de ce que suivant les Th. 42, 43. 44.

ces pressions ou forces verticales seront toûjours égales aux poids absolus de cylindres verticaux de la même Liqueur, qui auroient ces hauteurs pour les leurs, & toutes le fond du vase pour leurs bases horisontales.

COROLLAIRE IV.

Soient presentement deux vases V, U, differens à volonté, de fonds horisontaux quelconques b, β, & remplis de differentes Liqueurs quelconques L, Λ, jusqu'à des hauteurs quelconques h, k, au-dessus de ces fonds; desquelles Liqueurs L, Λ, les pesanteurs specifiques soient f, ϕ, & leurs densitez e, ε. Si l'on appelle P, Π, les poids absolus de deux cylindres faits chacun de chacune de ces Liqueurs, desquelles les hauteurs soient celles h, k, de ces mêmes Liqueurs dans les vases V, U, & qui ayent pour bases les fonds horisontaux b, β, de ces vases: le present Th. 44. joint aux précedens Th. 42. 43. faisant voir que les pressions ou forces dont les quantitez de ce que ces vases V, U, contiennent de ces Liqueurs L, Λ, pressent verticalement leurs fonds horisontaux b, , sont toûjours égales entr'elles aux poids absolus P, Π, de ces cylindres; si l'on appelle p, ϖ, ces pressions verticales des fonds b, β, l'on aura toûjours ici $p = P$, $\varpi = \Pi$. Or suivant les noms précedens, ces cylindres de poids P, Π, ayant (*Hyp.*) h, k, pour leurs hauteurs; b, β, pour leurs bases; & étant (*Hyp.*) faits de Liqueurs L, Λ, de pesanteurs specifiques f, ϕ, & de densitez e, ε, ont leurs poids absolus $P = bhef$, $\Pi = \beta k\varepsilon\phi$. Donc on aura toûjours ici $p = bhef$, $\varpi = \beta k\varepsilon\phi$; & consequemment $p . \varpi :: bhef . \beta k\varepsilon\phi$. ou $p\beta k\varepsilon\phi = \varpi bhef$ (A). Donc,

1°. Si la Liqueur est la même quelconque dans les vases quelconques V, U, cette identité d'espece des Liqueurs L, Λ, rendant leurs pesanteurs specifiques $f = \phi$, & leurs densitez $e = \varepsilon$, changera la précedente formule A en $p\beta k = \varpi bh$ (B) pour ce cas-ci; ce qui y donne $p . \varpi :: bh . \beta k$. D'où l'on voit que les pressions verticales p, ϖ, des fonds horisontaux b, β, de ces vases V, U, causées

par les poids de même Liqueur quelconque contenue dans ces vaſes à hauteurs quelconques *h*, *k*, ſeront toûjours ici entr'elles en raiſon des produits *bh*, *βk*, de ces fonds horiſontaux quelconques par ces hauteurs auſſi quelconques *h*, *k*, de ces vaſes V, U, de figures & de capacitez quelconques, contiennent de la même Liqueur auſſi quelconque.

2°. Si cette même Liqueur ſe trouve à hauteurs égales *h*, *k*, dans ces vaſes V, U, au-deſſus de leurs fonds horiſontaux *b*, *β*, les précedentes équations A, B, donneront également $p\beta = \varpi b$ (C) pour ce cas-ci : ce qui donnant $p . \varpi :: b . \beta$. fait voir que les preſſions verticales *p*, ϖ, des fonds horiſontaux *b*, *β*, de ces vaſes V, U, ſeront toûjours ici en raiſon de ces fonds quelconques.

3°. Si ces fonds horiſontaux *b*, *β*, de figures quelconques ſont égaux, à quelques hauteurs *h*, *k*, que leurs vaſes V, U, ſoient remplis d'une même Liqueur quelconque, les précedentes formules A, B, donnant auſſi également ici $pk = \varpi h$ (D), les preſſions verticales *p*, ϖ, de ces fonds horiſontaux égaux *b*, *β*, ſeront ici en raiſon des hauteurs *h*, *k*, au-deſſus de ces fonds dans les vaſes quelconques V, U : ce qui donne le précedent Corol. 3. en ſuppoſant ces vaſes être le même ſucceſſivement remplis de la même Liqueur juſqu'à ces hauteurs *h*, *k*.

4°. Enfin ſi les vaſes V, U, quelques differens qu'ils ſoient, ont leurs fonds horiſontaux égaux *b*, *β*, & qu'ils ſoient remplis d'une même Liqueur quelconque juſqu'à hauteurs égales *h*, *k*, au-deſſus de ces fonds les équations précedentes A, B, C, D, donneront également ici toutes $p = \varpi$; ce qui fait voir que les preſſions verticales *p*, ϖ, des fonds horiſontaux égaux de ces vaſes V, U, differens à volonté dans tout le reſte, ſeront toûjours ici égales entr'elles.

SCHOLIE

SCHOLIE

Commun aux Théoremes XLIII. XLIV.

I. Les deux derniers Th. 43. 44. se trouvent conformes à l'experience, en se servant d'un vase ABCDEF plus large dans la Fig. 309. & plus étroit dans la Fig. 310. en bas qu'en haut, duquel le fond AF puisse aisément monter & descendre le long de la partie cylindrique verticale VAFX de ce vase prolongé vers le bas, y demeurant cependant toûjours si justement appliqué, qu'il ne laisse rien échapper de la Liqueur qu'on suppose dans ce vase ABCDEF. Car si l'on arrête fixement ce vase en l'air, suspendu à un crochet, ou attaché par le côté à quelque mur ou poteau ferme MN; de maniere que son fond AF soit parallele à l'horison, & qu'on attache ensuite un fil vertical KL au centre de gravité K de ce fond, & à l'extrêmité L d'un (OL) des bras d'une balance LP appuyée en son milieu O, laquelle à l'extrêmité P de son autre bras OP porte un bassin Q chargé de petit plomb ou de sable, jusqu'à ce qu'il demeure en équilibre avec le fond AF chargé de la Liqueur dont on remplit ensuite le vase ABCDEF jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra, où la surface de cette Liqueur parallele à ce fond horisontal AF, soit moindre ou plus grande que lui: tout cela (dis-je) ainsi disposé, l'on verra cet équilibre n'arriver que lorsque le bassin Q & sa charge feront ensemble un poids égal à celui d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, de base AF, & de hauteur AY égale à la plus grande que la même Liqueur ait au-dessus de ce fond AF dans le vase ABCDEF. Hors ce cas on verra le fond AF de ce vase y monter vers BC, tant que le poids total fait de celui du bassin Q & de sa charge, sera plus grand que celui de ce cylindre AYZF de Liqueur, quoique moindre que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. On verra au contraire ce fond AF descendre vers VX, lorsque ce poids fait de ce-

lui du baſſin Q & de ſa charge, ſera moindre que celui de ce même cylindre AYZF de Liqueur, quoique plus grand que le poids de ce qu'il y a de cette Liqueur dans l'autre vaſe ABCDEF de la Fig. 309.

C'eſt ce que M. Paſchal a obſervé le premier, & ce qu'il a fait remarquer dans ſon Traité de l'Equilibre des Liqueurs ; mais ſans que lui, ni aucun autre que je ſçache, en ait donné la raiſon qu'on en voit dans les démonſtrations Th. 42. 43. dans le principe general de tout cet Ouvrage-ci.

II. Comme cette décompoſition de forces vient de la réſiſtance des côtez obliques CB, DE, dans la Figure 309. à l'aſcenſion, & dans la Fig. 310. à la deſcente des filets verticaux de Liqueur qui les rencontrent, dont les uns dans la Fig. 309. ſont ſollicitez à monter par le ſurplus des poids des plus longs, & dont les autres de la Fig. 310. tendent par leur propre poids auſſi bas que les plus longs ; & que ſuivant les démonſtrations des Th. 42. 43. c'eſt de-là que vient dans la Fig. 309. la nullité de preſſion du fond AF du vaſe ABCDEF par les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur que contient ce vaſe plus étroit en bas qu'en haut, leſquels ſeuls en preſſent ce fond ; & dans la Fig. 310. l'égalité de preſſion du fond AF de l'autre vaſe ABCDEF par tous les filets verticaux, tant courts que longs de la Liqueur que contient cet autre vaſe plus large en bas qu'en haut. De-là (dis-je) vient que,

Fig. 309. 1°. Suivant la démonſtration du Th. 42. les filets verticaux, tant courts que Longs de la Liqueur contenue dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en preſſent tous également le fond AF, & auſſi fortement tous enſemble que le preſſeroit un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour hauteur la plus grande AY de ce qu'en contient ce vaſe ABCDEF rétréci par en haut, quoique le poids de ce qu'il en contient ſoit moindre que celui de ce cylindre vertical AYZF

de la même Liqueur : cela, dis-je, venant de la résistance que les côtez obliques CB, DE, du vase ABCDEF rétréci par en haut, font à l'ascension des filets verticaux de la Liqueur que ce vase contient, moindres que les plus longs qui tendent à les faire monter jusqu'à leur niveau GH, tant que cette Liqueur est fluide ; & cette sollicitation à monter, & consequemment aussi les résistances qu'y feroient ces côtez obliques CB, DE, cessant dès que cette Liqueur est toute glacée, & ne fait plus qu'une masse solide, dont les plus longs filets verticaux attachez alors comme d'une piece avec les moindres, ne tendent plus à les faire monter, mais au contraire à les faire descendre, & à les entraîner en bas avec eux par leur pesanteur, quand même ces moindres filets n'en auroient d'eux-mêmes aucune : il suit manifestement qu'alors ce total de glace détaché du vase en le chauffant tout autour, ne doit plus presser son fond AF que d'une force égale au poids de ce que le vase en question contient de Liqueur ainsi glacée. C'est ce que M. Paschal a aussi observé par le moyen de la balance de l'art. 1. en s'en servant là comme ici.

2°. Suivant les démonstrations du Th. 43. les filets verticaux moindres que les plus longs de la Liqueur contenue dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, n'en pressent aucunement le fond AF, qui ne se trouve ainsi pressé que par ces plus longs filets égaux à AY, d'une force seulement égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical AYZF de la même Liqueur, lequel auroit ce fond horisontal AF pour base, & AY pour hauteur, quoique le poids de ce que le vase ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur, soit plus grand que celui du cylindre vertical AYZF : cela, dis-je, venant de la résistance que les côtez obliques AB, CD, du vase ABCDEF rétréci par en bas, font à la descente des moindres filets verticaux de Liqueur appuyez sur eux, sans en faire aux plus longs appuyez sur le fond AF, tant que la Liqueur composée de FIG. 310.

tous ces filets eſt fluide, & que ces filets peuvent agir par leur peſanteur indépendamment les uns des autres; dès que cette Liqueur ſera toute glacée, les plus longs de ces filets attachez alors comme d'une piece avec les moindres ſoûtenus ſur les côtez obliques AB, CD, du vaſe ABCDEF rétréci par en bas, ces plus longs filets de Liqueur glacée ſe trouveront auſſi pour lors ſoûtenus par la médiation des moindres ſur les côtez obliques AB, CD, de ce vaſe, ſans s'appuyer ſur ſon fond AF, qui alors ſeroit inutile pour les retenir avec les autres dans ce vaſe; de ſorte que quand le total de ce qu'il contient de Liqueur ainſi glacée, en ſeroit détachée en la chauffant tout autour, ce total de glace ainſi appué ſur les côtez AB, CD, du rétréciſſement de ce vaſe, ne peſeroit plus du tout ſur le bras OL de la balance OP, ni conſequemment contre ſon baſſin Q.

Fig. 309. 310. III. Au reſte quoique, ſuivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue jusqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en bas qu'en haut, en preſſe le fond horiſontal AF d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par le poids d'un cylindre vertical AYZF de cette Liqueur, lequel eût ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour hauteur la plus grande AY qu'ait la même Liqueur dans ce vaſe ABCDEF de la Fig. 309. plus large en-bas qu'en haut; & que ſuivant le Th. 43. la Liqueur déglacée & fluide contenue auſſi juſqu'au niveau GH dans le vaſe de même nom de la Fig. 310. plus étroit au contraire en bas qu'en haut, n'en preſſe le fond horiſontal AF que d'une force égale à celle dont ce fond ſeroit preſſé par le poids d'un cylindre AYZF de la même Liqueur, lequel eût auſſi ce fond horiſontal AF pour baſe, & pour celle AY qu'a la même Liqueur au-deſſus de ce fond AF dans ce vaſe ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut: quoique (dis-je) cela ſoit vrai de part & d'autre, ſuivant les Th. 42. 43 il ne faut pourtant pas s'imaginer que la Liqueur contenue juſqu'au niveau GH dans le vaſe ABCDEF de

la Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, pesât autant à la main qui soûtiendroit ce vase, qu'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que soûtiendroit ou porteroit cette main dans un vase cylindrique de même base AF que celui-là; ni que la Liqueur contenue aussi jusqu'au niveau GH dans le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, ne pesât à la main qui soûtiendroit ou porteroit ce vase, qu'autant qu'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, que cette main soûtiendroit ou porteroit dans un vase cylindrique de même fond AF que celui-là. Car,

1°. Suivant la démonstration 1. du Th. 43. la Liqueur dont est rempli jusqu'au niveau GH le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus large en bas qu'en haut, ne pese pas seulement de tout son poids sur son fond AF, mais de plus elle y pese d'un effort de résistance dont les côtez obliques CB, DE, de ce vase ou de son rétrécissement BCDE en repoussent vers ce fond AF les filets lateraux que les plus longs ou plus élevez qu'eux, tendent à y faire monter d'une force égale & directement contraire à cet effort, laquelle pousse autant en haut ce rétrécissement ou les côtez obliques de ce vase, que son fond AF est repoussé en bas par leurs résistances; ce qui, comme un ressort appuyé par un bout sur ce fond, & par l'autre contre ces côtez obliques CB, DE, du vase ABCDEF de la Fig. 309. ne tend qu'à écarter d'eux ce fond, & non à charger ce vase, qui ne se trouve ainsi l'être que du seul poids de la Liqueur qu'il contient. Donc le cylindre supposé de la même Liqueur, de hauteur égale à la plus grande qu'elle ait dans ce vase ABCDEF rétréci par en haut, pressant aussi de tout son poids le fond horisontal AF de son vase cylindrique vertical supposé de même base ou fond que celui-là, & y étant en plus grande quantité, & consequemment d'un plus grand poids: ce n'est pas merveille, au contraire c'est une consequence necessaire qu'en soûtenant ou en portant séparément FIG. 309.

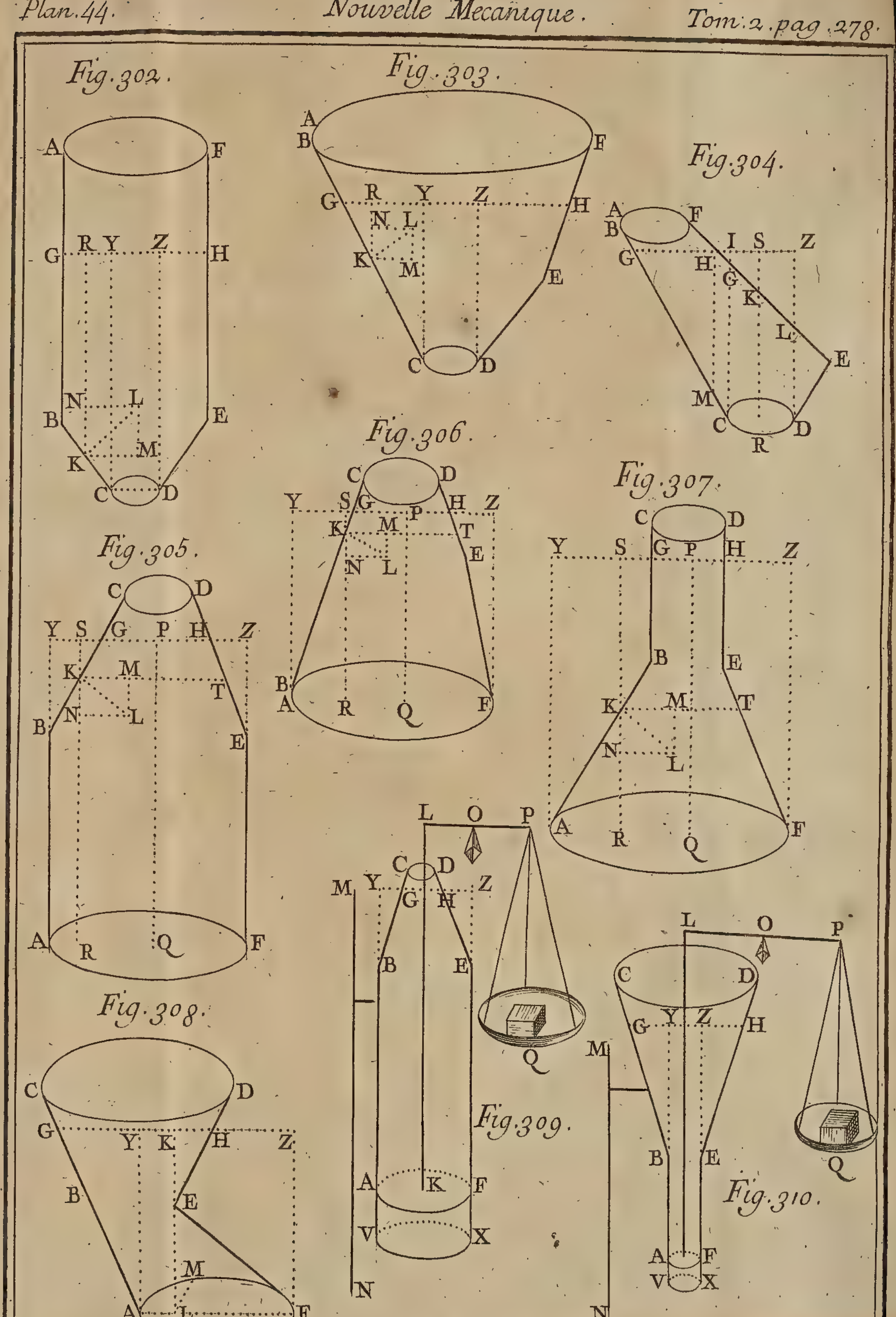
ces deux vases avec ce qu'on y suppose de la même Liqueur ; la contenue dans le vase ABCDEF rétréci par en haut, pese à la main la valeur de son poids, & consequemment moins que la soûtenue par la même main dans le vase cylindrique vertical de même fond AF que celui-là, & à même hauteur que dans ce même-là, quoique ces deux portions de la même Liqueur pressent également (*Th.* 42.) les fonds égaux de ces deux vases dans la Fig. 309.

Fig. 310. 2°. Suivant les démonstrations du Théor. 43. la Liqueur dont est aussi rempli jusqu'au niveau GH le vase ABCDEF de la Fig. 310. plus étroit en bas qu'en haut, pressant vers le bas de tout son poids les fonds AF & les côtez obliques CB, DE, de ce vase ; & ne pressant (*Th.* 43) ce fond horisontal AF que d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur dans un vase cylindrique de même fond AF que celui-là : c'est aussi une consequence necessaire que ce que cet autre vase ABCDEF rétréci par en bas, contient de cette Liqueur, pese de tout son poids à la main qui la soûtiendroit dans ce vase ; & consequemment qu'elle y pese plus que n'y peseroit un cylindre vertical de la même Liqueur à même hauteur que là, soûtenu par la même main dans un vase cylindrique de même fond horisontal AF que celui-là, quoique ces deux portions de la même Liqueur pressent également (*Th.* 43.) ce fond ou les fonds égaux de ces deux vases dans la Fig. 310.

REMARQUES

Sur les Théoremes XLII. XLIII. XLIV.

Fig. 311. 312. 313. I. Dans les Th. 42. 43. dans leurs Corollaires, & dans le précedent Scholie qui leur est commun, l'on a supposé que les vases ABCDEF remplis de Liqueur quelconque jusqu'au niveau quelconque GH, ont leurs fonds horisontaux, lesquels sont AF, lorsque les vases sont cylin-


Fig. 302.
Fig. 303.
Fig. 304.
Fig. 305.
Fig. 306.
Fig. 307.
Fig. 308.
Fig. 309.
Fig. 310.

driques inclinez, comme dans le Th. 42. ou plus larges en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. & CD lorsque ces vases sont au contraire plus larges en haut qu'en bas, comme dans le Th. 43. La raison de cette supposition vient de ce que,

1°. Si le vase ABCDEF cylindrique incliné, comme dans le Th. 42. ou plus large en bas qu'en haut, comme dans le Th. 44. avoit son fond AF oblique à l'horison, comme ici dans les Fig. 311. 312. plus haut en F qu'en A; des filets verticaux de la Liqueur dont on le suppose rempli jusqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtez obliques au-dessous du plan horisontal FO, comme le filet vertical RK en rencontre ici en K l'oblique BC, lequel s'opposant à l'ascension de ce filet RK sollicité à monter par les plus longs, comme dans les démonstr. 1. des Th. 42. 44. en repousse comme là le point K suivant sa perpendiculaire KL, & consequemment (par décomposition de force de la résistance de ce côté BC suivant sa perpendiculaire KL) suivant les côtez KM, KN du parallelogramme rectangle MN fait, comme dans la demonstr. 1. avec des forces qui pressent le fond oblique AF non seulement comme là en R, suivant le côté vertical KN qui le rencontre en R, mais encore en T, suivant le côté horisontal KM, qui rencontre ce fond oblique AF en ce point T; & ainsi de toutes les résistances que les côtez obliques du vase font a l'ascension de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-dessous du plan horisontal FO. Or si ce fond AF n'en étoit pressé que suivant les verticales KR, on démontreroit de la maniere qu'on a démontré les Th. 42. 43. que ce fond oblique AF seroit pressé par tout ce que le vase ABCDEF contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, précisément de la même force qu'il le seroit par un cylindre vertical, ou (*Th.* 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour base ce fond AF pareillement oblique à l'horison, & qui se termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vase ABCDEF

Fig. 311. 312. 313.

cylindrique incliné dans la Fig. 311. ou plus large en bas qu'en haut dans la Fig. 312.

FIG. 313. 2°. Si ce vase ABCDEF étoit renversé, en sorte qu'il en devînt un plus large au contraire en haut qu'en bas, où il eût CD pour fond, comme dans le Th. 43. & qu'il eût aussi ce fond CD oblique à l'horison comme ici dans la Fig. 314. plus haut en D qu'en C; des filets verticaux de la Liqueur dont on le suppose rempli jusqu'au niveau GH, ceux qui en rencontreroient les côtez obliques au-dessous du plan horisontal DO, comme le vertical RK rencontre ici en K l'oblique BC, qui s'opposoit à la descente de ce filet RK, comme dans la démonstr. 1. du Th. 43. en repousse comme là le point K suivant sa perpendiculaire KL, & consequemment (encore par décomposition de force de la résistance de ce côté BC suivant sa perpendiculaire KL) suivant les côtez KM, KN, du parallelogramme rectangle MN fait aussi comme dans cette démonstr. avec des forces dont l'une suivant le côté KN soûtient comme là le poids directement contraire du filet RK, & l'autre suivant le côté horisontal KM presse en ce sens le fond oblique CD, qu'il rencontre en T; & ainsi de toutes les résistances que les côtez obliques du vase font à la descente de tout ce qu'ils rencontrent d'autres filets verticaux au-dessous du plan horisontal DO. Or si ce fond CD n'étoit pressé par aucun des filets verticaux qui rencontrent les côtez obliques du vase ABCDEF de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut, on démontreroit comme l'on a démontré le Th. 43. que ce fond oblique CD ne seroit pressé par tout ce que ce vase contient de Liqueur jusqu'au niveau GH, que d'une force égale à celle dont il seroit pressé par un cylindre vertical, ou (*Th.* 42.) oblique quelconque de la même Liqueur, qui auroit pour base ce fond CD pareillement incliné à l'horison, & qui se termineroit en haut au niveau GH de la Liqueur du vase de la Fig. 313. plus étroit en bas qu'en haut.

3°. Donc (*nomb.* 1. 2.) un vase de fond oblique à l'horison,

rison, tant cylindrique incliné, que plus ou moins large en ce fond qu'au-dessus, rempli de Liqueur quelconque jusqu'à quelque hauteur ou niveau que ce soit, aura ce fond oblique plus pressé par ce qu'il contiendra de cette Liqueur, que ce fond ne le seroit par un cylindre quelconque de même Liqueur, qui auroit pour base ce même fond pareillement incliné à l'horison, & qui se termineroit en haut au niveau de la Liqueur contenue dans le vase supposé cylindrique incliné, ou plus ou moins large en bas qu'en haut. Ce qui ne revient aux Th. 42. 43. 44. qu'en rendant ce fond horisontal: cas seul où se trouve vrai ce qu'on dit d'ordinaire sur le seul témoignage (ce me semble) de l'experience, & ce qui se trouve démontré dans ces Th. 42. 43. 44. sçavoir, qu'*à quelque hauteur ou niveau qu'un vase quelconque de fond horisontal, soit rempli de Liqueur quelconque, ce qu'il contiendra de cette Liqueur, en pressera toûjours ce fond d'une force égale à celle dont ce fond horisontal seroit preslé par un cylindre quelconque de la même Liqueur, lequel auroit ce même fond horisontal pour base, & pour hauteur celle de ce qu'il y a de cette Liqueur dans le vase supposé plus ou moins large en bas qu'en haut.* Ç'a été pour démontrer ce Théoreme appris par l'experience de M. Paschal que le fond d'un tel vase a été supposé horisontal dans les Th. 42. 43. 44.

II. Dans le précedent art. 1. en parlant des vases cylindriques (la même chose se dira des prismatiques quelconques) de fonds ou bases obliques à l'horison, n'y ayant parlé que des bases cylindriques, qui lui sont aussi inclinez: voici presentement pour ceux qui ont aussi des fonds obliques à l'horison. Pour cela soit le tuyau ou vase cylindrique vertical ACDF, de base ou fond oblique quelconque AMNFP, qui prolongé fasse un angle quelconque DFK avec la longueur de ce tuyau, lequel soit rempli d'une Liqueur quelconque jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra. FIG. 314.

1°. Il est évident que ce qu'il y a de cette Liqueur jusqu'en GH dans ce vase cylindrique ou prismatique ver-

tical ACDF, en presse verticalement, ou suivant sa longueur le fond oblique AMNFP d'une force égale au poids absolu de cette quantité AGHF de Liqueur; puisque ce poids porte tout entier sur ce fond.

2°. Quant à la pression perpendiculaire qui en résulte à ce fond oblique AMNFP, soit toute cette quantité de Liqueur conçûe encore ici comme divisée en un nombre presqu'infini de filets verticaux OR terminez en autant de points O de son niveau GH, & en autant de points R du plan de la base ou fond oblique AMNFP du tuyau cylindrique ou prismatique vertical proposé ACDF, lequel soit imaginé coupé par un plan mené suivant quelqu'un OR de ces filets verticaux parallelement au plan vertical DFK, & qui rencontre en la droite MN prolongée vers L, ce fond AMNFP oblique à l'horison; sur lequel fond prolongé tombent les perpendiculaires DK, OL, qui en rencontrent en K, L, les droites FK, ML, paralleles (*constr.*) entr'elles, aussi-bien que DF, OR.

Cela posé, il est pareillement visible que le poids absolu de chaque filet OR de Liqueur, est à la pression ou à la force dont il presse perpendiculairement le fond oblique AMNFP : : OR. OL (*constr.*) : : DF. DK. Donc ce dernier rapport étant constant, la somme des poids absolus de tous les filets OR, c'est-à-dire, le poids total & absolu de toute la quantité de Liqueur AGHF supposée jusqu'au niveau GH dans le cylindre vertical ACDF, est à la pression ou force dont ce poids total presse perpendiculairement le fond oblique de ce tuyau, comme DF est à DK; & consequemment comme la surface inferieure AMNFP de la Liqueur est à sa surface superieure GH, quelle qu'en soit la figure.

III. On suppose ici (*art.* 2. *nomb.* 2.) que AMNFP. GH : : DF. DK. En voici la démonstration pour toutes sortes de cylindres ou prismes de bases de figures quelconques, tel qu'on suppose le précedent vertical ACDF, lequel soit ici en position quelconque.

FIG. 315. Soit ce cylindre ou prisme quelconque ACDF de bases

opposées DXCT, AMFP, dont celle qu'on voudra soit de figure quelconque, & dont la premiere DXCT soit perpendiculaire, & l'autre AMFP lui soit inclinée de tel angle DFK qu'on voudra, soûtendu par DK perpendiculaire en K au plan de la base oblique AMFP.

Cela fait, je dis que l'aire de cette base oblique AMFP du cylindre ou prisme ACDF est à l'aire de sa base perpendiculaire opposée DXCT, comme DF est à DK; c'est-à-dire, AMFP. DXCT :: DF. DK.

Pour le faire voir, soit ce cylindre ou prisme quelconque ACDF coupé en DS par un plan parallele à l'oblique AMFP, & en FRQP par un autre plan perpendiculaire à ce cylindre ou prisme ACDF. Cela fait, il est manifeste que les sections obliques DS, AMFP, de ces cylindres ou prismes quelconques étant égales, semblables, & semblablement posées, de même que les sections perpendiculaires DXCT, FRQP, les cylindres partiaux ASDF, DCQF, sont égaux entr'eux: de sorte qu'ayant ici le cylindre oblique ASDF=AMFP×DK, & le droit DCQF=FRQP×DF=DXCT×DF, l'on y aura aussi AMFP×DK=DXCT×DF. Donc AMFP. DXCT :: DF. DK. *Ce qu'il falloit démontrer.*

IV. On voit presentement que ACDF de position quelconque dans le précedent art. 3. est supposé être le tuyau vertical de même nom dans l'art. 2. & de base AMFP oblique à l'horison, rempli de Liqueur quelconque jusqu'à tel niveau GH qu'on voudra; cette surface horisontale GH de sa Liqueur étant la base superieure perpendiculaire du tuyau vertical partial AHGF de base inferieure AMFP oblique à l'horison: on voit, dis-je, suivant le précedent art. 3. qu'en ce cas la surface oblique inferieure AMFP de la Liqueur sera à sa surface superieure GH, comme DF est à DK, ainsi qu'on la supposé sur la fin du nomb. 2. de l'art. 2.

Cela se voit encore en ce que si l'on suppose que la base superieure DXCT du tuyau vertical ACDF est horisontale, & consequemment perpendiculaire à ce tuyau

comme l'eſt la ſurface ſuperieure GH de la Liqueur qu'il contient ; ayant ici GH=DXCT, & le précedent art. 3. y donnant AMFP. DXCT : : DF. DK. il donnera pareillement ici AMFP. GH : : DF. DK. c'eſt-à-dire, que la ſurface oblique inferieure AMFP de la Liqueur ſuppoſée juſqu'au niveau GH dans le tuyau vertical ACDF ; ſera encore ici à cette ſurface ſuperieure GH de cette Liqueur, comme DF eſt à DK.

V. On peut remarquer en paſſant que la maniere dont l'art. 3. vient de donner le rapport de l'aire de la ſection oblique quelconque d'un cylindre ou priſme quelconque ACDF, à l'aire de la ſection perpendiculaire de ce priſme ou cylindre preſentement de poſition quelconque, comme dans l'art. 3. donneroit auſſi les rapport entr'elles des aires des ſections obliques quelconques de ce corps, leſquelles ſeroient en des plans, qui paſſant par F, ſeroient tous perpendiculaires à celui DKF, ſuivant lequel ce cylindre ou priſme ACDF ſeroit incliné au plan d'une quelconque AMFP de ces ſections obliques à ce cylindre ; & cela en imaginant autant de perpendiculaires DK ſur leurs plans prolongez. Ce qui donneroit ainſi les rapports des aires de toutes les autres ſections obliques du cylindre, paralleles à celles-là dans toute ſa longueur.

Mais ſans tant de perpendiculaires DK, voici comment les rapports des aires de toutes ces ſections obliques cylindriques ou priſmatiques, peuvent ſe trouver par le moyen de la ſeule perpendiculaire DK imaginée (*art.* 3.) ſur le plan prolongé d'une quelconque AMFP de ces ſections obliques. Il n'y a pour cela qu'à imaginer le plan DKF prolongé à travers le cylindre ou priſme ACDF ; lequel plan DKF en le coupant en quelque trapeze ACDF de deux côtez oppoſez DF, CA, paralleles entr'eux, coupe ſa ſection oblique AMFP en la droite AF, qui prolongée paſſe par K, & ſa ſection perpendiculaire FRQP en la droite FQ perpendiculaire en Q au côté CA. Car ayant ainſi les triangles rectangles AQF, FKD, ſemblables entr'eux on aura les droites FA. FQ : : DF. DK. De ſorte que dans la ſup-

position que DXCT est, aussi-bien que FRQP, une section perpendiculaire du cylindre ou prisme ACDF, & consequemment que DXCT=FRQP; l'art. 3. venant de donner DF. DK : : AMFP. DXCT : : AMFP. FRQP. l'on aura aussi les droites FA. FQ : : AMFP. FRQP. ou FRQP. AMFP : : FQ. FA. c'est-à-dire, que les aires de la section perpendiculaire FRQP, & de l'oblique quelconque AMFP du cylindre ou prisme ACDF, sont entr'elles en raison des droites FQ, FA, où ces sections cylindriques sont coupées par le plan DKF prolongé, qui est perpendiculaire aux leurs.

Donc la section oblique AMFP arbitrairement inclinée à la longueur du cylindre ou prisme quelconque ACDF, pouvant être prise pour tout ce que le prisme ou cylindre en peut avoir d'obliques à sa longueur par son point F, en des plans perpendiculaires à celui DKF, suivant lequel ce prisme ou cylindre ACDF est incliné au plan d'une quelconque AMFP de ces sections obliques; les aires de toutes ces sections seront entr'elles comme les droites en qui elles seront coupées par ce plan DKF prolongé à travers d'elles, & à l'aire de la section perpendiculaire FKQP, comme ces droites correspondantes seront à la droite FQ, en qui elle sera aussi coupée par le même plan DKF.

Ainsi de quelque maniere que le cylindre ou prisme quelconque ACDF soit coupé en travers par tant de plans qu'on voudra, tous perpendiculaires au plan DKF, & passant tous par F, les aires de toutes les sections, tant droites qu'obliques quelconques, qui en résulteront à ce prisme ou cylindre ACDF, seront toutes entr'elles comme leurs sections communes chacune avec ce plan DKF suivant lequel ce cylindre ou prisme est incliné au plan d'une quelconque AMFP de ses sections obliques.

Cela a déja été remarqué d'une autre maniere pour les cylindres de bases ou de sections perpendiculaires circulaires, ou (ce qui revient au même) de sections obliques elliptiques quelconques : mais je ne sçais point qu'on l'ait jusqu'ici remarqué

pour toutes sortes de cylindres ou de prismes de sections de figures quelconques : c'est ce qui me fait ajoûter ici cet art. 5. quoique hors d'œuvre.

THEOREME XLV.

Fig. 316. 317. *Quelque Liqueur qu'il y ait dans un Ciphon recourbé de branches quelconques,*

I. *Dès que cette Liqueur y sera à hauteurs égales quelconques, c'est-à-dire, à niveau dans ces branches, elle y restera en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y sera libre.*

II. *Si elle n'y est pas à niveau, elle s'y mettra d'elle-même, & y restera pareillement en équilibre.*

DEMONSTRATION.

PART. I. Soit d'abord un vase de figure quelconque ABCD, rempli de quelque Liqueur que ce soit, jusqu'à tel niveau ou plan horisontal GH qu'on voudra. Imaginons ensuite que dans ce vase il se forme un Ciphon recourbé GEMNFHQPG fait (si l'on veut) de la même Liqueur gelée seulement en ce qu'il faudroit d'autre matiere pour le former, c'est-à-dire, seulement en une lame roulée, de laquelle il soit fait comme il le seroit de verre, de fer blanc, ou de quelqu'autre métal : en sorte que ce que ce Ciphon de glace intercepte de la Liqueur non glacée dans tout le reste, y soit contenu comme dans un autre, qui n'en differeroit que dans la matiere dont il seroit fait.

Une telle formation ou naissance de ce Ciphon de glace, ne causant aucun mouvement ni varieté aucune dans le reste de la Liqueur qu'on ne suppose glacée que dans ce qu'il y en a d'employé à la construction de ce Cyphon; il est évident que ce qu'il contient de cette Liqueur non glacée, y doit rester dans le même état qu'avant que ce Ciphon l'eût intercepté d'avec ce qui en reste hors de lui dans le vase ABCD, & y être retenu par les côtez fermes de ce Ciphon, comme ce reste de Liqueur environnante

retenoit celle-là dans la place qu'elle y occupe. De sorte que si l'on conçoit presentement que le vase ABCD soit anéanti avec tout ce qu'il contient de Liqueur au dehors du Ciphon GEMNFHQPG qui soit toûjours dans la même situation ; cet anéantissement ne causant non plus aucun mouvement ni varieté aucune à ce ciphon, ni à ce qu'il contient de Liqueur, elle y doit encore rester en équilibre au niveau GH, comme avant cet anéantissement ; & consequemment y seroit-elle aussi restée en équilibre à ce niveau GH, si, de quelque matiere que ce Ciphon eût été fait, on l'eût rempli jusques-là de cette Liqueur, sans y en employer davantage dans aucun vase qui contînt le tout comme on l'a supposé d'abord. Donc une Liqueur quelconque mise à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce soit, y doit toûjours demeurer en équilibre à ce niveau, tant qu'elle y sera libre. *Ce qu'il falloit 1°. démontrer.*

La même chose se prouveroit de même quand toute la Liqueur du vase ABCD seroit glacée à la reserve de ce qu'il y en auroit dans un canal GEMNFHQPG de Ciphon, qui resteroit comme creusé dans cette glace ; puisqu'il ne s'agit ici que de l'équilibre de cette Liqueur toûjours fluide dans ce canal, & non de l'épaisseur de la matiere qui le renferme. Fig. 313.

Autrement. Soit un Ciphon GEMNFHQPG de matiere quelconque, & de jambes GEMP, HFNQ, de directions & de cavitez à volonté, fait & placé de maniere que les ouvertures GE, FH, en soient à niveau, c'est-à-dire, dans un même plan horisontal GH au-dessus de ce Ciphon. Je dis que si on le remplit d'une Liqueur quelconque jusqu'à ces ouvertures, c'est-àdire, jusqu'à ce niveau GH, elle y demeurera en équilibre, quelles qu'en soient les grosseurs des colonnes GEMP, HFNQ.

Pour le voir, imaginons ce Ciphon vuide ainsi placé dans un vase quelconque ABCD plus haut que le niveau GH, au-dessus duquel il ait (si l'on veut en H) un trou qui de son bord inferieur touche ce niveau ou plan horisontal GH, & qui bouché d'une cheville juste H, per-

mette de remplir de Liqueur ce vaſe ABCD juſqu'à quelqu'autre niveau ſuperieur KL, lorſque ce trou H eſt fermé, & la laiſſe deſcendre juſqu'au niveau GH, lorſqu'il eſt ouvert.

Ce trou H étant fermé, ſoit le vaſe ABCD rempli d'une Liqueur quelconque juſqu'au niveau KL, il eſt viſible qu'elle n'y arrivera qu'après que le Ciphon GEMNFHQPG en ſera entierement rempli juſqu'à ſes ouvertures GE, FH, ſuppoſées au niveau GH; & que ſi ce trou H reſte fermé après que cette Liqueur ſera arrivée à cet autre niveau KL, elle y reſtera en repos ſuivant le Corol. 1. de l'Ax. 9.

Ouvrons preſentement ce trou H, qu'on ſuppoſe toucher de ſon bord inferieur le niveau GH. Il eſt pareillement manifeſte qu'en ce cas la Liqueur deſcendra de l'autre niveau KL en celui-ci GH, & qui étant arrivée, elle y demeurera, quoique ce trou H reſte ouvert, à moins que quelqu'une des colonnes de cette Liqueur, contenues juſqu'en ce niveau GH dans les branches du Ciphon, par exemple, la plus groſſe colonne GEMP ne l'emportât ſur l'autre HFNQ; ce qui ne ſçauroit être. Car en ce cas, ſi l'on referme le trou H, ce qu'il ſortiroit de Liqueur par l'ouverture FH, devenant plus haute là que le niveau GH, & conſequemment que l'ouverture GE ſuppoſée à ce même niveau, reſluroit (*Ax. 9. Cor. 1.*) par cette ouverture GE en la place de celle qui s'y abaiſſeroit alors; laquelle redevenue juſqu'au bord de cette ouverture GE, continueroit d'en faire ſortir par l'autre FH, qui de ſon côté la rendroit ainſi à l'ouverture GE, & toûjours de même. Ce qui cauſeroit ainſi un mouvement perpetuel dans la Liqueur du Ciphon GEMNFHQPG, & dans la ſurface de ce qu'il en auroit de plus entre lui & le vaſe ABCD: abſurdité qui fait voir que la Liqueur dont ce Ciphon eſt rempli juſqu'au niveau GH, y doit demeurer en équilibre. De ſorte qu'y étant ſans aucune communication avec ce qu'il y en a de plus au même niveau GH entre ce Ciphon & le vaſe; & conſequemment

de

Fig. 311.

Fig. 312.

Fig. 313.

Fig. 315.

Fig. 314.

Fig. 316.

Fig. 317.

Fig. 318.

de même que s'il n'y en avoit point d'autre dans ce vase ABCD, & que ce vase lui-même ne fût plus ici ; mais le Ciphon seul rempli de Liqueur jusqu'au niveau GH des ouvertures GE, FH, de ses branches. Donc une Liqueur quelconque mise à niveau dans les branches quelconques de quelque Ciphon que ce soit, y doit toûjours demeurer en équilibre à ce niveau tant qu'elle y sera libre. *Ce qu'il falloit encore 1°. démontrer.*

PART. II. Je dis presentement que si la Liqueur n'est pas à niveau dans les branches du Ciphon, elle s'y mettra d'elle-même, & y restera en équilibre. Pour le voir, soit un Ciphon APQB de branches quelconques AP, BQ, dans lequel soit une Liqueur quelconque KPQS plus haute en RS dans la branche BQ, qu'en KL dans l'autre branche AP. Soit GH le plan horisontal auquel cette Liqueur seroit à niveau en GE, FH, dans ces deux branches. On vient de voir (*part.* 1.) qu'en ce cas-ci cette Liqueur quelconque demeureroit en équilibre à ce niveau ; & consequemment que les colonnes GPE, HQF, presseroient également alors en sens contraires ce qu'il y auroit de cette Liqueur dans le canal PQ de communication. Or dans le cas de cette même Liqueur à hauteurs inégales en RS & en KL, dans les branches du même Ciphon APQB ; ce qu'il y en auroit dans le canal PQ de communication, seroit plus fortement pressé de Q vers P par la colonne RQS que par la colonne FQH, & moins pressé de P vers Q par la colonne KPL, que par la colonne GPE. Donc en ce cas-ci de la surface RS de Liqueur plus élevée dans la branche BQ, que l'autre surface KL de la même Liqueur dans l'autre branche AP du Ciphon APQB ; la Liqueur comprise dans le canal PQ de communication, sera plus fortement pressée de Q vers P, que de P vers Q ; & toûjours de même tant que RS sera plus haute que KL. Donc en ce cas la surface RS de la Liqueur descendra jusqu'en FH, & l'autre surface KL montera jusqu'en FE ; & si par l'impetuosité de la des-

Fig. 319. 320.

cente de la Liqueur dans la branche BQ, la ſurface RS deſcend plus bas que FH ; & qu'en conſequence l'autre ſurface KL monte plus haut que GE : celle-ci KL redeſcendra par la même raiſon, & l'autre RS remontera, & toûjours de même juſqu'à ce que leur mouvement ceſſe ; ce qu'on voit ne pouvoir arriver qu'au niveau GH. Donc cette Liqueur d'abord inégalement haute dans les branches du Ciphon, n'y aura de repos qu'en ce niveau GH, auquel elle ſe mettra ainſi d'elle-même, & auquel, ſuivant la part. 1. elle demeurera en équilibre tant qu'elle ſera libre. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

On va voir encore d'autres preuves de ces parties 1. 2. *dans les art.* 2. 3. *du Scholie que voici.*

SCHOLIE.

Fig. 321. 322. 323. 324. I. Voilà quelle eſt la neceſſité de l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon, quelques inégales que ſoient les groſſeurs de ces branches, & conſequemment des colonnes de cette Liqueur, qui s'y trouvent ainſi en équilibre entr'elles à ce niveau, nonobſtant l'inégalité de leurs poids. Pour voir preſentement la raiſon d'un tel effet, autant que peut le permettre le peu de connoiſſance que nous avons de la nature de la fluidité, ainſi qu'il a été remarqué dans le Scholie de l'Axiome. Soit un tuyau APBCRD recourbé en PR, ouvert par le haut en AB, & fermé en bas d'un fond CD de poſition quelconque, ſoit ce tuyau rempli de telle Liqueur qu'on voudra juſqu'en GE, laquelle preſſe le fond CD de plus en plus depuis ſon plus haut point C juſqu'au plus bas D, ſelon que les hauteurs des filets de Liqueur, qui le preſſent, vont en augmentant en ce ſens, depuis le niveau ou plan horiſontal GH prolongé vers M juſqu'aux profondeurs des differens points où ils preſſent ce fond. Soit la verticale MO moyenne arithmétique entre toutes ces hauteurs differentes ; &

consequemment telle que multipliée par le nombre de ces hauteurs ou filets de Liqueur, le produit en soit égal à leur somme : laquelle étant proportionnelle à ce qu'ils exercent tous ensemble de force contre le fond CD suivant le fil inferieur du tuyau en cet endroit ; ce produit doit être aussi proportionnel à ce total de forces, c'est-à-dire, à tout ce que la Liqueur GERCDPG cause de pression, suivant cette direction, au fond CD d'angle quelconque avec cette direction. Or le nombre des filets de Liqueur, qui pressent ainsi ce fond CD à plein canal, est égal au nombre des points de ce fond. Donc leur hauteur moyenne MO multipliée par le nombre des points de ce fond CD, c'est-à-dire, par ce fond lui même, est aussi proportionnelle à tout ce que la Liqueur cause de pression au fond CD, suivant la direction de cette Liqueur en cet endroit.

II. Suivant cela, une Liqueur quelconque mise à tel niveau GH qu'on voudra dans un Ciphon APQB de branches AP, BQ, de grosseurs & de directions à volonté, y restera toûjours en équilibre à ce niveau, ainsi qu'on l'a déja vû dans la part. 1. du present Th. 45. Car si l'on imagine où l'on voudra dans le canal PQ de communication une lame, laquelle lame conçûe comme une pellicule, ou comme de glace détachée des côtez de ce canal, soit regardée comme un fond aussi mobile que tout le reste parfaitement fluide de la Liqueur, & toûjours juste de chacune des deux parties APDCRA, BQDCSB de ce Ciphon APQB ; & qu'on prenne, comme dans l'art. 1. la ligne verticale MO pour la moyenne hauteur arithmétique entre toutes les differentes hauteurs de ce que la premiere partie APDCRA du Ciphon contient de filets de cette Liqueur, qui pressent la lame CD de P vers Q : l'on aura aussi cette même verticale MO pour la hauteur moyenne arithmétique entre toutes celles de ce que la seconde partie BQDCSB contient de filets de la la même Liqueur, qui pressent au con- FIG. 325

traire la même lame CD de Q vers P; puisque les hauteurs de ces filets sont les mêmes de part & d'autre depuis le niveau ou plan horisontal GH, jusqu'à tous les points de la lame CD, à chacun desquels il s'en termine par tout deux égales de part & d'autre, une de chaque côté.

Donc en appellant p, ϖ, les pressions directement contraires qui en résultent à la lame CD; le précedent art. 1. donnera ici MO×CD. p : : MO×CD. ϖ. ou MO×CD. MO×CD : : p. ϖ. D'où l'on voit que les pressions directement contraires de cette lame CD sont ici égales entr'elles, quelques inégales que soient les quantitez GERCDPG, HFSCDQH, de la même Liqueur qui les causent par leurs poids. Donc nonobstant l'inégalité de ces poids cette lame CD doit rester ici en repos; & consequemment aussi tout ce qu'il a de Liqueur à niveau GH dans le Ciphon APQB, laquelle doit ainsi demeurer en équilibre à ce niveau GH dans les deux branches de ce Ciphon, comme on l'a déja vû dans la part. 1. du présent Th. 45.

III. La part. 2. de ce Théoreme 45. suit immédiatement aussi du précedent art. 1. sans y employer la part. 1. comme l'on a fait dans la démonstration de cette partie 2. Pour cela soit d'abord la Liqueur à hauteurs inégales en KL, TV, dans les branches AP, BQ, du Ciphon APQB. Soit encore imaginée une lame CD de cette Liqueur dans le canal de communication PQ, la même & pour le même usage que dans le précedent art. 2. soit aussi comme dans les art. 1. 2. depuis le plan horisontal KL prolongé vers N, la verticale NO moyenne hauteur arithmétique entre toutes les differentes hauteurs de ce que la partie APDCRA du Ciphon renferme de filets de Liqueurs, qui pressent la lame CD de P vers Q: il est visible que la verticale XO menée jusqu'en O depuis le plan horisontal TV prolongé vers X, sera aussi la moyenne hauteur arithmétique entre toutes celles de

ce que l'autre partie BQDCSB du Ciphon contient de filets de la même Liqueur, qui pressent au contraire la même lame CD de Q vers P.

Cela posé, si l'on appelle encore p la premiere de ces pressions, qui est de P vers Q; & ϖ, la seconde qui est au contraire de Q vers P; l'art. 1. donnera ici NO×CD. XO×CD :: $p. \varpi$. D'où l'on voit que pour que ces pressions directement contraires p, ϖ, soient égales entr'elles, & que la lame CD demeure en repos avec tout ce que le Ciphon APQB contient de Liqueur, il faudroit ici NO=XO, c'est-à-dire, que les surfaces TV, KL, de cette Liqueur y fussent à hauteurs égales, comme au niveau GH; & qu'ainsi la premiere TV descendît en HF, & que l'autre KL montât en GE, c'est-à-dire, que l'une & l'autre de ces surfaces TV, KL, de la Liqueur, vinssent à ce niveau : lequel cas rendant XO=MO=NO; & changeant ainsi l'analogie précedente en MO×CD. MO×CD :: $p. \varpi$. la Liqueur ainsi venue de part & d'autre à ce niveau GH, y resteroit en équilibre comme dans le précedent art. 2. ainsi qu'on l'a déja vû dans la démonstr. de la par. 2. du present Th. 45.

IV. Puisque dans les art. 2, 3, en quelqu'endroit du canal PQ de communication des branches AP BQ du Ciphon APQB que se trouve la lame CD de la Liqueur dont on suppose ce Ciphon rempli jusqu'à telles hauteurs qu'on voudra dans ses branches; les pressions des côtez ou faces opposées de cette lame CD, sont entr'elles (*art.* 1.) en raison des produits faits de cette lame, multipliez par les hauteurs moyennes arithmétiques chacune entre celles de tout ce qu'il y a de filets de Liqueur qui pressent cette lame de chaque côté: on voit que ce qu'il y a de cette Liqueur qui presse de chaque côté cette même lame CD, équivaut en force contr'elle à un cylindre de la même Liqueur, qui auroit CD pour base, & pour hauteur la moyenne arithmétique entre toutes

les hauteurs de ce qu'il y a de filets de cette Liqueur, qui pressent cette lame CD de ce côté-là. Donc ces deux produits étant égaux de part & d'autre de cette même lame en cas (*art.* 2.) de la Liqueur à même niveau dans les branches du Ciphon, & en cas (*art.* 3.) d'équilibre de cette Liqueur dans ces branches : sçavoir, l'un & l'autre (*art.* 2. 3.) $=MO \times CD$ par rapport au niveau GH dans chacun de ces deux cas ; les pressions directement contraires p, ϖ, de la lame CD, lesquelles se trouvent en l'un & en l'autre (*art.* 2. 3.) égales entr'elles, sont l'effet des colonnes de même Liqueur égales en grosseurs & en hauteurs. Ce qui consideré, fait évanoüir tout le merveilleux qui paroît d'abord dans l'équilibre d'une Liqueur quelconque à niveau dans les branches d'un Ciphon qui les a de grosseurs inégales.

Ce merveilleux vient de ce qu'on croit que tout ce qu'il y a de Liqueur dans la grosse branche, est employé contre tout ce qu'il y en a dans la plus menue, & reciproquement : de maniere que lorsque cette Liqueur est à niveau dans ces deux branches du Ciphon, on en regarde l'équilibre, qui (*art.* 2. *& part.* 1.) s'y trouve alors comme entre deux forces inégales, au lieu qu'on voit ici qu'il est toûjours entre deux forces égales, de même que si les branches du Ciphon étoient de grosseurs égales.

Dans l'article 1. *de ce Scholie-ci, conformément à l'article* 3. *du Scholie de l'Axiome, l'on a supposé à l'ordinaire sur le rapport de l'experience, que la nature de la fluidité des Liqueurs est telle que* les pressions de l'eau (& ainsi des autres Liqueurs) comprimée par sa seule pesanteur dans un reservoir ou vase quelconque, sont égales entr'elles en tous sens à distances égales de son niveau : *Et de-là on a conclu dans le précedent article* 1. *que* la pression ou force dont le fond de position quelconque d'un vase de figure quelconque, rempli de Liqueur jus-

qu'à quelque niveau que ce soit, est toûjours proportionnelle au produit de ce fond multiplié par la hauteur moyenne arithmétique de cette Liqueur, ou de son niveau au-dessus de differens points de ce même fond. *Cela revient aux Théoremes 43. 44. qui n'en sont même que des Corollaires.*



AVERTISSEMENT.

M. Varignon travailloit à des Problêmes pour faire voir l'application de la Théorie précedente à la Pratique, quand la mort nous l'a enlevé. Comme cet Ouvrage n'auroit pas été moins utile que curieux, on a crû qu'on feroit plaisir au Public de lui donner dans cette seconde Partie ce qu'on a pû trouver touchant cette matiere parmi ses Ecrits, & dans les Memoires de l'Académie.



Fig. 319.

Fig. 320.

Fig. 321.

Fig. 322.

Fig. 323.

Fig. 324.

Fig. 325.

NOUVELLE MECANIQUE.

SECONDE PARTIE.

OU L'ON APPLIQUE LA THEORIE précedente à la résolution de plusieurs Problêmes ; à la démonstration de quelques Machines, & à l'examen de l'opinion de M. Borelli, sur les proprietez des Poids suspendus par des Cordes.



APPLICATION
DE LA
NOUVELLE MECANIQUE
A LA RESOLUTION
DE PLUSIEURS PROBLEMES.



DANS la ſuite lorſqu'il s'agira de poids, on les ſuppoſera de directions paralleles entr'elles, & chacun de direction par tout parallele à elle-même, à moins qu'on n'avertiſſe du contraire. Et en parlant de cordons, auſquels autant de puiſſances ſeront appliquées, nous les ſuppoſerons toûjours tous attachez enſemble par un ſeul & même nœud commun, juſqu'à ce que nous avertiſſions du contraire.

PROBLEME I.

Une force quelconque étant donnée, en trouver une infinité d'autres, qui trois à trois appliquées à des cordes perpendiculaires entr'elles, faiſant équilibre avec celle-là. Fig. 326.

Ce qui revient à

Une force quelconque étant donnée ſuivant AE, la décompoſer en trois autres de directions perpendiculaires entr'elles.

SOLUTION.

Autour de la diagonale AE prise à volonté sur la direction donnée de la puissance donnée, soit le parallelogramme rectangle quelconque EBAF, dont le côté AF soit aussi la diagonale d'un autre parallelogramme rectangle quelconque FCAD dans un plan perpendiculaire à celui du premier EBAF. Je dis que la force quelconque suivant AE, se décomposera en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entre-elles; & cette force suivant AE, sera ces derivées suivant ces trois directions AB, AC, AD, comme AE est à ces trois côtez des parallelogrammes BF, CD.

DEMONSTRATION.

Puisque AE, AF, sont les diagonales de ces deux parallelogrammes, il est manifeste que la force suivant AE, se decomposera en deux autres suivant AB, AF, ausquelles elle sera comme AE à AB, AF; & que la resultante suivant AF, se decomposera de même en deux autres suivant AC, AD, ausquelles elle sera comme AF à AC, AD. Donc la premiere force donnée suivant AE, se décomposera ainsi en trois autres suivant AB, AC, AD, ausquelles elle sera comme AE est à ces trois côtez des parallelogrammes BF, CD. Or ces trois côtez AB, AC, AD, sont perpendiculaires entr'eux: puisque les plans des parallelogrammes BF, CD, sont supposez perpendiculaires entr'eux, & que AB supposez perpendiculaires à leur section commune AF, l'est aussi aux lignes AC, AD, qu'on suppose perpendiculaires entr'elles. Donc la force donnée suivant AE se trouve ici decomposée en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles; & est à chacune de ces trois forces derivées, comme AE est à chacune de ces trois lignes AB, AC, AD. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Si l'on veut que les trois puissances derivées suivant les directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles, soient égales entr'elles, la direction AE de la puissance donnée étant laissée arbitraire; soient faites AF, BE, paralleles entr'elles, & AB qui les rencontrent angles droits : ensuite sur BE soit prise BG=AB; & après avoir fait du centre A, & du rayon AG, l'arc de cercle GF qui rencontre AF en F : de ce point F soit menée FE parallele à AB, qui rencontre BG prolongée en E, par lequel point E soit menée la diagonale AE du parallelogramme rectangle BF, autour du côté AF, comme diagonale, soit fait le quarré CD dans un plan perpendiculaire à celui du parallelogramme BF & le côté AF, sera la section commune de ces deux plans orthogonaux l'un à l'autre. FIG. 327.

Il est déja visible, suivant la demonstration precedente, que la force donnée suivant AE se decompose ici en trois autres suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles, & que cette force suivant AE est à chacune de ces trois forces derivées suivant ces trois directions AB, AC, AE, comme AE à chacune de ces trois lignes : de sorte qu'il ne reste plus qu'à demontrer que ces trois lignes sont égales entr'elles pour faire voir que les forces derivées suivant ces directions, le sont aussi entr'elles. Or cela est aisé, puisqu'ayant (*Hyp.*) l'angle B droit, & AB=BG, on aura $2\times\overline{AB}^2=\overline{AG}^2=\overline{AF}^2$ (à cause du quarré CD) $=\overline{AD}^2+\overline{FD}^2=\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2$. d'où resulte $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2$; & consequemment AB=AC=AD. *Ce qui restoit ici à démontrer.*

COROLLAIRE II.

Fig. 327. Pour trouver la même chose, lorsque AE est donnée, soit sur le diametre AE un demi-cercle AFE, dans lequel soit inscrite une corde AF. AE :: $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1. Soit achevé le parallelogramme AFEB, dont le côté AF soit la diagonale d'un quarré CD fait sur un plan perpendiculaire à celui de ce parallelogramme AFEB. Il est encore visible par la demonstration precedente, que la force de direction donnée AE, sera encore ici decomposée en trois autres, suivant des directions AB, AC, AD, toutes perpendiculaires entr'elles; & que cette force est à chacune des derivées suivant ces directions AB, AC, AD, comme AE est à ces trois lignes; de sorte qu'il ne s'agit plus que de faire voir que ces trois lignes sont égales entr'elles; ce qui est aisé: car puisque (*Hyp.*) AF. AE :: $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 1. si l'on prend AE$=$1, l'on aura AF$=\sqrt{\frac{2}{3}}$; & consequemment (à cause de l'angle droit AFE) FE$=\sqrt{\frac{1}{3}}$. De plus AF ($\sqrt{\frac{2}{3}}$) étant la diagonale du quarré CD, l'on aura aussi ses côtez FD, AD, chacun $=\sqrt{\frac{1}{3}}$. Donc FE$=$FD$=$AD. Or FE$=$AB, FD$=$AC. Donc AB$=$AC$=$AD. *Ce qui restoit à démontrer.*

PROBLEME II.

Fig. 328. *Trois puissances P, Q, R, étant données, ou de rapports donnez entr'elles, appliquées à trois cordons AP, AQ, AR, diriger ces cordons avec ces trois puissances, de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

On a vû (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) que pour la possibilité de ce Problême, la somme de deux quelconques de ces trois puissances, doit être plus grande que la troisiéme.

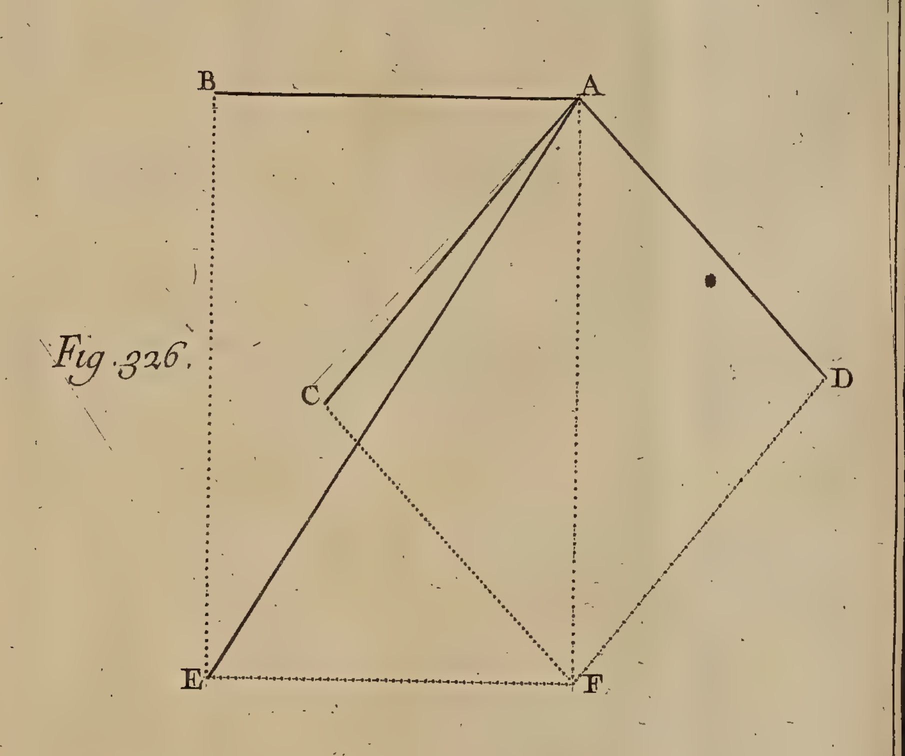


Fig . 326 .

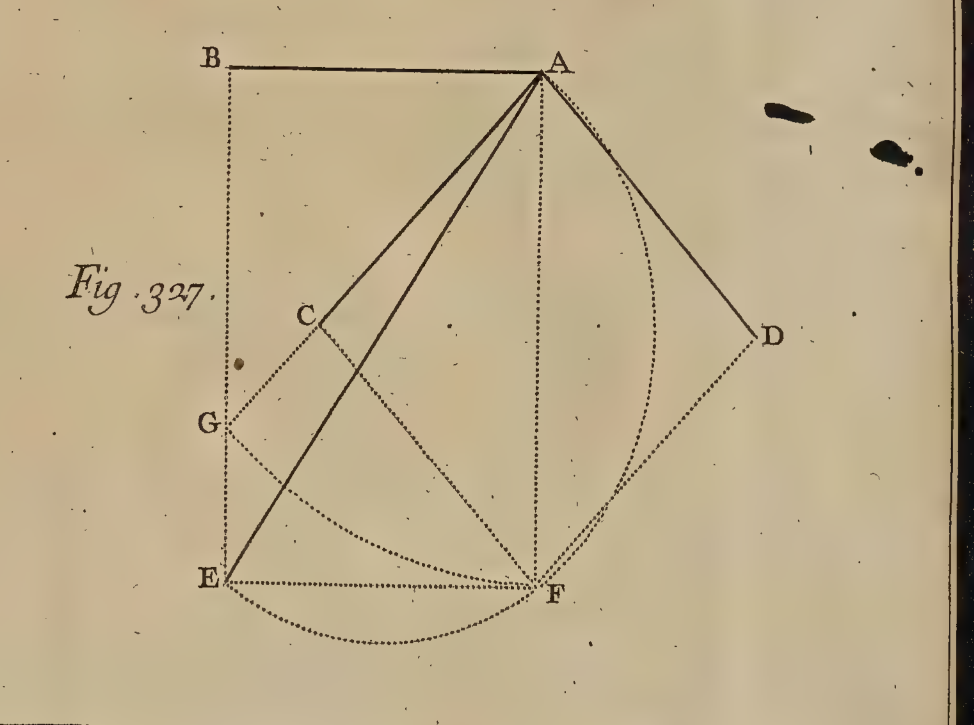


Fig . 327 .

Cela posé, soit à volonté la direction d'une quelconque de ces trois puissances, par exemple, de la puissance Q, sur une partie quelconque AD de cette direction QA, prolongée vers D, soit fait le triangle ABD, dont les côtez AB, BD, soient au troisiéme AD, comme les puissances données P, R, sont à la puissance Q pareillement donnée, soient ensuite la puissance P dirigée suivant AB, & la puissance R dirigée suivant AR parallele à BD. Je dis que ces deux puissances P, R, & la puissance Q, ainsi dirigées suivant AP, AR, AQ, feront équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit achevé le parallelogramme BC, en faisant DC parallele à AB; ce qui rend AC=BD. Donc par la solution ayant AB, BD, à AD, comme les puissances P, R, sont à la puissance Q; les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, sont pareillement à sa diagonale AD, comme les puissances P, R, sont à cette puissance Q. Donc (*Th. 1. part. 5.*) ces trois puissances P, R, Q, appliquées aux trois cordons AP, AR; AQ, dirigez suivant ces trois lignes AB, AC, AD, seront ici en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLEME III.

Soient deux puissances données Q, R, avec deux directions AR, AP, pareillement données. On demande une troisiéme puissance P à diriger suivant AP, & une troisiéme direction AQ de la puissance donnée Q; telles que les trois puissances P, R, Q, appliquées à trois cordons dirigées suivant AP, AR, AQ, fassent équilibre entr'elles. FIG. 329. 330. 331.

SOLUTION.

Après avoir pris à volonté AC sur la droite AR de position donnée, & ensuite sur elle prolongée pris du côté de A,

une autre partie AE. AC : : Q. R. dont les puiſſances Q, R, ſont auſſi données ; ſoit fait du rayon AE un arc de cercle ED, qui rencontre en D la droite OO menée par le point C parallelement à la direction donnée AP de la puiſſance requiſe P.

Cela fait, je dis que ſi de ce point D par A on mene la droite DAQ, & qu'on acheve le parallelogramme ACDB, l'on aura AQ pour la direction requiſe de la puiſſance donnée Q ; & qu'une puiſſance qui ſera aux données Q, R, comme AB eſt à AD, AC, ſera auſſi la requiſe P, qui appliquée ſuivant la direction donnée AP, fera équilibre avec ces deux autres Q, R, appliquées de même ſuivant AQ, AR. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Ces trois puiſſances P, R, Q, étant ainſi appliquées à leurs cordons AP, AR, AQ, ſuivant AB, AC, AD, & entr'elles comme les côtez AB, AC, & la diagonale AD du parallelogramme ABDC, la part. 5. du Th. 1. fait voir qu'elles ſeront alors toutes trois en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

On voit que ſelon que le cercle ED décrit du centre A, & du rayon AE=AD, rencontre CO parallele à AP, en un ou en deux points D, *d*, differens de C, le Problême n'aura qu'une ou deux ſolutions. Or,

FIG. 330. 331. 1°. Lorſque AC eſt plus grande que AE, comme dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. dans leſquelles Fig. 330. 331. ce cercle ne rencontre CO qu'en un ſeul point D, different de C. Donc dans chacun de ces deux cas le Problême n'aura point d'autre ſolution que la precedente ; c'eſt-à-dire, que la direction requiſe de la puiſſance donnée Q, n'y pourra être que ſuivant l'unique DA prolongée vers Q ; & que la puiſſance P auſſi requiſe ſuivant AP pour faire équilibre avec les

les données R, Q, dirigées suivant AR, AQ, y devra necessairement être à chacune d'elles comme le côté AB du parallelogramme ABDC est à son autre côté AC & à sa diagonale AD. Donc la precedente solution ayant AC. AE : : R. Q. le Problême n'aura aussi que cette unique solution, lorsque la puissance donnée R sera plus grande que l'autre donnée Q, ou qu'elle lui sera égale.

2°. Mais lorsque AC est moindre que AE=AD, ainsi que dans la Fig. 329. le cercle ED y rencontre OO en deux points D, *d*, differens de C. Donc le Problême y aura deux solutions : l'une comme la precedente, dans laquelle le point D donne la droite DAQ pour une direction de la puissance donnée Q, & une puissance P, qui dirigée suivant AP, doit être aux deux données R, Q, comme AB est à AC, AD, pour faire équilibre avec elles dirigées suivant AR. AQ. FIG. 329.

L'autre solution donnera de même *d*A*q* pour une autre direction de la même puissance donnée Q placée en *q*, & une autre puissance P, qui dirigée comme l'autre suivant AP, doit être ici (en achevant le parallelogramme A*bd*C) aux puissances données R, Q, comme A*b* est à AC, A*d*, pour faire aussi équilibre avec ces mêmes puissances R, Q, dirigées suivant AR, A*q*. Cette seconde solution se demontrera comme la premiere, la demonstration precedente convenant également à toutes les deux, en employant ici le parallelogramme A*bd*C comme l'autre ABDC a été employé là.

Puisque le Problême est ici (*Fig*. 329.) susceptible de ces deux solutions, lorsque AC est moindre que AE, & qu'elles exigent également AC. AE : : R. Q. Ce Problême est aussi susceptible de deux solutions, lorsque des deux puissances données R, Q, la premiere R est moindre que la seconde Q. FIG. 329.

3°. Donc (*nomb*. 1. 2.) le present Probl. 3. n'est susceptible que d'une solution, telle que la premiere du nomb. 1. lorsque des deux puissances données R, Q, la premiere R est plus grande que la seconde Q, comme FIG. 329. 330. 331.

dans la Fig. 330. ou égale à elle, comme dans la Fig. 331. & de deux solutions, quand la premiere R de ces deux puissances est plus petite que la seconde, comme dans la Fig. 329.

PROBLEME IV.

Fig. 332. 333. *Trois puissances P, Q, R, ou trois poids des mêmes noms; étant donnez, appliquez à trois cordons AEP, AQ, AFR, ou les rapports de ces trois puissances de la Fig. 332. ou de ces trois poids de la Fig. 333. étant simplement donnez avec deux points fixes dans la Fig. 332. & deux pivots ou poulies de mêmes noms dans la Fig. 333. par lesquels points fixes ou pivots E, F, l'on veut que passent les cordons de deux quelconques P, R, de ces trois puissances ou poids: on demande les directions que leurs trois cordons doivent avoir en partant de leur nœud commun A, pour mettre ces trois puissances, ou ces trois poids en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

On sçait (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) que pour cela la puissance Q, ou le poids de ce nom, doit être moindre que la somme des deux autres.

Pour cela soit dans la Fig. 332. une droite quelconque GK en même plan avec la droite, qui passe par les points donnez E, F, & de position quelconque differente d'elle dans la Fig. 332. & parallele à la direction du poids Q dans la Fig. 333. sur cette droite de grandeur arbitraire GK des Fig. 332. 333. soit fait un triangle KHG aussi en même plan avec les points donnez E, F, duquel triangle les deux côtez KH, HG, soient au premier GK, comme les puissances ou les poids donnez P, R, sont à Q pareillement donné. Prenant ensuite les poulies ou les pivots E, F, de la Fig. 333. pour des points fixes, tels que sont E, F, dans la Fig. 332. De ces points E, F, dans chacune de ces deux Fig. 332. 333. soient menées les droites EA parallele à HK, & FA parallele à GH. Enfin par le point A, où ces deux droites EA, FA, se rencontrent,

soit AQ parallele à GK dans chacune des Fig. 332. 333.

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant ces trois droites AE, AF, AQ, les cordons des trois puissances ou poids P, R, Q, il y aura équilibre entr'elles dans la Fig. 332. & entr'eux dans la Fig. 333. desquelles puissances ou poids les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, F. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Autour de AD, portion quelconque de QA prolongée vers D, comme diagonale, soit imaginé un parallelogramme BC, fait de côtez AB, AC, pris sur les directions AE, AF, des cordons AEP, AFP, continues en lignes droites par les points donnez E, F, dans la Fig. 332. & qui passent par-dessus les poulies ou pivots E, F, pareillement donnez de position dans la Fig. 333. Ce parallelogramme BC, qui a par construct. sa diagonale AD parallele à KG, & son côté AC parallele à HG, aura le triangle ABD semblable au primitif KHG; & en consequence les côtez AB, BD, AD du premier ABD de ces deux triangles, sont ici proportionnels aux côtez KH, HG, KG, de l'autre triangle KHG; qui les a aussi (*constr.*) proportionnels aux puissances ou aux poids P, R, Q. Donc les puissances P, R, sont ici à la puissance Q dans la Fig. 332. & les poids P, R, au poids Q dans la Fig. 333. comme les côtez AB, BD, du triangle ABD, sont à son troisiéme côté AD, c'est-à-dire (à cause de AC=BD) comme les côtez AB, AC, du parallelogramme BC, sont à sa diagonale AD. Par consequent (*Th. 1. part. 5.*) il y aura ici équilibre tant entre les trois puissances P, R, Q, de la Fig. 332. qu'entre les poids de mêmes noms dans la Fig. 333. desquelles puissances ou poids, les deux P, R, auront leurs directions par les points donnez E, F: le tout ainsi qu'on l'exigeoit. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

I. Cette derniere condition, suivant laquelle on exi-

geoit que dans l'équilibre demandé entre les trois puissances ou poids donnez P, R, Q, les directions de P, R, passassent par les points donnez fixes E, F, n'est ici rigoureusement observée que dans le cas des puissances de la Fig. 332. & n'approche de cette rigueur dans le cas des poids de la Fig. 333. qu'autant que la petitesse des poulies ou des pivots E, F, qui s'y trouvent, approche de l'infinie petitesse de ces points, pour lesquels nous les avons prises jusqu'ici.

Fig. 333. II. Mais si l'on ne veut pas prendre ainsi ces poulies ou ces pivots E, F, de la Fig. 333. pour de veritables points, & qu'on veuille seulement trouver les directions que les cordons des trois poids donnez P, R, Q, doivent avoir en partant de leur nœud commun A, pour mettre ces trois poids en équilibre entr'eux sur des poulies E, F, données de position & de grandeurs quelconques, pardessus lesquelles les cordons des deux premiers poids P, R, doivent passer. Voici la solution de cet autre Problême, qui fera voir, que si outre cela on vouloit que les directions des deux cordons AEP, AFR, des poids P, R, passassent par deux points donnez sur les poulies E, F, ou ailleurs, le Problême en seroit impossible, à moins que ces deux points ne fussent heureusement donnez dans ces deux directions que la direction déterminée du poids Q, rend aussi déterminées, sans permettre de les faire passer par où l'on veut, comme l'indéterminée de la puissance Q de la Fig. 332. le vient de permettre des directions des puissances P, R. Quelque clair que tout cela soit, on le verra encore mieux dans le Schol. du Probl. 5.

PROBLÊME V.

Fig. 334. *Si l'on veut presentement avoir égard aux grandeurs des poulies, imaginons-en deux VY, XZ, de rayons EV, FX, donnez de grandeurs quelconques dans un plan vertical, & mobiles dans ce plan autour des centres fixes E, F, donnez de position. Soient encore trois poids donnez P, R, Q, appli-*

quez à trois cordons AVYP, AXZR, AQ, dont les deux premiers AVYP, AXZR, doivent passer par-dessus les poulies VY, XZ. On demande la situation de leurs parties AV, AX, propres à mettre leurs poids P, R, en équilibre avec le poids Q.

SOLUTION.

Je repete encore que pour cet équilibre chacun de ces trois poids doit être (*Th.* I. *Corol.* 6. *art.* I.) moindre que la somme des deux autres.

Cela posé, soit fait sur une verticale quelconque GK dans le plan des poulies VY, XZ, un triangle GHK, dont les deux côtez KH, HG, soient au troisiéme GK, comme les poids donnez P, R, sont au donné Q. Soient ensuite menées les droites LS parallele à KH, & MT parallele à HG; sur lesquelles des centres E, F, des poulies VY, XZ, soient menées les perpendiculaires ES, FT, qui prolongées des côtez de E, F, rencontrent en V, X, les circonferences de ces mêmes poulies; ausquels points V, X, soient enfin leurs tangentes VA, XA, qui se rencontrent en A.

Cela fait, je dis que si l'on met en ce point A le nœud commun des cordons AVYP, AXZR, AQ, bandez par les poids P, R, Q, & dont les deux premiers passent par-dessus les poulies VY, XZ; ces trois poids y demeureront en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit trouver.*

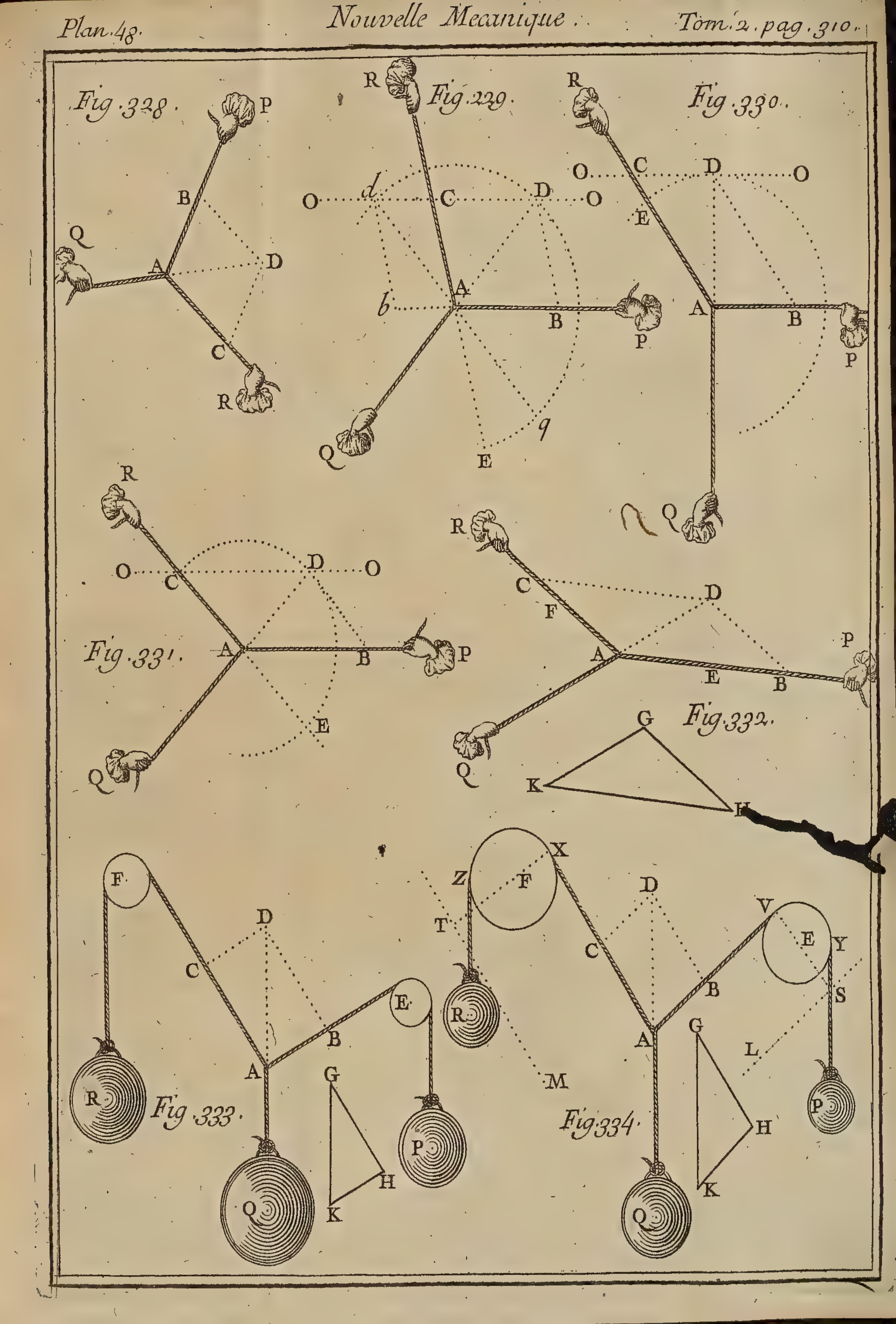
DEMONSTRATION.

Puisque (*constr.*) les droites AV, AX, sont tangentes en V, X, des poulies VY, XZ; & consequemment sont perpendiculaires à leurs rayons VE, XF, qui prolongez vers S, T, le sont aussi (*constr.*) en ces points aux droites LS, MT; ces autres droites AV, AX, sont paralleles chacune à chacune des droites LS, MT, sçavoir, AV à LS, & AX à MT. Or (*constr.*) LS l'est à KH, & MT à HG. Donc AV est aussi parallele à KH, & AX à HG. Or, à cause de GK supposée parallele à AQ, si l'on prolonge celle-ci vers D, & qu'autour de sa partie quelconque AD

(comme diagonale) l'on fasse le parallelogramme ABDC, dont les côtez AB, AC, sont sur AV, AX; ce parallelogramme aura aussi AD parallele à KG, & BD parallele à AC, ou à AX. Donc son triangle ABD est équiangle à KHG; & consequemment ce triangle ABD à ses côtez AB, BD, AD, proportionnels à ceux KH, HG, KG, de KHG. Or (*constr.*) ce triangle-ci KHG à ces mêmes côtez KH, HG, KG, en raison des poids P, R, Q. Donc l'autre triangle ABD a aussi ses côtez AB, BD, AD, en raison de ces mêmes poids P, R, Q; par consequent le parallelogramme BC, ayant AC=BD, donne pareillement ici AB, AC, AD, en raison de ces poids donnez P, R, Q; ce qui y rend les deux premiers P, R, au troisiéme Q, comme les deux côtez AB, AC, du parallelogramme BC, sont à sa diagonale AD. Donc (*Th.* 1. *art.* 5.) ces trois poids P, R, Q, doivent ici demeurer en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Cet équilibre resultant de ce que le parallelogramme BC se trouve ici avoir ses côtez AB, AC, & sa diagonale AD, en raison des poids donnez P, R, Q; & ces rapports entre AB, AC, AD, dépendant de ceux des angles des trois cordons entr'eux, lesquels rapports d'angles seroient autres qu'ici, si l'on plaçoit le nœud commun de ces trois cordons ailleurs que dans le point A, qu'on lui a trouvé dans la solution. On voit que pour l'équilibre ici requis entre les poids donnez P, R, Q, ce point A est l'unique où le nœud commun de leurs trois cordons puisse être placé; & qu'ainsi les directions suivant AV, AX, sont les seules suivant lesquelles les poids P, R, puissent ici faire équilibre avec le poids Q. De sorte que si outre ce que dessus l'on exigeoit ces directions des poids P, R, par des points qui fussent hors de ces lignes AV, AX, le Problême seroit alors impossible, ainsi qu'on le vient de dire dans l'art. 2. du Schol. du précedent Probl. 4.


Fig.328.
Fig.229.
Fig.330.
Fig.331.
Fig.332.
Fig.333.
Fig.334.

PROBLEME VI.

Trois puissances P, Q, R, étant données à volonté, les appliquer à trois cordons, de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles suivant des directions qui passent par trois points A, B, C, donnez aussi à volonté en toute autre position qu'en ligne droite. FIG. 335.

SOLUTION.

Il est encore ici à remarquer (*Th. 1. Corol. 6. part. 1.*) que pour cet équilibre chacune des puissances données P, Q, R, doit être moindre que la somme des deux autres.

Cela posé, par deux A, B, des trois points donnez A, B, C, soit la droite AB, sur laquelle soit le triangle AFB, dont les trois côtez AB, AF, BF, soient entr'eux comme les trois puissances données R, Q, P. Après avoir circonscrit le cercle AFBE à ce triangle AFB, du troisiéme point donné C soit menée par F la droite CF, qui rencontre encore la circonference de ce cercle en quelque point E de l'arc AEB.

Cela fait, je dis que si l'on met en E le nœud commun des trois cordons ausquels les puissances données P, Q, R, doivent être appliquées, & qu'on les dirige suivant EA, EB, FC, prolongée vers R; ces trois puissances P, Q, R, demeureront en équilibre entr'elles suivant ces directions EP, EQ, ER, qui passent ainsi par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Puisque (*constr.*) les trois côtez BF, AF, AB, du triangle AFB sont entr'eux comme les trois puissances données P, Q, R; & aussi entr'eux comme les sinus des angles BAF, ABF, AFB, qui leur sont opposez dans ce triangle AFB: ces trois puissances P, Q, R, sont pareillement entr'elles comme ces trois sinus. Or ces trois sinus des angles BAF, ABF, AFB, sont les mêmes que ceux des an-

gles BEF, AEF, AEB : puiſque de ces ſix angles, tous à la circonference du cercle AFBE, les deux BAF, BEF, appuyez ſur le même arc BF, ſont égaux entr'eux ; que les deux ABF, AEF, appuyez ſur le même arc AF, ſont auſſi égaux entr'eux ; & que les deux AFB, AEB, ſont complemens l'un de l'autre à deux droits. Donc les trois puiſſances données P, Q, R, ſont auſſi entr'elles comme les ſinus des angles BEF, AEF, AEB ; c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles QER, PER, PEQ, les deux premiers de ces trois-ci étant complemens à deux droits des deux premiers des trois autres, & le troiſiéme étant le même de part & d'autre. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 20.) ces trois puiſſances données P, Q, R, demeureront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions EP, EQ, ER, qui (*conſtr.*) paſſent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

Sans le ſecours des Sinus.

Si l'on fait BM parallele à EA, & qui rencontre la droite EF en quelque point M, l'on aura le triangle EBM, lequel ayant les angles BEM=BEF=BAF, & BME=AEF=ABF, ſera ſemblable au triangle AFB ; & conſequemment aura ſes trois côtez BM, EB, EM, en raiſon des trois côtez BF, AF, AB, de cet autre triangle AFB, leſquels ſont (*conſtr.*) entr'eux comme les trois puiſſances données P, Q, R. Donc ces trois puiſſances ſont auſſi entr'elles comme les trois côtez BM, EB, EM, du triangle EBM. Par conſequent ſi l'on acheve le parallelogramme BMNE, qui donne EN=BM, l'on aura ici les puiſſances P, Q, à la puiſſance R, comme les côtez EN, EB, à la diagonale EM de ce parallelogramme BMNE. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) ces trois puiſſances données P, Q, R, ſeront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions EP, EQ, ER, qui (*conſtr.*) paſſent par les trois points donnez A, B, C. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

SCHOLIE.

SCHOLIE.

I. On voit que tant que le troisiéme C des trois points donnez A, B, C, ſe trouvera quelque part dans quelqu'un des angles AFB, GFH, oppoſez au ſommet ; le nœud commun E des trois cordons EP, EQ, ER, qui doivent paſſer par ces trois points dans l'équilibre requis, ſera toûjours quelque part ſur l'arc circulaire AEB compris entre les deux autres points donnez A, B.

II. On voit auſſi que ſi ce troiſiéme point donné C ne ſe trouve dans aucun des angles AFB, GFH, il n'y aura qu'à mener de ce point C par quelqu'un des deux autres A, B, une ligne droite, & s'en ſervir comme l'on vient de faire de AB dans la ſolution, pour reſoudre comme là le Problême en queſtion.

III. Si les trois points donnez A, B, C, l'étoient en ligne droite, par exemple, tous trois ſur la droite AB de longueur quelconque ; il eſt manifeſte que pour l'équilibre requis entre les trois puiſſances données P, Q, R, dont on veut que les directions paſſent par ces trois points, le commun E de leurs cordons devroit auſſi être ſur cette ligne droite AB, ſuivant laquelle ces trois cordons devroient auſſi pour lors être tous dirigez : ſçavoir, deux d'un même côté de ce nœud E, & le troiſiéme du côté directement oppoſé ; & qu'en ce cas la puiſſance appliquée à ce troiſiéme cordon devroit être ſeule égale à la ſomme des deux autres, qui auroient alors une même direction directement contraire à la ſienne ; & qui par conſequent ainſi réunies en une directement contraire à celle-là, l'emporteroient ſur elle, ſi elle étoit moindre que leur ſomme, ou ſeroient emportées par elle, ſi elle étoit plus grande.

PROBLEME VII.

Etant donnez les deux angles ACD, BDC, que deux poids quelconques E, F, font faire à la corde ACDB lâchement tendue entre deux clous ou crochets A, B, auſquels elle eſt atta- FIG. 336.

chée par ses extrêmitez, & entre lesquels ces deux poids E, F, pendent aux points quelconques C, D, de cette corde : l'on demande les rapports de ces deux poids entr'eux.

SOLUTION.

Soient AC, BD, prolongées jusqu'à leurs rencontres en G, H, avec les directions CE, DF, des poids E, F, qu'on suppose les avoir paralleles entr'elles.

Cela fait, je dis que ces poids E, F, sont entr'eux en raison reciproque des parties CH, DG, de leurs directions, comprises en AC, BD, prolongées jusqu'à elles ; c'est-à-dire, E. F : : DG. CH. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soient appellées C la force dont le point D est tiré vers C, & D, la directement contraire, dont le point C est tiré vers D : soit de plus $\int$ la marque des sinus.

L'équilibre étant ici supposé, le Corol. 20. du Th. 1. donnera E. D : : $\int$ACD. $\int$ACE : : $\int$DCG. $\int$ECG : : $\int$DCG. $\int$CGD : : DG. CD. c'est-à-dire, E. D : : DG. CD. le même Corol. 20. du Th. 1. donnera pareillement F. C : : CH. CD. ou C. F : : CD. CH. Mais la force C, dont le point D est tiré vers C, est égale à la force D, dont le point C est tiré vers D ; puisque ces deux forces C, D, sont en équilibre & directement opposées entr'elles. Donc E. D : : DG. CD. & D. F : : CD. CH. Donc aussi (en raison ordonnée) E. F : : DG. CH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

M. Nevvton a aussi démontré cette proposition à sa maniere dans son Arithmétique universelle.

PROBLEME VIII.

FIG. 337. *Deux poids donnez P, Q, étant attachez à une corde ABCP, qui retenue par une de ses extrêmitez au clou ou crochet A, passe librement par-dessus une poulie Cc mobile entre ces poids autour de son centre fixe G : on demande en quel point B, ou en quelle situation ABC de la corde ces deux poids demeureront en équilibre entr'eux.*

SOLUTION.

Après avoir mené la verticale AE, & d'un de ses points quelconque E pris au-dessus de A, mené en angle aussi quelconque la droite ET. AE : : P. Q. soit par les points A, T, la droite ATO rencontrée en une infinité d'autres points *t*, par une infinité de *et* paralleles à ET, & qui rencontrent aussi la verticale AE en une infinité de points *e*, E, desquels soient menées autant de droites *ec*, EC, qui touchent la poulie en *c*, C. Si l'on prend par tout sur ces touchantes, depuis AE, les portions *eb*=*et*, EB=ET ; la courbe A*b*Bβ, qui passera par tous les points *b*, B, ainsi trouvée, déterminera par sa rencontre avec l'arc de cercle LBD décrit du centre A & du rayon donné AB, le point B ou le poids Q demeurera suspendu en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallelogramme HK, dont la diagonale BF soit sur la verticale QB prolongée vers F ; & les côtez BH, BK, sur les portions AB, BC, de la corde ABCP. La ressemblance des triangles rectilignes FKB, ABE, donnera BK. BF : : EB. EA (*constr.*) : : ET. EA (*Hyp.*) : : P. Q. c'est-à-dire, BK. BF : : P. Q. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) le poids Q demeurera ici suspendu en B en équilibre avec le poids P. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Le rayon AB étant arbitraire, on voit que de quelque longueur qu'il soit, le point B de suspension du poids Q en équilibre avec le poids P, se trouvera toûjours sur la courbe ABβ. Ainsi *si ce poids Q, au lieu d'être attaché en B à la corde ABCP, eût été proposé coulant le long de cette corde entre le crochet A & la poulie CcG, & qu'on eût demandé en quel point de cette même corde il devoit s'arrêter en équilibre avec le poids P :* cette question auroit été resolue par le moyen de la courbe ABβ, faite comme ci-dessus, en ré-

pondant que ce poids Q auroit pû demeurer ainsi en équilibre avec le poids P dans tout ce que la longueur de la corde lui peut permettre de points B, qui puissent atteindre à cette courbe ABβ, & qu'il y seroit effectivement demeuré dans tous ceux où cette corde auroit atteint cette courbe ; puisque par la construction de cette même courbe ABβ, ce poids Q y auroit été par tout au poids P :: BF. BK. Et consequemment aussi (*Th.* 1. *Corol.* 6. *art.* 1.) en équilibre par tout là avec le poids P. D'où l'on voit que ce même poids Q peut ainsi demeurer en équilibre avec le même poids P en une infinité de points B de la corde ABCP ainsi repliée jusqu'à la courbe ABβ ; de sorte que cette courbe est le lieu de tous les points B d'équilibre.

PROBLEME IX.

Fig. 338. 339. *Un Levier droit, sans pesanteur, étant de longueur donnée EF dans la Fig. 338. & EG dans la Fig. 339. chargé d'un poids donné Q en un point donné G quelconque ; lui appliquer en deux autres points aussi donnez E, F, deux puissances données P, R, de maniere qu'avec des cordes seulement ce Levier chargé de ce poids Q, demeure en équilibre avec elles.*

SOLUTION.

I. Il est démontré (*Th.* 21. *part.* 3.) que pour cela il faut que des trois puissances P, R, Q, (en appellant aussi de ce nom le poids Q) la somme de deux quelconques soit plus grande que la troisiéme de ces puissances ; ou du moins que P+R soit =Q, lorsque son point G de suspension est entre E & F, comme dans la Fig. 338. ou enfin que R—P soit =Q, lorsque F est entre E & G, comme dans la Fig. 339.

Cas de G entre E & F, comme dans la Fig. 338.

Fig. 338. II. Dans ce cas de la Fig. 338. outre P+R=Q, la possibilité du Problême exige encore (*Th.* 21. *Corol.* 13.) P.R :: FG. EG. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux

puiſſances P, R, des directions EP, ER, paralleles & contraires à celle du poids Q, pour le mettre (*Th.* 21. *Corol.* 13.) en équilibre avec ces deux puiſſances. *Ce qu'il falloit* 1°. *faire & démontrer.*

III. Dans le même cas de la Fig. 338. lorſque des trois puiſſances P, R, Q, la ſomme de deux quelconques eſt plus grande que la troiſiéme, ſoit dans les Fig. 340. 341. une verticale MA, c'eſt-à-dire, parallele à la direction GQ du poids Q; ſur une partie quelconque AD de cette verticale ſoit fait un triangle ABD, dont les côtez AB, BD, ſoient à AD, comme les puiſſances données P, R, ſont au poids donné Q. Enſuite après avoir achevé le parallelogramme ABDC, & prolongé les côtez AB, AC, vers P, R, ſoit priſe BH vers P ſur AP, telle qu'on ait AB. BH :: FG. GE. Du point H par D ſoit menée la droite HDK, laquelle rencontre AR en K, & rende ainſi (à cauſe des paralleles BD, AR,) KD. DH :: AB. BH (*conſtr.*) :: FG. GE. Cela fait, FIG. 338. 340. 341.

1°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. eſt égale à la longueur EF du Levier de la Fig. 338. placé en HK, il aura en D ſon point G, d'où pendra le poids Q ſuivant DA; & ſes points E, F, en H, K, où les puiſſances P, R, lui ſeront appliquées ſuivant AP, AR. Donc puiſque (*conſtr.*) ces puiſſances P, R, & ce poids Q, ſont entre-eux comme AB, BD, AD, c'eſt-à-dire (à cauſe du parallelogramme ABDC) comme AB, AC, AD; les deux puiſſances P, R, appliquées ſuivant HP, KR, aux extrêmitez du Levier EF de la Fig. 338. placé ici en HK, y demeureront (*Th.* 21. *part.* 6.) en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q en ſon point G. *Ce qu'il falloit* 2°. *faire & démontrer.*

2°. Si la droite HK des Fig. 340. 341. eſt plus longue ou plus courte que le Levier FE de la Fig. 338. ſoit priſe KL=FE, ſur cette même KH prolongée, s'il eſt eſt neceſſaire, du côté de H; de ſon point L ſoit faite Le parallele à AR, & qui rencontre AP en *e*; duquel point ſoit *ef* parallele à HK, & qui rencontre AM, AR, en G, *f*.

je dis que cette droite fe = KL (*constr.*) = au Levier FE de la Fig. 338. sera la position requise de ce Levier dans les Figures 340. 341. lequel y étant ainsi placé, aura ses points F, E, G, en f, e, G, & son poids Q dirigé suivant DA. Donc puisque (*constr.*) les puissances P, R, & ce poids Q, sont entr'eux comme AB, BD, AD, c'est-à-dire (à cause du parallelogramme ABDC) comme AB, AC, AD; les puissances P, R, appliquées suivant eP, fR, aux extrêmitez e, f, ou E, F, du Levier EF placé en ef, le soûtiendront alors en équilibre avec son poids Q. *Ce qu'il falloit* 3°. *faire & démontrer.*

Cas de F entre E & G, comme dans la Fig. 339.

Fig. 339. IV. Dans ce cas de la Fig. 339. lorsque R—P=Q, la possibilité du Problême exige de plus (*Th.* 21. *Corol.* 13.) P.R : : GF. GE. Cela étant, il n'y aura qu'à donner aux puissances P, R, des directions paralleles à celle GQ du poids Q, desquelles directions celle de R soit contraire aux deux autres : alors ce poids donné Q se trouvera (*Th.* 21. *Cor.* 13.) en équilibre avec les deux puissances P, R. *Ce qu'il falloit* 4°. *faire & démontrer.*

Fig. 339. 342. 343. V. Dans le même cas de la Fig. 339. lorsque des trois puissances P, R, Q, la somme de deux quelconques est plus grande que la troisiéme, soit aussi dans les Fig. 342. 343. comme dans les Fig. 340. 341. de l'art. 3. une verticale ou parallele MA à la direction GQ du poids Q; sur une partie quelconque AD de cette verticale, soit aussi fait un triangle ACD, dont les côtez CD, CA, soient à cette partie arbitraire AD, comme les puissances données P, R, sont au poids donné Q. Ensuite après avoir achevé le parallelogramme ABCD, & prolongé ses côtez AD, AB, vers Q, P, avec sa diagonale CA vers R, soit prise AH sur AP, telle qu'on ait AB. AH : : GF. GE. Du point H par C soit la droite HCK, laquelle rencontre AQ en K, & rend ainsi (à cause des paralleles BC, AQ) KC. KH : : AB. AH (*constr.*) : : GF. GE. Cela fait,

1°. Si la droite HK des Fig. 342. 343. est égale à la longueur EG du Levier de la Fig. 339. ce Levier GE placé en KH, aura en C son point F, où la puissance R lui sera appliquée suivant CR; & les deux autres points E, G, en H, K, où la puissance P, & le poids Q, lui seront appliquez suivant AP, AQ. Donc puisque les puissances P, R, & ce poids Q, sont entr'eux comme CD, CA, AD, c'est-à-dire (à cause du parallelogramme ABCD) comme AB, AC, AD: les deux puissances P, R, ainsi appliquez suivant HP, CR, aux points E, F, du Levier GE de la Fig. 339. qui placé ici en KH, les aura en H, C, y demeureront en équilibre avec ce Levier chargé du poids Q suivant la verticale MA prolongée vers K, dans laquelle sera son point G de suspension. *Ce qu'il falloit* 5°. *faire & démontrer.*

2°. Si la droite KH des Fig. 342. 343. est plus longue ou plus courte que ce Levier GE de la Fig. 339. soit prise KL=GE, sur cette même KH prolongée, s'il est necessaire; de son point L soit faite L*e* parallele à AQ, & qui rencontre AP en *e*, duquel point soit *e*G parallele à HK, & qui rencontre MA, RC, prolongées en G, *f*. Je dis que cette droite *e*G=LK (*constr.*) = au Levier EG de la Fig. 339. sera la position requise de ce Levier dans les Fig. 342. 343. lequel y étant ainsi placé, aura ses points G, F, E, en G, *f*, *e*, des Fig. 342. 343. son poids Q appliqué en G suivant AD, & les puissances R, P, appliquées suivant CA, AB, en *f*, *e*, où seront les points F, E, de ce Levier GE placé en G*e*. Donc puisque ces puissances P, R, & ce poids Q, sont entr'eux (*constr.*) comme DC, CA, AD, c'est-à-dire (à cause du parallelogramme ABCD) comme AB, AC, AD, ces deux puissances P, R, & ce poids Q, ainsi appliquez au Levier GE de la Fig. 339. placé en G*e* dans les Fig. 342. 343. y demeureront (*Th.* 21. *part.* 6.) en équilibre entr'eux. *Ce qu'il falloit* 6°. *faire & démontrer.*



PROBLEME X.

Fig. 344. *Quatre puissances P, Q, R, K, étant données en raison des lignes AB, AC, AE, AD, les appliquer à autant de cordons réunis ensemble par un même nœud, & les diriger de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

De deux quelconques AB, AC, des quatre lignes proportionnelles aux quatre puissances données, soit fait le parallelogramme ABFC, dont la diagonale AF soit moindre que la somme des deux autres proportionnelles AE, AD. Soient ensuite des centres A, F, & des rayons AD, AE, deux arcs de cercles qui se coupent en D dans le plan du parallelogramme ABFC, ou hors de ce plan, il n'importe. Après cela menez AD, FD, avec AR parallele à FD, & prolongez DA vers K.

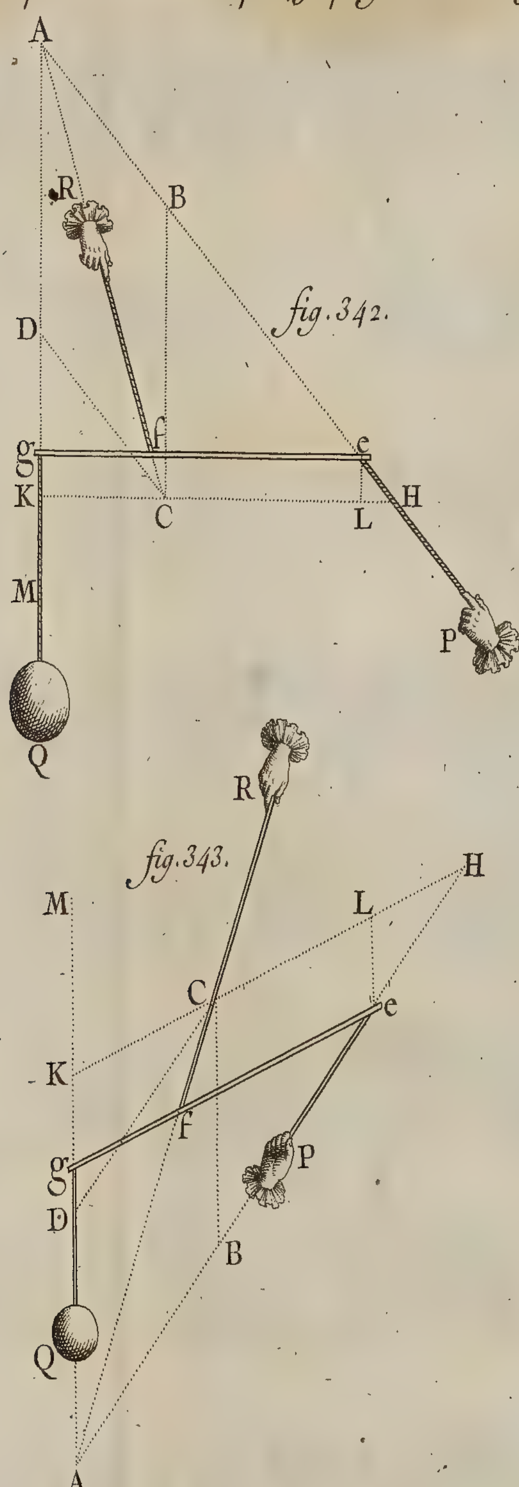
Cela fait, je dis que si l'on met en A le nœud commun des quatre cordons, & qu'on les dirige suivant AB, AC, AR, AK, les quatre puissances données P, Q, R, K, appliquées à ces quatre cordons AP, AQ, AR, AK, ainsi dirigez, demeureront en équilibre entr'elles. *Ce qu'il falloit faire.*

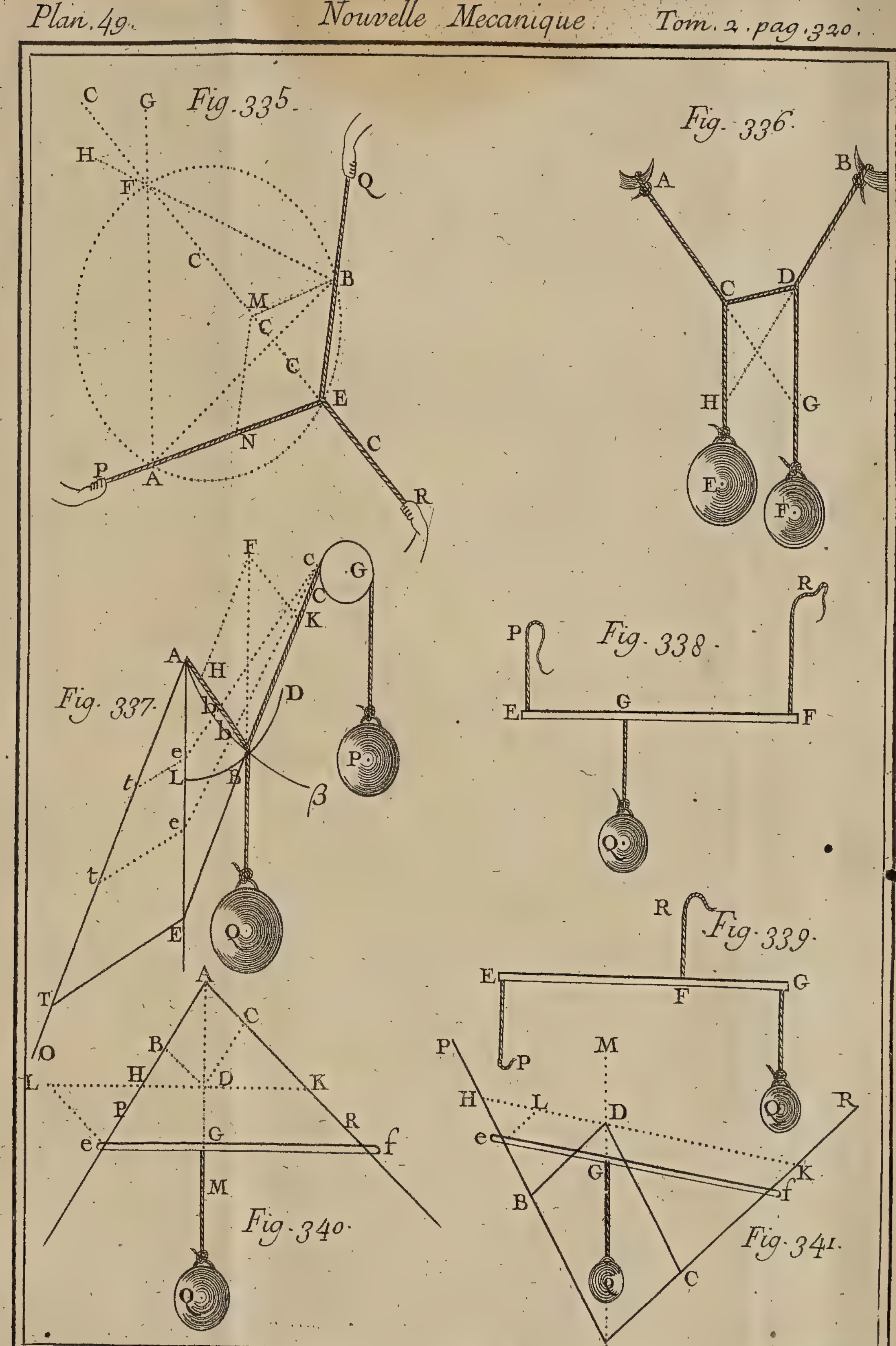
DEMONSTRATION.



Soit menée DE parallele à AF, & qui rencontre en E la droite AR déja (*Hyp.*) parallele à FD; ce qui forme le parallelogramme AEDF. La construction precedente rendant les lignes AB, AC, AE, AD, en raison des puissances données P, Q, R, K, & appliquées suivant ces lignes; le parallelogramme AEDF fait de la proportionnelle AE, & de la diagonale AF du parallelogramme ABFC fait des deux proportionnelles AB, AC, sera ici le dernier des parallelogrammes faits comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la démonstration de la partie 2. du Theoreme 4. & la puissance K sera ici aux trois autres

P,


A
R
B
fig. 342.
D
g
f
e
K
C
L
H
M
P
Q
R
fig. 343.
M
L
H
C
e
K
f
g
P
D
B
Q
A


Fig. 335.
C
G
H
F
C
M
B
Q
C
C
E
N
A
P
C
R
Fig. 336.
A
B
C
D
H
G
E
F
Fig. 337.
F
c
G
C
K
A
H
b
b
D
e
L
B
β
t
e
t
E
T
O
P
Q
Fig. 338.
P
R
E
G
F
Q
Fig. 339.
R
E
F
G
P
Q
Fig. 340.
A
C
B
L
H
D
K
P
R
e
G
f
M
Q
Fig. 341.
P
M
H
L
D
R
e
K
G
f
B
Q
C
A

P, Q, R, comme la diagonale AD de ce dernier parallelogramme, eſt à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th. 4. part. 2.*) il y aura ici équilibre entre toutes ces quatre puiſſances. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SCHOLIE.

Il eſt viſible que ſi l'on prend le point D au dehors du plan BAC, alors AE parallele (*conſtr.*) à DF, ſera auſſi hors de ce plan ; & conſequemment AD proportionnelle à la puiſſance K, ſera pour lors la diagonale d'un parallelepipede BACFDGEH, qui aura pour côtez les proportionnelles des trois autres puiſſances P, Q, R : ainſi cette puiſſance K ſera pour lors à chacune de celles-ci, comme la diagonale AD de ce parallelepipede eſt à chacun de ſes côtez AB, AC, AE, qui leur répondent. Par conſequent ces quatre puiſſances données K, P, Q, R, étant ici (*conſtr.*) dirigées ſuivant ces quatre lignes AD, AB, AC, AE ; ce leur ſera encore (*Th. 4. Corol. 2. nomb. 3.*) une nouvelle raiſon d'être ici toutes en équilibre entr'elles, ainſi qu'il étoit requis.

PROBLEME XI.

Des quatre puiſſances à appliquer à quatre cordons retenus enſemble par un même nœud, une quelconque K étant donnée avec ſa direction AK, trouver les trois autres avec leurs directions telles que ces quatre puiſſances faſſent équilibre entr'elles, & que les trois demandées ayent leurs trois directions perpendiculaire chacune à chacune des deux autres. FIG. 345.

SOLUTION.

Sur la direction donnée AK prolongée vers D, ſoit priſe depuis le nœud A des cordes, vers ce point D, une partie quelconque AD, autour de laquelle, comme diagonale, ſoit fait un parallelogramme rectangle quelconque AEDF, dont le côté AF ſoit de même la diagonale d'un autre parallelogramme auſſi rectangle quelconque

ACFB fait sur un plan perpendiculaire à celui du precedent parallelogramme AEDF.

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant AB, AC, AE, les cordons des trois puissances demandées, & que suivant ces directions AP, AQ, AE, on leur applique trois puissances P, Q, R, qui soient à la donnée K, comme les côtez correspondans AB, AC, AE, des parallelogrammes CB, EF, sont à la diagonale AD du second EF ; ces trois puissances P, Q, R, seront les trois demandées, & leurs directions AP, AQ, AR, seront aussi les trois requises, c'est-à-dire (ainsi qu'on le demande) que,

I. Ces trois puissances P, Q, R, ainsi dirigées, feront équilibre avec la donnée K de direction donnée AK ; &,

II. Chacune des trois directions AP, AQ, AR, de ces trois puissances P, Q, R, sera perpendiculaire à chacune des deux autres.

DEMONSTRATION.

PART. I. Cette part. 1. se demontrera de même que la solution du precedent Problême 10. car puisque (*solut.*) les puissances P, Q, R, K, sont entr'elles en raison des lignes AB, AC, AE, AD, suivant lesquelles elles sont appliquées au nœud commun A de leurs cordons ainsi dirigez ; le parallelogramme AEDF fait de la proportionnelle AE, & de la diagonale AF du parallelogramme ABFC fait des deux proportionnelles AB, AC, sera ici le dernier des parallelogrammes fait comme dans le Corol. 10. du Lem. 2. ou comme dans la demonstration de la part. 2. du Th. 4. & la puissance donnée K suivant AK, sera ici aux trois autres P, Q, R, comme la diagonale AD (en ligne droite avec AK) de ce dernier parallelogramme AEDF, est à leurs proportionnelles AB, AC, AE. Donc (*Th. 4. part. 2.*) il y aura ici équilibre entre ces quatre puissances. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

PART. II. Il s'agit presentement de faire voir que chacune des trois directions AP, AQ, AR, est perpendiculaire à chacune des deux autres : ce qui est aisé ; car il est

déja évident que les deux AP, AQ, ſont perpendiculaires entr'elles ; puiſque (*ſolut.*) le parallelogramme CB eſt rectangle. Il ne reſte donc plus qu'à faire voir que la direction AR eſt auſſi perpendiculaire à chacune de ces deux AP, AQ : ce qui eſt encore évident, car puiſque les parallelogrammes CB, EF, ſont (*ſolut.*) en plans perpendiculaires entr'eux, & que le ſecond EF eſt rectangle, ſon côté AE perpendiculaire à leur ſection commune AF, le ſera auſſi à chacun des côtez AB, AC, de l'autre parallelogramme CB. Donc chacun de ces trois côtez AB, AC, AE, de ces deux parallelogrammes CB, EF, eſt perpendiculaire à chacun des deux autres ; & conſequemment chacune des trois directions AP, AQ, AR, des trois puiſſances P, Q, R, dirigées (*ſolut.*) ſuivant ces trois côtez AB, AC, AE, eſt auſſi perpendiculaire à chacune des deux autres. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PROBLEME XII.

Toutes choſes étant ici les mêmes que dans le précedent Problême 11. *excepté qu'on veut ici que les trois puiſſances qui y ſont demandées, ſoient égales entr'elles : on demande ici ces trois puiſſances égales avec leurs trois directions, telles que ces trois puiſſances y faſſent équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & que chacune de ces trois directions y ſoit encore perpendiculaire à chacune des deux autres.* FIG. 346.

SOLUTION.

D'un diametre AD pris à volonté depuis le nœud A des quatre cordons ſur le prolongement vers D de la direction donnée AK de la puiſſance donnée K, ſoit fait un demi-cercle AFD rencontré en F par une perpendiculaire GF à ce diametre, menée de l'extrêmité G de ſa partie $AG = \frac{2}{3} AD$; menez-y les cordes AF, DF : & après avoir achevé le parallelogramme rectangle AFDE, ſoit ſon côté AF la diagonale d'un quarré CB fait dans un plan perpendiculaire à celui de ce parallelogramme EF.

Cela fait, je dis que si l'on dirige suivant AB, AC, AE, les cordons AP, AQ, AR, des trois puissances demandées, & que suivant ces directions on leur applique trois puissances égales P, Q, R, dont chacune soit à la donnée K, comme AB à AD; ces trois puissances P, Q, R, seront les demandées, qui ainsi dirigées, feront ensemble équilibre avec la donnée K de direction donnée AK, & auront aussi chacune de leurs trois directions AP, AQ, AR, perpendiculaire aux deux autres: le tout ainsi qu'on le demande.

DEMONSTRATION.

Pour voir tout cela, il faut d'abord demontrer que les trois côtez AB, AC, AE, des parallelogrammes CB, EF, sont ici égaux entr'eux. Pour cela il faut considerer que puisque (*solut.*) $AG = \frac{2}{3} AD$, l'on aura $\overline{AF}^2 = \frac{2}{3}\overline{AD}^2$, & $\overline{DF}^2 = \frac{1}{3}\overline{AD}^2$: ainsi le quarré CB rendant $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2$, & $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2$, l'on aura pareillement ici $\overline{AB}^2 = \frac{1}{3}\overline{AD}^2$, & $\overline{BF}^2 = \frac{1}{3}\overline{AD}^2$. Donc $\overline{AB}^2 = \overline{BF}^2 = \overline{DF}^2$; & consequemment $AB = BF = DF$. Or les parallelogrammes (*solut.*) CB, EF, rendent $BF = AC$, & $DF = AE$. Donc aussi $AB = AC = AE$. Or (*solut.*) chacune des trois puissances égales P, Q, R, est à la donnée K, comme AB à AD. Donc ces trois puissances P, Q, R, sont à cette donnée K, comme les trois côtez correspondans des parallelogrammes CB, EF, sont à la diagonale AD du dernier EF. Par consequent les plans de ces deux parallelogrammes CB, EF, se coupant ici (*solut.*) perpendiculairement en EE comme dans la solution du precedent Probl. 11. Fig. 345. l'on démontrera ici comme là que ces trois puissances égales P, Q, R, feront ensemble équilibre ici avec la donnée K, & suivant des directions AP, AQ, AR, dont chacune sera perpendiculaire aux autres. *Ce qu'il falloit ici démontrer.*

PROBLEME XIII.

En general tant de puissances qu'on voudra P, Q, R, S, T, K, &c. étant données en raison des lignes quelconques AB, AC, AE, AF, AG, AD, &c. les appliquer à autant de cordons, & les diriger de maniere qu'elles fassent toutes équilibre entr'elles. FIG. 347.

SOLUTION.

D'un point quelconque A soient menées à volonté, c'est-à-dire, suivant tels angles, & suivant tels plans qu'on voudra, autant de lignes (moins deux) qu'il y a de puissances données ; sçavoir, AP, AQ, AR, AS, &c. sur deux quelconques AP, AQ, de ces lignes soient prises deux quelconques AB, AC, des proportionnelles données aux puissances proposées : après en avoir fait le parallelogramme BACM de sa diagonale AM, & d'une troisiéme proportionnelle quelconque AE, prise sur une troisiéme quelconque AR des lignes menées du point A, soit aussi fait le parallelogramme MAEH ; de la diagonale AH de ce parallelogramme, & d'une quatriéme proportionnelle AF donnée, prise sur une quatriéme quelconque AS des lignes menées du point A, soit pareillement fait le parallelogramme HAFL ; & ainsi de suite jusqu'à la derniere inclusivement des lignes d'abord menées du point A, c'est-à-dire (*constr.*) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux des proportionnelles aux puissances données, sçavoir, AG, AD. Après sur la diagonale par A du dernier des parallelogrammes ainsi faits, c'est-à-dire, ici sur AL, soit fait le triangle ADL, dont les côtez LD, AD, soient égaux aux deux proportionnelles restantes AG, AD, sçavoir, en faisant des centres L, A, & de rayons égaux à ces deux proportionnelles restantes AG, AD, deux arcs de cercles qui se coupent en D dans un plan quelconque ; soit ensuite menée AT parallele à LD, & AK sur DA prolongée vers K.

Cela fait, je dis que si l'on met le nœud commun des

cordes en A, & qu'après les avoir dirigées ſuivant AP, AQ, AR, AS, AT, AK, &c. on leur applique les puiſſances données P, Q, R, S, T, K, &c. Toutes ces puiſſances ainſi dirigées demeureront en équilibre entr'elles ſur le nœud commun de leurs cordons. *Ce qu'il falloit faire.*

DEMONSTRATION.

Suivant la conſtruction précedente (en achevant le parallelogramme ALDG) les lignes AB, AC, AE, AF, AG, AD, &c. dans les parallelogrammes précedens ſont entr'elles comme les puiſſances données P, Q, R, S, T, K, &c. Et ALDG eſt ici le dernier de ces parallelogrammes, en qui la puiſſance K eſt ainſi à chacune des autres P, Q, R, S, T, comme la diagonale AD de ce dernier ALDG de tous ces parallelogrammes eſt à chacun de leurs côtez AB, AC, AE, AF, AG, correſpondans ſur les directions de ces puiſſances. Donc (*Th.* 4. *part.* 4.) ces puiſſances ainſi dirigées, ſeront ici toutes en équilibre entr'elles; & ainſi de tel autre nombre qu'on pût ainſi propoſer. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

I. On voit que s'il n'y avoit ici que trois puiſſances données L, T, K, il n'y auroit qu'à faire le triangle ALD, dont les trois côtez AL, LD, AD, fuſſent entr'eux comme ces trois puiſſances; à mener enſuite AT parallele à LD, & à prolonger DA vers K: les trois puiſſances données L, T, K, appliquées à trois cordons attachez enſemble par un nœud commun, & dirigées ſuivant AL, AT, AK, demeureroient en équilibre entr'elles ſuivant ces directions, conformément à la ſolution du Probl. 2.

II. S'il n'y avoit que quatre puiſſances données H, S, T, K, il n'y auroit qu'à faire d'un angle quelconque HAF le parallelogramme AHLF, dont les côtez AH, AF, fuſſent entr'eux comme deux quelconques H, S, des puiſſances données: enſuite ſur la diagonale AL de ce pa-

rallelogramme, faire le triangle ALD, dont les côtez LD, DA, fussent à AF comme les deux autres puissances données T, K, sont à la puissance F : après cela mener AT parallele à LD, & prolonger DA vers K. Cela fait, il suit de la solution précedente que les quatre puissances données H, S, T, K, étant appliquées à autant de cordons d'une même corde, dirigez suivant AH, AS, AT, AK, y demeureront en équilibre entr'elles comme les quatre du précedent Probl. 10. & ainsi de tel autre plus grand nombre qu'on voudra de puissances données quelconques.

COROLLAIRE II.

De ce que les directions, moins deux, des puissances données en plus grand nombre que trois, ont été prises arbitrairement dans la solution précedente ; & de ce que ces directions arbitraires (moyennant les proportionnelles prises sur elles) déterminent les deux restantes dans cette solution : il suit de cette même solution que les mêmes puissances données en raisons quelconques, peuvent faire équilibre entr'elles suivant une infinité de directions differentes pour chacune. Puisque quelles qu'on les prenne, moins deux, elles détermineront toûjours ces deux-là, & differentes en autant de manieres qu'elles le seront elles-mêmes, sans cependant empêcher les puissances données en plus grand nombre que trois, de faire équilibre dans toutes ces directions, ainsi que le prouve l'assomption arbitraire de celles-là dans la solution précedente. Mais dès qu'il ne s'agit que de trois puissances données, le Corol. du Th. 1. le Probl. 2. & l'art. 1. du précedent Corol. 1. prouvent qu'elles ne peuvent ainsi faire équilibre entr'elles, que suivant une seule direction chacune.

SCHOLIE.

Il est à remarquer que quelques arbitraires que soient (*solut. & Corol. 2.*) les directions de plus de trois puissances données qu'on veut mettre en équilibre entr'elles en

les appliquant ſeulement à autant de cordons attachez enſemble par un nœud commun ; cette liberté de varier ces directions a cependant des limites que voici dans les articles ſuivans.

1°. Si les cordons de directions données ſont en même plan, ils doivent être répandus en plus d'un demi-cercle, dont le centre ſoit le nœud commun des cordons, autrement l'équilibre ſeroit impoſſible. (*Corol.* 2. *Lem.* 4.)

2°. Si les cordons de directions données ne ſont pas en même plan, ils doivent être répandus en plus d'une demi-ſphere, dont le centre ſoit le nœud commun des cordons. (*Corol.* 2. *Lem.* 4.)

PROBLEME XIV.

Fig. 348. 349. *Les directions AB, AC, AD, AE, de quatre quatre cordons attachez enſemble par un ſeul nœud A, étant données ; trouver quatre puiſſances B, C, D, E, qui appliquées à ces quatre cordons, feroient équilibre entr'elles ſuivant ces directions données.*

SOLUTION.

Je dis que ce Problême peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impoſſible. Car ou les quatre cordons de directions données ſont en plans differens, ou tous en même plan. Or je vas faire voir que dans le premier de ces deux cas le Problême eſt toûjours déterminé ou impoſſible, & que dans le ſecond il eſt toûjours indéterminé ou impoſſible. Donc, &c. Voici la démonſtration de ces deux dernieres propoſitions avec la ſolution du Problême lorſqu'il eſt poſſible.

CAS

CAS I.

Lorſque les quatre cordons de directions données, ſont en plans differens, le Probleme eſt toûjours déterminé ou impoſſible.

Voici la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les quatre cordons de directions données en plans differens, ſont répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun ſoit le centre; le Problême eſt toûjours poſſible.

II. Qu'alors il eſt toûjours déterminé.

III. Que lorſque ces quatre cordons de directions données en differens plans, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere; le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Puiſque (*Hyp.*) les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, ſont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun A eſt le centre; & que ſi deux ou trois de ces cordons étoient dans un plan, & les deux autres ou le quatriéme hors de ce plan d'un ſeul côté de lui, ils ne ſeroient tous répandus que dans une demi-ſphere terminée par ce plan de deux ou trois cordons: il eſt manifeſte que les quatre ne peuvent être ici que deux à deux dans chaque plan, & de maniere (*Lem.* 5. *part.* 3.) que le plan de deux de ces cordons, prolongé par de-là leur nœud commun A, paſſera toûjours ici à travers l'angle que les deux autres cordons y font entr'eux. Donc le plan BAE des deux cordons AB, AE, doit paſſer ici par de-là le nœud A, à travers l'angle CAD que les deux autres cordons AC, AD, font entr'eux; & reciproquement le plan CAD de ces deux-ci doit paſſer de même à travers l'angle BAE des deux autres: de ſorte que la ſection commune RAP de ces deux plans BAE, CAD, diviſera toûjours ici chacun des deux angles de ces noms en quelque rapport déterminé que ce ſoit. Cela poſé,

SOLUTION I.

Fig. 348. D'un point quelconque F pris à volonté depuis A vers P sur la droite RAP, dans l'angle CAD : soient menées trois autres droites FK, FL, FG, paralleles à AD, AC, AE, déterminées (*Hyp.*) de position. Les deux premieres FK, FL, formeront sur le plan CAD un parallelogramme ALFK, dont la diagonale AF prise (*Hyp.*) à volonté, & déterminée aussi (*Hyp.*) de position, déterminera de grandeur les côtez AK, AL, sur AC, AD; & la troisiéme FG dans le plan BAE, déterminera aussi de grandeur AG sur BA prolongée vers Q : de sorte que GH parallele à AE, déterminera pareillement AH de grandeur sur AE. Donc on aura ainsi AK, AL, AG, AH, déterminées non seulement (*Hyp.*) de position, mais aussi de grandeur; & par consequent les rapports de ce quatre lignes entr'elles, seront ainsi déterminez & connus.

Cela étant; je dis que si l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions données, autant de puissances B, C, D, E, qui soient entr'elles dans les rapports connus des lignes correspondantes AG, AK, AL, AH; ces quatre puissances ainsi dirigées feront équilibre entr'elles, & retiendront ainsi en repos (les unes contre les autres) le nœud libre A, qui tient tous leurs cordons attachez ensemble.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) les deux puissances C, D, sont entr'elles comme les côtez correspondans AK, AL, du parallelogramme KL, il resultera (*Lem.* 2.) de leur concours d'action sur le nœud A une force ou impression de A vers P suivant AP ou AF, laquelle sera à chacune de ces deux puissances C, D, comme cette diagonale AF du parallelogramme KL, est à chacun de ses côtez correspondans AK, AL : de sorte que si l'on appelle P cette nouvelle force suivant AF ou AP, l'on aura ici P. C : : AF. AK. Or (*Hyp.*) C. E : : AK. AH. Donc P. E : : AF. AH. c'est-à-

dire, les deux forces P, E, entr'elles comme les côtez correspondans AF, AH, du parallelogramme AFGH. Donc (*Lem. 2.*) du concours d'action de ces deux forces P, E, sur le nœud A, il lui en resultera aussi une de A vers G suivant la diagonale AG du parallelogramme FH, laquelle sera à chacune de ces deux-là P, E, comme cette diagonale AG à chacun des côtez correspondans AF, AH: de sorte qu'en appellant aussi Q cette nouvelle force suivant AG ou AQ, l'on aura ici Q. E :: AG. AH. Donc ayant aussi (*Hyp.*) B. E :: AG. AH. l'on aura ici les deux forces Q, B, égales entr'elles: ainsi ces deux forces étant (*Hyp.*) directement opposées, elles feront équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force Q suivant AG, est l'effort que les deux puissances E, P, font ensemble sur le nœud A contre la puissance B. Donc ces trois puissances E, F, B, seront pareillement ici en équilibre entr'elles. Or on vient de voir aussi que la force P suivant AF, est l'effort que les deux puissances C, D, font ensemble sur le nœud A contre les deux puissances E, B. Donc les quatre puissances B, C, D, E, seront ici en équilibre entr'elles suivant les directions données AB, AC, AD, AE. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

SOLUTION II.

Les directions des quatre cordons AB, AC, AD, AE, étant données ici les mêmes que dans la precedente solut. 1. la section commune RAP des deux plans BAE, CAD, donnez (*Hyp.*) de position, sera aussi de position déterminée ici comme là dans l'un & dans l'autre de ces deux plans, aussi-bien que (*Hyp.*) les directions AB, AE, dans le premier BAE; & AC, AD, dans le second CAD: de sorte que cette section commune RAP divisera ici comme là chacun des angles BAE, CAD, en quelque rapport déterminé que ce soit. Donc en prenant de part & d'autre depuis A vers P, R, deux parties égales quelconques AF, AM, sur cette section commune RAP, autour desquelles (comme diagonales) soient faits deux pa- FIG. 349.

rallelogrammes KL sur le plan CAD, & GH sur le plan BAE; leurs côtez AK, AL, AH, AG, qui sont autant de parties des directions AC, AD, AE, AB, de positions (*Hyp.*) déterminées, seront aussi déterminez de grandeur; & consequemment entr'eux en des rapports déterminez & connus.

Je dis presentement que si l'on applique aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, donnez (*Hyp.*) de position, autant de puissances B, C, D, E, qui soient entr'elles comme les quatre côtez connus AG, AK, AL, AH, des deux parallelogrammes GH, KL; ces quatre puissances seront encore ici en équilibre entr'elles suivant ces directions données.

DEMONSTRATION.

Le Lemme 1. fait encore voir que du concours d'action des deux puissances C, D, sur le nœud A, il resultera à ce nœud une force ou impression de A vers F suivant AF, équivalente à ce concours d'action de ces deux puissances sur ce nœud A, laquelle force suivant AF sera à chacune de ces deux puissances C, D, comme cette diagonale AF du parallelogramme KL, sera à chacun de ses côtez correspondans AK, AL: & que du concours d'action des deux autres puissances B, E, sur le même nœud A, il resultera pareillement à ce nœud une force ou impression de A vers M suivant AM, équivalente aussi à ce concours d'action de ces deux autres puissances sur ce nœud A, laquelle force suivant AM sera de même à chacune de ces deux puissances B, E, comme cette diagonale AM du parallelogramme GH, sera à chacun de ses côtez correspondans AG, AH. Donc si ces deux forces ou impressions directement contraires suivant AF ou AP, & suivant AM ou AR, l'on appelle la premiere P, & la seconde R; l'on aura ici P. C :: AF. AK. Et B. R :: AG. AM. avec (*Hyp.*) C. B : AK. AG. Ce qui (en multipliant par ordre) donnera P. R :: AF. AM. De sorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AF égale à AM, & en ligne droite avec elle, l'on

y aura aussi les forces P, R, égales entr'elles, & directement opposées l'une à l'autre. Donc elles seront ici en équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la force P suivant AF est l'effort que les deux puissances C, D, font ensemble sur le nœud A; & que la force R suivant AM, est pareillement l'effort que les deux autres puissances B, E, font aussi ensemble sur le même nœud A. Donc l'effort que les deux puissances C, D, font ensemble sur le nœud A, est ici égal & directement opposé à l'effort que les deux autres puissances B, E, font aussi ensemble sur ce nœud. Par consequent ces quatre puissances B, C, D, E, seront encore ici en équilibre entr'elles suivant les directions données AB, AC, AD, AE. *Ce qu'il falloit encore trouver & démontrer.*

PART. II. Telle est (*part.* 1.) la possibilité & la solution du Problême proposé, lorsque les quatre cordons de directions données en differens plans, sont répandus en plus d'une demi-sphere. Je dis presentement que ce Problême est alors déterminé aux rapports des puissances que l'on y vient d'assigner.

DEMONSTRATION.

On vient de voir au commencement de la part. 1. que les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données, sont en deux plans differens BAE, CAD, dont la section commune RAP divise toûjours chacun des angles BAE, CAD; & que ces deux plans étant ainsi donnez de position l'un par rapport à l'autre, cette section commune RAP, qu'ils font entr'eux, est aussi déterminée de position par rapport aux côtez AB, AE, AC, AD, de ces deux angles, lesquels sont ainsi divisez par elle en parties déterminées, qui consequemment déterminent les rapports des diagonales AF, AG, aux côtez de leurs parallelogrammes KL, FH, dans la part. 1. solut. 1. Fig. 348. ou des diagonales AF, AM, aux côtez de leurs parallelogrammes KL, GH dans la même part. 1. solut. 2. Fig. 349. Donc ces directions AB, AC, AD, AE, don- Fig. 348. 349.

nées (*Hyp.*) les mêmes dans l'une & dans l'autre de ces deux ſolutions, y déterminent ainſi les rapports de leurs parties (employées à ces parallelogrammes) AG, AK, AL, AH, à être toûjours les mêmes pour les mêmes directions. Par conſequent ces rapports étant (*part.* 1. *ſolut.* 1. 2.) les requis des quatre puiſſances B, C, D, E, qu'on vient de démontrer (*part.* 1.) devoir faire équilibre entr'elles ſuivant ces quatre directions données AB, AC, AD, AE; les quatre puiſſances propres à faire équilibre entr'elles ſuivant ces directions, ſeront toûjours déterminées à ces mêmes rapports, tant que ces directions ſeront les mêmes. Donc ce cas 1. de la queſtion propoſée, eſt un Problême déterminé aux rapports des puiſſances qu'on vient d'aſſigner (*part.* 1. *ſolut.* 1. 2.) pour faire équilibre entr'elles ſuivant les directions données, ſans qu'aucun autre rapport de puiſſances ainſi dirigées y puiſſe ſatisfaire: ces rapports des quatre grandeurs AG, AK, AL, AH, proportionnelles aux quatre puiſſances B, C, D, E, requiſes pour cela, étant les mêmes dans les ſolut. 1. 2. de la part. 1. dans leſquelles, ſi l'on prend AF la même de part & d'autre, ces quatre grandeurs ſeront auſſi les mêmes. Donc en ce cas-ci de quatre cordons de directions données, & répandus en plus d'une demi-ſphere, dont leur nœud commun eſt le centre, le Problême eſt toûjours déterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. Cette part. 3. eſt que lorſque les quatre cordons de directions données en differens plans, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere; le Problême eſt impoſſible. Cela ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CAS II.

Lorsque les quatre cordons de directions données sont tous en mesme plan, le Probleme est toûjours indéterminé ou impossible.

Voici aussi la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les quatre cordons de directions données en même plan, sont répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême est toûjours possible.

II. Qu'alors il est toûjours indéterminé.

III. Et que lorsque les quatre cordons de directions données en même plan, ne sont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême est toûjours impossible.

Part. I. Pour ne pas multiplier inutilement les Figures, supposons presentement que les quatre cordons AB, AC, AD, AE, des Fig. 348. 349. regardées ci-dessus (*cas* 1.) comme en plans differens, sont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Suivant cette hypothese, la ligne RAP, qui étoit-là une section commune de deux plans, ne sera plus ici qu'une simple ligne droite, laquelle y soit menée au hazard sur le plan des cordons par leur nœud commun A, à travers quelqu'un BAE de leurs angles, sans passer le long d'aucun de ces cordons. la part. 2. du Lem. 5. fait voir que cette droite RAP divisera encore quelqu'autre angle CAD de ces mêmes cordons; & la part. 1. du même Lem. 5. fait pareillement voir que chacun de ces cordons prolongé par de-là leur nœud commun A, par exemple, BA prolongé vers Q dans la Fig. 348. divisera aussi quelqu'un DAE de leurs angles. Fig. 348. 349.

SOLUTION.

1°. Cela posé, si dans la presente hypothese des Fig. 348. 349. l'on fait en même plan les parallelogrammes

KL, FH, dans la Fig. 348. & KL, GH, dans la Fig. 349. de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans les solut. 1. 2. de la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données, autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, qui soient encore ici entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, AH, de leurs directions: on démontrera ici que ces quatre puissances y demeureront en équilibre entr'elles suivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle : comme on a démontré là que les quatre puissances qu'on y a assignées, y devoient demeurer en équilibre suivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-sphere. Donc le Problême est toûjours possible ici comme là. *Ce qu'il falloit* 1°. *trouver & démontrer.*

FIG. 350. 2°. Si l'on veut que deux des quatre cordons de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, par exemple, les deux AC, AE, soient ici en ligne droite CE, qui divise (*Lem.* 5. *part.* 1.) l'angle BAD, que les deux autres AB, AD, font entr'eux : il n'y a qu'à faire sur une partie quelconque AK de AC, comme diagonale, un parallelogramme GL de côtez AG, AL, pris sur AB, AD; & après avoir ajoûté à cette diagonale AK une partie quelconque KH du même cordon AC, appliquer aux quatre cordons AB, AC, AD, AE, autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, qui soient entr'elles comme AG, KH, AL, AH. Cela fait, je dis que ces quatre puissances ainsi dirigées, seront encore ici en équilibre entr'elles.

DEMONSTRATION.

De ce que (*Hyp.*) B. D :: AG. AL. il suit du Lem. 1. que du concours de ces deux puissances B, D, il resultera au nœud A une force ou impression de A vers C suivant AC, laquelle sera à chacune de ces deux puissances B, D, comme la diagonale AK du parallelogramme

me GL à chacun de ses côtez correspondans AG, AL ; & consequemment que si l'on appelle K cet effort commun des puissances B, D, suivant AK, l'on aura ici K. B :: AK. AG. Or (*Hyp.*) B. C :: AG. KH. Donc K. C :: AK. KH. Et K+C. C :: AK+KH (AH) : KH. Or (*Hyp.*) C. E :: KH. AH. Donc K+C. E :: AH. AH. c'est-à-dire, K+C=E. Or on vient de voir que K est l'effort que les deux puissances B, D, font ensemble de A vers C suivant AC sur le nœud A, dans le sens que la puissance C le tire ; d'ou il resulte que K+C est tout ce que ces trois puissances B, D, C, font ensemble d'effort sur le nœud A contre la puissance E qui le tire directement (*Hyp.*) à contre-sens de cet effort commun K+C. Donc ayant déja K+C=E, cette puissance E sera ici directement contraire & égale à tout ce que les trois autres B, C, D, font ensemble d'effort sur le nœud A. Par consequent ces quatre puissances B, C, D, E, doivent encore ici demeurer en équilibre entr'elles suivant les directions AB, AC, AD, AE, qui y sont données. *Ce qu'il falloit aussi démontrer.*

3°. Si les quatre cordons AB, AC, AD, AE, de directions ici données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, étoient deux à deux en lignes droites, qui fussent, par exemple, BD, CE : il est visible qu'en appliquant deux puissances égales quelconques B, D, aux deux cordons AB, AD ; & deux autres aussi quelconques égales C, E, aux deux autres cordons AC, AE : ces quatre puissances demeureroient ici en équilibre entr'elles, quelque fût le rapport de chacune des deux premieres B, D, à chacune des deux dernieres C, E. *Ce qui est tout ce qui restoit ici à faire voir.* FIG. 351.

Donc (*art.* 1. 2. 3.) quelques soient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, d'un centre qui seroit le nœud commun A de ces quatre cordons ; le Problême proposé sera toûjours possible & resolu, comme dans ces art. 1. 2. 3. *Ce qui est* FIG. 348. 349. 350. 351.

tout ce qu'il falloit faire & démontrer dans cette part. 1. du cas 2.

PART. II. Il s'agit presentement de faire voir que ce Problême de quatre cordons de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, de leur nœud commun comme centre, est toûjours indéterminé. Pour cela il est à considerer que,

FIG. 348. 349. 1°. La liberté qu'on a eue dans l'art. 1. de la part. 1. Fig. 348. 349. de mener à volonté par le nœud A, sur le plan de ces quatre cordons AB, AC, AD, AE, la ligne droite RAP à travers de leurs angles BAE, CAD, pouvant diversifier à l'infini les rapports entr'elles des quatre droites AG, AK, AL, AH; & consequemment aussi ceux des quatre puissances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part.* 1. *art.* 1.) devoir toûjours demeurer en équilibre entr'elles suivant ces directions, tant que ces quatre puissances sont entr'elles en raison de ces quatre lignes correspondantes: il suit de-là qu'une infinité de puissances quatre à quatre, dans des rapports tout differens & variez à l'infini, pourront ici faire équilibre entr'elles suivant les mêmes directions données: & consequemment que le cas 2. de la question proposée, est ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.*

FIG. 350. 2°. Quoique dans l'art. 2. de la part. 1. Fig. 350. le rapport de AG à AL soit déterminé par les positions données de AB, AD, & de la droite CAE en même plan; cependant la liberté qu'on a eue d'y prendre KH, & consequemment aussi AH à volonté, pouvant diversifier à l'infini non seulement le rapport de AH à KH, mais encore les rapports de ces deux parties du cordon AC aux deux AG, AL, des cordons AB, AD; il suit de-là que les rapports entr'elles des quatre parties AG, KH, AL, AH, de ces cordons sont variables à l'infini: & consequemment aussi les rapports des quatre puissances B, C, D, E, qu'on vient de voir (*part.* 1. *art.* 2.) devoir toûjours ici demeurer en équilibre entr'elles, tant qu'elles y seront entr'elles comme ces quatre parties correspondantes des

Fig. 344.

Fig. 345

Fig. 346.

Fig. 347.

Fig. 348.

Fig. 349.

cordons AB, AC, AD. Donc une infinité de puiſſances quatre à quatre, pourront encore ici faire équilibre entr'elles ſuivant les mêmes directions AB, AC, AD, AE, qui y ſont données en même plan, & de quatre cordons répandus en plus d'un demi-cercle. Par conſequent le cas 2. de la queſtion propoſée, eſt encore ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

3°. Dans l'art. 3. de la part. 1. Fig. 351. quoiqu'il y ſoit requis pour l'équilibre entr'elles des quatre puiſſances B, C, D, E, ſuivant les directions qui y ſont données (*Hyp.*) en lignes droites deux à deux, que les deux directement oppoſées de ces puiſſances, telles qui y ſont (*Hyp.*) B à D, & C à E, ſoient ainſi deux à deux égales entr'elles : ſçavoir, B=D, & C=E ; cependant chacun de ces deux couples de puiſſances égales y étant à volonté, le rapport de chacune du premier couple à chacune du ſecond, y eſt encore variable à l'infini. Par conſequent une infinité de puiſſances quatre à quatre, en des rapports differens à l'infini, pourront encore ici faire équilibre entr'elles ſuivant les quatre directions qui y ſont données. Donc le cas 2. de la queſtion propoſée, eſt encore ici un Problême indéterminé. *Ce qu'il falloit 3°. démontrer.* Fig. 351.

Donc (*art.* 1. 2. 3.) quelques ſoient les directions données de quatre cordons AB, AC, AD, AE, en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit ſur ce plan, d'un centre qui ſeroit le nœud commun A de ces quatre cordons ; le Problême propoſé ſera toûjours indéterminé. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit démontrer dans cette part. 2. du cas 2.*

PART. III. Cette partie 3. eſt que lorſque les quatre cordons de directions données toutes en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt impoſſible. Cela ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4.

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques ſoient les directions données de quatre

cordons attachez ensemble par un seul & même nœud, ausquels il s'agit d'appliquer quatre puissances (une à chacun (qui fassent équilibre entr'elles suivant les directions données ; le Problême peut être tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impossible : sçavoir,

1°. Déterminé (*part.* 1. 2. *du cas* 1.) lorsque les quatre cordons de directions données sont en des plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere.

2°. Indeterminé (*part.* 1. 2. *du cas* 2.) lorsque ces quatre cordons sont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

3°. Enfin impossible (*part.* 3. *des cas* 1. 2.) lorsque ces quatre cordons de directions données, sont en des plans differens sans être répandus en plus d'une demi-sphere, ou tous en même plan, sans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'est-là tout ce qu'il s'agissoit de trouver & de démontrer dans le Problême proposé.

PROBLEME XV.

FIG. 352. 353. 354. *Soient à volonté les directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, attachez tous ensemble par un seul & même nœud A : on demande cinq puissances, qui appliquées à ces cinq cordons, une à chacun, fassent toutes ensemble équilibre entr'elles.*

SOLUTION.

Je dis que ce Problême est toûjours indeterminé ou impossible, soit que les directions données soient en plans differens, ou toutes en même plan.

CAS I.

Lorsque les cinq directions données sont en plans differens, le Probleme est toûjours indéterminé ou impossible.

Voici la démonstration de cette proposition en trois parties, dans lesquelles je vas faire voir,

I. Que lorsque les cinq cordons de directions données en plans differens, sont répandus en plus d'une demi-sphere, dont leur nœud commun soit le centre; le problême est toûjours possible.

II. Qu'alors il est toûjours indéterminé.

III. Que lorsque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne sont pas répandus en plus d'une demi-sphere; le Problême est toûjours impossible.

Part. I. Puisque (*Hyp.*) les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, sont ici en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, il n'y en peut avoir en même plan, d'un seul côté duquel tous les autres se trouvent: autrement ils ne seroient tous répandus que dans une demi-sphere terminée par ce plan; ce qui est contre l'hypothese. Donc de ces cinq cordons il y en aura toûjours deux seuls en même plan, & les trois autres de part & d'autre de ce plan, qui prolongé passera entr'eux. Soient AB, AE, les deux se trouvent seuls dans un plan BAE: la part. 3. du Lem. 5. fait voir que quelque soit ici la disposition des trois autres cordons AC, AD, AF, ce plan BAE prolongé par de-là le nœud commun A de tous, passera toûjours à travers ces trois-ci, par exemple, suivant AO; & que ce plan BEAO aura toûjours d'un côté de lui (que j'appelle le *dessus*) deux AD, AF, de ces trois autres cordons, & de l'autre côté (que j'appelle le *dessous*) le troisiéme AC: & soit que ce cordon AC soit, ou non, en ligne droite avec un des deux autres AD, AF; ils feront toûjours entr'eux pour le moins deux angles DAF, CAF, ou DAF, CAD. Cela posé,

SOLUTION.

Sur le plan DAF dans l'angle de ce nom, soit la droite AS de grandeur & de position arbitraires, laquelle fasse un angle quelconque SAC avec le cordon AC; ce qui ne pourra être autrement, si les trois AC, AD, AF, sont en plans differens; & ce qui sera toûjours possible, s'ils sont tous trois en même plan, puisque (*Hyp.*) AD ou AF fait un angle avec AC. Autour de cette diagonale AS soit le parallelogramme LM, de côtez AL, AM, pris sur les cordons AD, AF, supposez au-dessus du plan BEAO, au dessus duquel cette diagonale AS sera consequemment aussi. Ayant ainsi AS au-dessus de ce plan, & (*Hyp.*) AC au-dessous; il est visible que le plan SAC coupera celui-là en quelque section AP qui sera ainsi dans ces deux plans BEAO, SAC. Donc ST parallele à AC, rencontrera cette section commune AP en quelque point T, duquel si l'on mene TK parallele à AS, elle rencontrera aussi le cordon AC en quelque point K, & achevera ainsi sur le plan SACP le parallelogramme SK, dont la diagonale AT sera aussi dans le plan BEAOP des deux cordons AB, AE: desquels le cordon BA prolongé vers Q, sera consequemment rencontré en quelque point G par TG parallele à AE: de sorte que AE devant aussi être rencontrée en quelque point H par GH parallele à AP; l'on aura enfin dans ce plan BEAOP le parallelogramme HT, dont la diagonale AG sera (*Hyp.*) en ligne droite avec AB.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données en plans differens, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties correspondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions: ces cinq puissances demeureront ici toutes en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) F. D:: AL. AM. le Lem. 1. fait voir

que du concours d'action de ces deux puissances F, D, il resultera au nœud A une impression ou force (que j'appelle S) suivant AS, équivalente à l'effort commun de ces deux puissances F, D, sur ce nœud A : laquelle force S sera à chacune d'elles comme cette diagonale AS du parallelogramme ML sera à chacun de ses côtez correspondans AM, AL ; de sorte que l'on aura ici S. C : : AS. AK. Par consequent (*Lem.* 2.) du concours d'action de ces deux forces S, C, sur ce nœud A, il lui en resultera une (que j'appelle T.) suivant AT, équivalente à l'effort commun des trois F, D, C, sur ce nœud A : laquelle force T sera à la puissance C, comme cette diagonale AT du parallelogramme SK sera à son côté correspondant AK ; c'est-à-dire, T. C : : AT. AK. Or (*Hyp.*) C. E : : AK. AH. Donc T. E : : AT. AH. Par consequent (*Lem.* 2.) du concours d'action de ces deux forces T, E, sur le nœud A, il lui en resultera une (que j'appelle G, suivant AG, équivalente à l'effort commun des quatre puissances F, D, C, E, sur ce nœud A ; laquelle force G sera à la puissance E, comme cette diagonale AG du parallelogramme TH sera à son côté correspondant AH ; c'est-à-dire, G. E : : AG. AH. Or on a aussi (*Hyp.*) B. E : : AG. AH. Donc G=B. Par consequent ces deux forces égales G, B, étant (*Hyp.*) directement opposées, il y aura ici équilibre entr'elles. Or on vient de voir que la premiere G est équivalente à tout l'effort que les quatre puissances C, D, E, F, font ensemble de A vers G suivant AG ou AQ sur le nœud A. Donc ces quatre puissances feront ici équilibre avec la cinquiéme B. *Ce qu'il falloit 1°. trouver & démontrer.*

PART. II. Si l'on considere que dans la precedente solut. part. 1. la diagonale AS du parallelogramme LM, a été prise de grandeur & de position indéterminées, on verra que les côtez AL, AM, de ce parallelogramme sont aussi indéterminez de grandeur & de rapport non seulement entr'eux, mais encore avec AK, AH, AG. Donc les rapports entr'elles de ces cinq lignes AG, AK,

AL, AH, AM, ſont variables à l'infini. Cependant on vient de démontrer (*part.* 1.) que cinq puiſſances B, C, D, E, F, en raiſon de ces cinq lignes, & appliquées chacune à chacun des cinq cordons correſpondans AB, AC, AD, AE, AF, ainſi dirigez, feroient toûjours équilibre entr'elles ſuivant ces directions données. Donc une infinité de puiſſances, cinq à cinq, en des rapports differens à l'infini, feroient ainſi équilibre entr'elles ſuivant ces mêmes directions. Par conſequent le Problême eſt ici indéterminé. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

Si un des deux cordons AF, AD, ſuppoſez au-deſſus du plan BAE, eſt dans ce plan, on ſe ſervira encore d'eux comme l'on vient de faire dans la part. 1. *pour prouver comme là que le Problême eſt ici poſſible; & un raiſonnement ſemblable à celui de la part.* 2. *prouvera auſſi comme là qu'il eſt encore ici indéterminé.*

PART. III. C'eſt ainſi (*part.* 1. 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données en plans differens, eſt toûjours indéterminé tant que ces cinq cordons ſe trouvent répandus en plus d'une demi-ſphere dont leur nœud commun ſoit le centre. Il s'agit preſentement de faire voir que ce Problême eſt toûjours impoſſible, lorſque ces cinq cordons de directions données en plans differens, ne ſont pas répandus en plus d'une demi-ſphere. C'eſt ce qui ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & *ce qu'il falloit ici* 3°. *faire voir.*

CAS II.

Lorſque les cinq directions données ſont toutes en meſme plan, le Probleme eſt encore toujours indéterminé ou impoſſible.

Voici auſſi la démonſtration de cette propoſition en trois parties, dans leſquelles je vas faire voir,

I. Que lorſque les cinq cordons de directions données toutes en même plan, ſont répandus en plus d'un demicercle, le Problême eſt toûjours poſſible.

II. Qu'alors il eſt toûjours indéterminé.

III. Que lorſque les cinq cordons de directions données en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle, le Problême eſt toûjours impoſſible.

PART. I. Suppoſons preſentement que les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, des Fig. 352. 353. 354. regardez ci-deſſus (*cas* 1.) comme en plans differens, ſont ici tous de directions données en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun A ſoit le centre; ſoit que ces cinq cordons ayent autant de directions differentes ſur le plan commun, ou qu'il s'y en trouve en lignes droites les uns avec les autres. Dans cette hypotheſe, où il n'y a plus de ſections AO, AP, de plans differens, comme dans la part. 1. du cas 1. ſoient ſeulement les ſimples droites AS, AP, qui en faiſant entr'elles un angle quelconque SAP ſur le plan de ces cordons, en diviſent les angles FAD, DAC, dans les Fig. 352. 353. ou FAD, FAC, dans la Fig. 354. en tels rapports qu'on voudra, & dont AS ſoit auſſi priſe de grandeur arbitraire.

SOLUTION I.

Si dans la preſente hypotheſe l'on fait en même plan les parallelogrammes LM, SK, TH, de la maniere qu'on les a faits en plans differens dans la part. 1. du cas 1. & qu'on applique ici comme là aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions encore ici données, autant de puiſſances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui ſoient entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions: on démontrera ici que ces cinq puiſſances y demeureront en équilibre entr'elles ſuivant ces directions ici données en même plan, & de cordons répandus en plus d'un demi-cercle; comme on a démontré là que les cinq puiſſances qu'on y a aſſignées, y devoient demeurer en équilibre ſuivant les directions qui y étoient données en plans differens, & de cordons répandus en plus d'une demi-ſphere. Donc le Problême eſt toûjours poſſible ici comme là. *Ce qu'il falloit 1°. démonter.*

SOLUTION II.

Quelques soient les cinq directions ici données en même plan, des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, répandus en plus d'un demi-cercle, soit qu'il s'en trouve en lignes droites entr'eux, ou non ; il est visible que des cinq il y en aura toûjours quelqu'un qui ne sera en ligne droite avec aucun autre, & qui prolongé par de-là leur nœud comme A, en aura toûjours deux de chaque côté de lui comme dans la Fig. 355. ou trois d'un côté, & un de l'autre comme dans la Fig. 356. Soit dans la Fig. 355. BA ce cordon qui prolongé vers Q ait ainsi AC avec AD d'un côté, & AE avec AF de l'autre, soit que ceux d'un côté soient en lignes droites, ou non, avec ceux de l'autre. Sur cette droite BAQ soient prises depuis A de part & d'autre, deux parties égales quelconques AG. AV : sur AV, & sur une partie quelconque AN de AG, comme diagonales, soient les parallelogrammes HL, MK, dont les côtez soient sur les cordons qui forment les angles que la droite BAQ divise en quelques rapports que ce soient.

Fig. 355.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles comme les parties correspondantes NG, AK, AL, AH, AM, de leurs directions ; ces cinq puissances demeureront ici en équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) D.E : : AL. AH. Et C.F : : AK. AM. Le Lem. 2. fait voir que du concours d'action des deux premieres puissances D, E, sur le nœud A, il lui resultera une force ou impression (que j'appelle V) de A vers Q suivant AV ou AQ, laquelle force V sera à chacune de ces deux puissances D, E, comme cette diagonale AV du parallelogramme HL sera à chacun de ses côtez correspondans AL, AH ; & que du concours d'action des deux

autres puiſſances C, F, ſur le même nœud A, il lui reſultera pareillement une autre force ou impreſſion directement contraire (que j'appelle N) de A vers B ſuivant AB ou AN, laquelle force N ſera auſſi à chacune de ces deux autres puiſſances C, F, comme cette diagonale AN du parallelogramme MK ſera à chacun de ſes côtez correſpondans AK, AM : de ſorte que l'on aura ici V. D :: AV. AL. Et C. N :: AK. AN. Donc ayant (*Hyp.*) D. C :: AL. AK. l'on aura auſſi V. N :: AV. AN. Or venant de trouver N. C :: AN. AK. Et ayant (*Hyp.*) C. B :: AK. NG. l'on aura de même N. B :: AN. NG. Et conſequemment N. N+B :: AN. AN+NG. (AG) Donc V. N+B :: AV. AG. De ſorte qu'ayant ici (*Hyp.*) AV=AG, l'on y aura auſſi V=N+B. Donc N+B étant (ci-deſſus) l'effort total de A vers B ſuivant AB, reſultant du concours d'action des trois puiſſances C, F, B, ſur le nœud A; & V un effort directement contraire de A vers Q ſuivant AQ ſur le même nœud A, reſultant du concours d'action des deux autres puiſſances D, E, contre ces trois-là; ces cinq puiſſances demeureront ici en équilibre entr'elles ſuivant les directions qu'on y ſuppoſe données. *Ce qu'il falloit auſſi démontrer.*

SOLUTION III.

Ce Problême de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions données toutes en même plan, & répandues en plus d'un demi-cercle, ſe peut encore reſoudre autrement, en menant au hazard ſur le plan de ces cordons, & par leur nœud commun A, les droites RAP, AS, dont la premiere RP diviſe deux DAE, BAC, de leurs angles en quelques rapports que ce ſoient, & la ſeconde AS diviſe un EAF de leurs autres angles en quelque rapport que ce ſoit auſſi. Autour de AS (comme diagonale) priſe de grandeur auſſi arbitraire que ſa poſition l'eſt dans l'angle EAF, ſoit le parallelogramme HM des côtez AH, AM, pris ſur ceux AE, AF, de cet angle. Du point S parallelement à AD, ſoit menée SQ qui rencontre AR en Q; FIG. 356.

duquel point Q soit aussi menée parallelement à AS, la droite QL, qui rencontre AD en L, & acheve ainsi le parallelogramme SL, dont AQ est la diagonale. Ensuite de l'autre côté de A sur la droite RAP, soit prise AN=AQ, & sur cette diagonale AN soit fait le parallelogramme GK de côtez AG, AK, pris sur AB, AC.

Cela fait, je dis que si aux cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle décrit sur ce plan, de leur nœud commun A comme centre, l'on applique autant de puissances (une à chacun) B, C, D, E, F, qui soient entr'elles commme les parties AG, AK, AL, AH, AM, de leurs cordons ainsi dirigez; ces cinq puissances feront encore ici équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données.

DEMONSTRATION.

Puisque (*Hyp.*) E. F :: AH. AM. le Lem. 2. fait encore voir ici qu'en appellant S la force resultante du concours d'action de ces deux puissances E, F, au nœud A suivant AS; l'on aura ici S. E :: AS. AH. Ainsi ayant (*Hyp.*) E. D :: AH. AL. l'on aura pareillement ici S. D :: AS. AL. Par consequent (*Lem.* 2.) du concours de ces deux forces S, D, c'est-à-dire, des trois puissances F, E, D, il resultera au nœud A une impression ou force de A vers R suivant AR, laquelle étant appellée Q, l'on aura ici Q. D :: AQ. AL. Il resultera de même (*Lem.* 2.) du concours des deux autres puissances B, C, à ce nœud A une force de A vers P suivant AP en sens directement contraire, laquelle force étant appellée N, l'on aura aussi C. N :: AK. AN. Donc ayant (*Hyp.*) D. C :: AL. AK. l'on aura enfin Q. N :: AQ. AN. De sorte qu'ayant (*Hyp.*) AQ=AN, l'on aura pareillement ici Q=N. Ainsi ces deux forces égales Q, N, suivant AQ, AN, étant (comme l'on voit) directement contraires, feront ici équilibre entr'elles; & par consequent aussi les cinq puissances B, C, D, E, F, du concours desquelles on voit que

ces deux forces Q, N, resultent. *Ce qu'il falloit encore ici démontrer.*

PART. II. 1°. Si l'on considere que dans la solut. 1. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. La diagonale AS du parallelogramme LM a été prise de grandeur & de position indéterminées, comme dans la part. 1. du cas 1. Cette raison, qui dans ce cas 1. a fait voir (*part.* 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, y étoit indéterminé, fera voir de même que celui-ci de cinq cordons de directions ici données toutes en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle, y est aussi indéterminé, & ce d'autant plus que la position de AP y est de plus indéterminée. Fig. 352. 353. 354.

2°. Quant à la solut. 2. de la part. 1. Fig. 355. la liberté qu'on y a eue aussi de diviser AG en N, en tel rapport qu'on a voulu, rendant arbitraires non seulement les rapports de NG à AK, AL, AH, AM, mais aussi ceux de AK, AM à AH, AL, rend les rapports entr'elles de ces cinq lignes variables à l'infini, quoique ceux de AK à AM, & de AH à AL, soient constans, & qu'ils puissent quelquefois être les mêmes, comme lorsque CAE & DAF sont deux lignes droites. Donc aussi les rapports entr'elles de cinq puissances B, C, D, E, F, proportionnelles (*part.* 1. *solut.* 2.) à ces cinq lignes NG, AK, AL, AH, AM, seroient ici variables à l'infini. Cependant on vient de voir (*part.* 1. *solut.* 2.) que cinq telles puissances feroient toûjours équilibre entr'elles suivant les directions ici données, desquelles ces cinq lignes sont autant de parties. Donc une infinité de puissances, cinq à cinq, en des rapports differens à l'infini, feroient ici équilibre entr'elles suivant ces mêmes directions données de cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Par consequent ce Problême est encore ici indéterminé. Fig. 355.

3°. De ce que dans la solut. 3. part. 1. Fig. 356. les deux droites RAP, AS, sont encore indéterminées de position, Fig. 356.

& AS de grandeur, le tout comme dans la ſolut. 1. Fig. 352. 353. 354. de la même part. 1. Cette raiſon, qui dans l'art. 1. de la preſente part. 2. vient de faire voir que le Problême dont il s'agit ici, y étoit indéterminé, fait voir de même qu'il l'eſt pareillement ici.

Fig. 352. 353. 354. 355. 356. 4°. Mais ce qui prouve cela tout d'un coup & à la fois pour toutes les ſolut. 1. 2. 3. de la part. 1. Fig. 352. 353. 354. 355. 356. c'eſt que les deux puiſſances D, F, qui ſe reduiſent à une S dirigée ſuivant AS dans les Fig. 352. 353. 354. part. 1. ſolut. 1. comme font les deux puiſſances E, F, dans la Fig. 356. de cette part. 1. ſolut. 3. & que les deux puiſſances D, E, qui ſe reduiſent auſſi à une V dirigée ſuivant AV dans la Fig. 355. de la même part. 1. ſolut. 2. reduiſant ainſi à quatre en même plan, & en plus d'un demi-cercle, les cinq cordons de cette part. 1. Le cas 2. du Problême 1. fait voir par cela ſeul que le Problême dont il s'agit ici, y eſt toûjours indéterminé. *Ce qu'il falloit 2°. démontrer.*

PART. III. C'eſt ainſi (*part.* 1. 2.) que le Problême de cinq cordons de directions données toutes en même plan, eſt toûjours indéterminé tant que ces cinq cordons ſe trouvent répandus en plus d'un demi-cercle, dont leur nœud commun ſoit le centre. Il s'agit preſentement de faire voir que ce Problême eſt toûjours impoſſible, lorſque ces cinq cordons de directions données en même plan, ne ſont pas répandus en plus d'un demi-cercle: c'eſt ce qui ſe trouve démontré dans le Corol. 2. du Lem. 4. & *ce qu'il falloit ici 3°. faire voir.*

CONCLUSION DES CAS I. II.

Donc quelques ſoient les directions données de cinq cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud, auſquels il s'agit d'appliquer autant de puiſſances (une à chacun) qui faſſent équilibre entr'elles ſuivant les directions données; le Problême eſt toûjours indéterminé ou impoſſible: ſçavoir,

1°. Toûjours indéterminé (*part.* 1. 2. *des cas* 1. 2.) tant

que les cinq cordons de directions données, sont en plans differens, & répandus en plus d'une demi-sphere, ou lorsqu'ils sont tous en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle.

2°. Et toûjours impossible (*part.* 3. *des cas* 1. 2.) tant que ces cinq cordons de directions données, sont en plans differens, sans être répandus en plus d'une demi-sphere, ou tous en même plan, sans être répandus en plus d'un demi-cercle.

C'est-là tout ce qu'il s'agissoit de trouver & de démontrer dans le present Probl. 15.

REMARQUE GENERALE.

I. La solution du present Probl. 15. de cinq cordons attachez ensemble par un seul nœud, & de directions données à volonté, fait assez voir comment on pourroit resoudre de même tout autre Problême de tant de cordons qu'on voudra, attachez ainsi ensemble, & de directions données à volonté. Mais il n'est pas besoin d'entrer sur cela dans un plus grand détail pour voir ce que j'ai dit d'abord, que lorsque le nombre des cordons de directions ainsi données, est au-dessus de quatre, le Problême est toûjours indéterminé ou impossible; puisque tel est (*cas* 1. 2. *du Probl.* 15.) celui de cinq cordons, & que par la méthode précedente qui le fait voir, on reduira toûjours à ce nombre de cinq tel autre plus grand nombre de cordons qu'on voudra, précisement de la même maniere que dans la part. 1. des cas 1. 2. de la solut. du Probl. 15. les cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, ont été reduits à quatre AB, AC, AD, AS, dans les Fig. 352. 353. 354. desquels AS pris ainsi pour un cordon tiré par une puissance S, qui seroit à chacune des deux D, F, comme cette diagonale AS à chacun des côtez correspondans AL, AM, du parallelogramme LM, équivaudroit (*Lem.* 2.) aux deux cordons AD, AF, tirez par ces deux puissances D, F. Et comme ç'a été l'indétermination de position de ce nouveau cordon AS substitué au lieu des deux AD,

FIG. 352. 353. 354.

AF, avec une telle puiſſance S, au lieu des deux D, F, qui a cauſé l'indétermination de ce Probl. 15. dans les part. 1. 2. de ſon cas 1. & l'a augmentée dans les part. 1. 2. de ſon cas 2. On voit que plus il y aura de cordons de directions données au-deſſus de cinq, plus il y aura auſſi de nouvelles raiſons d'indétermination dans tous les autres Problêmes; leſquels, comme les deux précedens, ſeront toûjours poſſibles tant que les cordons y ſeront répandus en plus d'une demi-ſphere, ou en plus d'un demi-cercle, & toûjours impoſſibles (*Lem.* 2. *Corol.* 2.) dans tous les autres cas.

Fig. 355. 356. Ce qu'on vient de dire des cinq cordons AB, AC, AD, AE, AF, reduits à quatre AB, AC, AE, AS, dans les Fig. 352. 353. 554. part. 1. des cas 1. 2. de la ſolut. du Probl. 15. ſe dira pareillement des cinq cordons qui y ont été reduits de même à quatre AB, AC, AD, AS, dans la Fig. 356. & auſſi à quatre AB, AC, AF, AV, dans la Fig. 355. pour faire encore voir que tel nombre de cordons qu'on voudra au-deſſus de cinq, pourra toûjours ſe reduire de même à cinq; & de cette maniere reduire au Probl. 15. chacun de tous ces autres Problêmes, qui par-là ſeront (comme lui) toûjours indéterminez ou impoſſibles.

II. Quant aux Problêmes de deux ou de trois cordons ainſi attachez enſemble par un ſeul nœud, & de directions auſſi données à volonté, on voit aſſez,

1°. Que lorſqu'il n'y a que deux cordons de directions données, le Problême eſt toûjours déterminé à deux puiſſances égales entr'elles, lorſque ces cordons ſont en ligne droite; & toûjours impoſſible, lorſqu'ils font quelqu'angle entr'eux: ce cas eſt celui d'une ſimple corde, aux extrêmitez de laquelle il faudroit appliquer deux puiſſances propres à faire équilibre entr'elles, leſquelles la rendroient toûjours en ligne droite.

2°. Que lorſqu'il n'y a que trois cordons de directions données, le Problême eſt toûjours auſſi déterminé ou impoſſible.

II

Il eſt toûjours déterminé, lorſque les trois cordons AB, AC, AD, en ſont donnez en même plan, & répandus en plus d'un demi-cercle. Car alors le prolongement de chacun d'eux ; par exemple, le prolongement AQ du cordon AB diviſant toûjours l'angle CAD des deux autres AC, AD, en raiſon déterminée, le parallelogramme KL d'une diagonale quelconque AG, priſe à volonté ſur AQ, & de côtez AK, AL, ainſi déterminez ſur AC, AD, aura toûjours cette diagonale en raiſon déterminée à chacun de ces côtez ; & conſequemment les trois puiſſances B, C, D, requiſes aux trois cordons AB, AC, AD, pour faire équilibre entr'elles ſuivant ces directions ici données, devant être entr'elles comme les parties correſpondantes AG, AK, AL, de ces directions, chacune de ces trois puiſſances ſera toûjours ici en raiſon déterminée à chacune des deux autres ; & conſequemment auſſi le Problême y ſera toûjours déterminé. Fig. 357.

Au contraire il ſera impoſſible (*Lem.* 4. *Corol.* 2.) en tout autre cas ; ſçavoir, lorſque les trois cordons en même plan, n'y ſeront pas répandus en plus d'un demi-cercle ; & auſſi lorſqu'ils ſeront en plans differens, n'y pouvant être répandus en plus d'une demi-ſphere.

III. Joignons preſentement ces deux articles avec les ſolutions des deux Problêmes précedens ; & l'on verra pour tous les Problêmes imaginables où il s'agira d'aſſigner des puiſſances, qui appliquées chacune à chacun de tant de cordons qu'on voudra, attachez enſemble par un ſeul nœud, & de directions données à volonté, feroient équilibre entr'elles ſuivant ces directions : on verra, dis-je,

1°. Que (*art.* 2.) le Problême de deux ou de trois cordons, ſera toûjours déterminé ou impoſſible.

2°. Que (*ſolut. du Probl.* 14.) le Problême de quatre cordons ſera tantôt déterminé, tantôt indéterminé, & quelquefois impoſſible.

3°. Qu'enfin (*ſolut. du Probl.* 15. *& art.* 1. *d'ici*) tous les autres Problêmes de plus de quatre cordons à l'infini, ſeront toûjours indéterminez ou impoſſibles.

IV. Cela étant de tous les Problêmes de direction, données de tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez tous ensemble par un seul & même nœud, & ausquels on demanderoit d'appliquer autant de puissances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles suivant ces directions données : Cela, dis-je, étant ainsi (*art.* 3.) de tous ces Problêmes, il est aisé de voir que ceux de directions données de differentes branches de corde, issues de differens nœuds, se rapportant à quelqu'un de ceux-là en chaque nœud, sont aussi tous déterminez, ou indéterminez, ou impossibles, selon le nombre des branches ou cordons de chaque nœud ; sçavoir,

1° Déterminez ou impossibles (*art.* 3. *nomb.* 1.) s'il ne part que trois cordons de chaque nœud ; ce qui est le moins qu'il en puisse partir : deux cordons seuls ne faisant qu'une simple corde ; outre qu'ils ne rendroient encore (*art.* 3. *nomb.* 1.) le Problême que déterminé ou impossible.

2°. Il sera (*art.* 3. *nomb.* 2.) déterminé, ou indéterminé, ou impossible, s'il y a des nœuds de quatre cordons, & aucun de davantage.

3°. Enfin le Problême sera (*art.* 3. *nomb.* 3.) indéterminé, ou impossible, s'il y a des nœuds de plus de quatre cordons.

C'est-là tout ce que j'avois avancé sur ce sujet, & ce qui comprend tous les Problêmes qu'on peut faire à l'infini par rapport à tel nombre de cordons qu'on voudra, attachez ensemble par un seul ou plusieurs nœuds, & ausquels il faudroit appliquer autant de puissances (une à chacun) propres à faire équilibre entr'elles suivant les directions données de ces cordons : les solutions de tous ces Problêmes se trouveront précisement comme les précedentes des Probl. 14. 15. *& du nomb.* 2. *de l'art.* 2. *de la Remarque qui les suit ; il n'y aura de difficulté nouvelle que pour l'imagination à se démêler de l'embarras des lignes & des plans que la multiplicité des cordons & de leurs directions données à volonté, y exigera pour tous les parallelogrammes qui y seront necessaires, sur*

Fig. 350

Fig. 351.

Fig. 352.

Fig. 353

Fig. 354.

Fig. 355

Fig. 356.

Fig. 357.

tout lorſque les cordons y ſeront donnez de poſition en differens plans. C'eſt ce qui m'a empêché d'entrer ici dans un plus grand détail de ces Problêmes, vû la facilité de la méthode qu'on y a ſuivie, laquelle fait aſſez voir que ſi au lieu de directions données, c'étoient ſeulement autant de points donnez par où ces directions dûſſent paſſer, ces ſortes de Problêmes ſeroient ſuſceptibles d'un nombre infiniment plus grand de ſolutions que lorſque ces directions ſont données; puiſqu'alors ces puiſſances cherchées auroient leurs directions arbitraires, qui priſes à volonté par les points donnez, détermineroient ces puiſſances comme elles le viennent d'être par leurs directions données: ces Problêmes, dis-je, ſeroient tous alors indéterminez, excepté le ſeul de deux cordons ſeulement, ou d'une ſimple corde, qui pour l'équilibre entre deux puiſſances appliquées à ces extrêmitez, les exige toûjours égales entr'elles; au lieu que dans les Problêmes de trois cordons toûjours en même plan, ou de quatre en plans differens, les rapports des puiſſances ſeroient auſſi variables que leurs directions, & encore plus qu'elles dans le Problême de quatre cordons en même plan, & dans les autres d'un plus grand nombre de cordons attachez enſemble par un ſeul & même nœud: variabilité des rapports des puiſſances requiſes pour l'équilibre, laquelle augmenteroit avec le nombre de ces cordons.

PROBLEME XVI.

Dix puiſſances Φ, A, E, D, B, F, G, H, I, K, appliquées à pluſieurs nœuds de cordes, étant données avec les angles que toutes ces cordes font entr'elles; trouver la valeur du poids T, que toutes ces puiſſances ainſi appliquées ſoûtiennent enſemble. FIG. 358.

SOLUTION.

Soit la valeur de chaque puissance, & de chaque angle donné dans la Table suivante.

Puissance.	Livres.		Angle.	Deg.	M.
φ	5.		θCT	45.	30.
A	4.	$\frac{1}{4}$	MCT	150.	20.
E	7.	$\frac{1}{4}$	LZC	58.	30.
D	12.	$\frac{1}{2}$	RZC	112.	15.
B	14.		VOZ	151.	
F	11.	$\frac{1}{2}$	SOZ	110.	
G	17.		QZC	143.	
H	7.	$\frac{1}{2}$	NCT	145.	
I	16.		βXC	131.	30.
K	13.	$\frac{1}{2}$	*h*XC	123.	30.
			PCT	64.	40.
			δYC	62.	
			*z*YC	107.	20.
			*e*YC	151.	40.

Cela suppoſé, ſur les branches des cordes auſquelles les puiſſances ϕ, A, E, D, B, F, G, H, I, K, ſont immediatement appliquées, ſoient priſes depuis leurs nœuds des parties θC, LZ, VO, SO, QZ, βX, hX, δY, zY, eY, qui ſoient entr'elles comme les forces de ces mêmes puiſſances, c'eſt-à-dire, comme les chifres qui leur répondent dans la Table précedente.

Preſentement ſi l'on regarde chacune de ces proportionnelles comme un ſinus total, le ſinus de la difference d'un angle droit à l'angle d'application de la puiſſance qui répond à cette proportionnelle, ſera la ſublimité ou la profondeur de cette même puiſſance : par exemple, ſi l'on prend la proportionnelle $C\theta$ de la puiſſance ϕ pour un ſinus total, ſa profondeur $C\lambda$ ſera le ſinus de l'angle $C\theta\lambda$, qui eſt la difference de $\theta C\lambda$, angle d'application de cette puiſſance à un angle droit. De même en prenant la proportionnelle VO de la puiſſance E, pour un ſinus total, ſa ſublimité Ou ſera le ſinus de l'angle OVu, qui eſt la difference d'un angle droit à ſon angle d'application VOZ : de cette façon nous aurons les ſublimitez & les profondeurs de toutes ces puiſſances par les analogies ſuivantes.

Comme	au				Ainsi		à	
Le sinus total	Sinus	de l'angle	de Deg. M. difference de 90 deg. à l'angle d'aplication.	de la puiss. sance	La proportionnelle de cette même puissance	de	Sa sublimité, ou sa profondeur	de
	7009093.	Cθλ	44.30.	Φ	Cθ	5.	Cλ	3. $\frac{1013093}{2000000}$,
	5224986.	ZL*l*	31.30.	A	ZL	4. $\frac{1}{4}$	Z*l*	2. $\frac{4412381}{20000000}$,
	8746197.	OV*u*	61.	E	OV	7. $\frac{1}{4}$	O*u*	6. $\frac{13639713}{40000000}$,
10000000.	3420202.	OS*ſ*	20.	D	OS	12. $\frac{1}{2}$	O*ſ*	4. $\frac{110101}{400000}$,
	7986355.	ZQ*q*	53.	B	ZQ	14.	Z*q*	11. $\frac{180897}{1000000}$,
	6626201.	X*βf*	41.30.	F	X*β*	11. $\frac{1}{2}$	X*f*	7. $\frac{6439043}{20000000}$,
	5519370.	X*hb*	33.30.	G	X*h*	17.	X*b*	9. $\frac{382929}{1000000}$,
	4694716.	Y*δd*	28.	H	Y*δ*	7. $\frac{1}{2}$	Y*d*	3. $\frac{521037}{1000000}$,
	2979303.	Y*ζx*	17.20.	I	Y*z*	16.	Y*x*	4. $\frac{479303}{625000}$,
	8802014.	Y*eg*	61.40.	K	Y*e*	13. $\frac{1}{2}$	Y*g*	11. $\frac{8827189}{10000000}$,

Après avoir ainſi trouvé la valeur de chacune des ſublimitez & des profondeurs de toutes les puiſſances qui ſoûtiennent le poids T ; ſoit priſe ZR égale à O*u* plus O*ſ* ; c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies précedentes, égale à 6. $\frac{13639713}{40000000}$ plus 4. $\frac{110101}{400000}$; ou bien en reduiſant ces deux

fractions à une même dénomination égale à 10. $\frac{24649813}{40000000}$.

Après cela OV étant à ZR, comme la puiſſance E à la force dont le point Z eſt tiré ſuivant ZO par le concours d'action des puiſſances D & E ; ZR ſera la proportionnelle de cette force, & l'angle RZC étant (*Hyp.*) de 112. degrez 15. minutes, ſa difference à un angle droit ; c'eſt-à-dire, l'angle ZR*r* ſera de 22. degrez 15. minutes. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. pour la valeur de Z*r*, ſublimité de cette force ; puiſque ZR de 10. $\frac{24649813}{40000000}$. eſt à 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. comme le ſinus total 10000000. à 3786486. ſinus de l'angle ZR*r* de 22. deg. 15. min.

Soit enſuite 1°. CM égale à Z*q* plus Z*r* moins Z*l*, c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies que nous venons de trouver, égale à 11. $\frac{180897}{1000000}$. plus 3. $\frac{174265285916559}{2000000000000000}$. moins 2. $\frac{4412381}{20000000}$. ou bien en reduiſant ces trois fractions à une même dénomination, égale à 12. $\frac{16632087591659}{2000000000000000}$. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 11. $\frac{74566272432665199141}{500000000000000200000000}$. pour la valeur de la ſublimité C*m* ; puiſque 12. $\frac{166320875916559}{2000000000000000}$. eſt à 11. $\frac{74566272432665199141}{500000000000000000000000}$. comme le ſinus total 10000000. à 8689196. ſinus de l'angle CM*m* de 60. deg. 20. min. qui eſt la difference d'un angle droit à l'angle MCT de (*Hyp.*) 150. deg. 20. min.

2°. Faites de même CN égale à X*b* plus X*f* ; c'eſt-à-dire, ſuivant les analogies de la Table précedente, égale à 9. $\frac{382929}{10000000}$ plus 7. $\frac{6439043}{20000000}$; ou bien en reduiſant ces deux fractions à une même dénomination égale à 16. $\frac{14097623}{20000000}$. Ce qui donnera par une analogie ſemblable aux précedentes, 13. $\frac{536769485458 3}{1000000000000000}$ pour la valeur de la ſublimité C*n* ; puiſque 16. $\frac{14097623}{20990000}$ eſt à 13. $\frac{136767694854583}{2000000000000000}$

comme le sinus total 10000000. à 8191521. sinus de l'angle CNn de 55. deg. qui est la difference d'un angle droit à l'angle NCT de (*Hyp.*) 145. deg.

3°. Enfin soit encore CP égale à Yg plus Yx moins Yd; c'est-à-dire, suivant les analogies de la Table précedente, égale à $11.\frac{8827189}{10000000}$ plus $4.\frac{479303}{625000}$ moins $3.\frac{521037}{1000000}$; ou bien en reduisant ces trois fractions à une même dénomination égale à $12.\frac{232141685}{282000000}$. Ce qui donnera par une analogie encore semblable aux précedentes, $5.\frac{6864422233021177}{14100000000000000}$ pour la valeur de la profondeur Cp; puisque $12.\frac{232141683}{282000000}$. est à $5.\frac{6864422233021177}{14100000000000000}$, comme le sinus total 10000000. à 4278838. sinus de l'angle CPp de 25. deg. 20. min. qui est la difference d'un angle droit à l'angle PCT de (*Hyp.*) 64. deg. 40. min.

De tout cela on voit presentement que

la { Subl. Cm / Subl. Cn / Prof. Cλ / Prof. Cp } est égale à { $11.\frac{74566272432665199141}{500000000000000000000}$. / $13.\frac{136767694854583}{2000000000000000}$. / $3.\frac{1013093}{20000000}$. / $5.\frac{6864422233021177}{14100000000000000}$. }

De sorte qu'en reduisant toutes ces fractions à une même dénomination, on aura $Cm + Cn - C\lambda - Cp =$ $15.\frac{59190816934137450578881}{705000000000000000000000}$. Or ayant pris, comme nous venons de faire, 1°. $CR = O\!f + Ou$. 2°. $CM = Zq + Zr - Zl$. 3°. $CN = Xf + Xb$. 4°. $CP = Yg + Yx - Yd$, chacune des puissances qui soûtiennent ainsi le poids T; par exemple, la puissance E est (*prop.* 4. *Cor.* 1.) à ce poids comme sa proportionnelle OV de (*Hyp.*) $7\frac{1}{4}$ à $Cm + Cn - C\lambda - Cp$. Donc cette même puissance E est à ce poids comme $7\frac{1}{4}$ à $15.\frac{59190816934137450378881}{705000000000000000000000}$; par conse-

quent

quent la valeur de cette puissance étant (*Hyp.*) de $7\frac{1}{4}$ liv. ce même poids est aussi justement de $15.\frac{50120816934137450178881}{70000000000000000000000}$ liv. c'est-à-dire, de 15. livres, & un peu plus de cinq septiémes de livres. *Ce qu'il falloit trouver.*

PROBLEME XVII.

Deux puissances F, H, étant données avec leurs points Q, V, d'application à un Levier quelconque QV, & avec leurs directions QF, VH; trouver l'appui de ce Levier, avec la charge & la direction de cet appui, sur lequel ces deux puissances doivent faire équilibre entr'elles. FIG. 359. & suivantes jusqu'à 365.

CAS I.

Dans lequel les directions données QF, VH, des puissances aussi données F, H, sont paralleles entr'elles. FIG. 359. 360. 361.

SOLUTION.

Du point donné V soit menée VS perpendiculaire en S sur la direction donnée QF de la puissance F. Sur cette perpendiculaire VS prolongée soient prises VT. TS :: F. H. Après quoi soit menée TB parallele à QF, & qui rencontre en quelque point B le Levier VQ prolongé en ligne droite ou courbe à volonté.

Je dis que ce point B de ce Levier de figure quelconque, & d'espece aussi quelconque, sera celui de son appui sur lequel les deux puissances données F, H, feront équilibre entr'elles suivant leurs directions données QF, VH; & que la charge qui en resultera à cet appui B sera suivant une direction parallele à celles des puissances F, H, & égale à la somme de ces mêmes puissances, lorsqu'elles agissent en même sens, comme dans la Fig. 359. ou égale à leur difference, lorsqu'elles agissent en sens contraires, comme dans les Fig. 360. 361. *Ce qui est tout ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Par ce point B ſoit la droite BR parallele à VT ; & conſequemment perpendiculaire comme elle (*ſolut.*) à BT, QF, VH, paralleles auſſi (*ſolution*) entr'elles, dont cette droite BR prolongée rencontre en P, R, les deux dernieres QF, VH, de qui BP, BR, ſont conſequemment les diſtances au point B. Or les parallelogrammes rectangles TP, TR, qui reſultent des paralleles BR, VT, ainſi perpendiculaires aux trois autres BT, QF, VH, rendent BR. BP : : VT. TS (*ſolut.*) : : F. H. Donc ces deux puiſſances F, H, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances BP, BR, de leurs directions QF, VH, au point B du Levier QV, auquel elles ſont appliquées ſuivant ces directions. Par conſequent ces deux puiſſances données F, H, feront ici (*Th.* 21. *Corol.* 13.) équilibre entr'elles ſuivant ces directions ſur un appui placé en ce point B de ce Levier de figure & d'eſpece quelconques ; & que la charge qui en reſultera à cet appui, ſera (*Th.* 21. *part.* 1.) telle, & de direction telle qu'on les vient d'énoncer dans la ſolution précedente. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici démontrer.*

CAS II.

FIG 362. 363. 364. 365. *Dans lequel les directions données QF, VH, des puiſſances auſſi données F, H, ſe rencontrent (étant prolongées) en quelque point C.*

SOLUTION.

De ce point C de rencontre entr'elles de ces deux directions données QF, VH, prolongées, ſoient priſes ſur elles vers les puiſſances F, H, ainſi dirigées, des parties CD. CE : : F. H. Deſquelles parties ſoit fait le parallelogramme CDAE, dont elles ſoient les côtez, & dont la diagonale CA prolongée rencontre en B le Levier QV auſſi prolongé. La partie 6. du Th. 21. fait voir que ce point B

ſera celui ou ce Levier de figure & d'eſpece quelconques, étant appuyé, les deux puiſſances données F, H, qui lui ſont appliquées ſuivant les directions auſſi données QF, VH, feront équilibre entr'elles; & que la charge qui en reſultera a cet appui B, ſera (*Th.* 21. *part.* 2.) de C vers A ſuivant CA, & à chacune de ces puiſſances F, H, comme cette diagonale CA eſt à chacun des côtez correſpondans CD, CE, du parallelogramme CDAE. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici 2°. trouver & démontrer.*

PROBLEME XVIII.

Deux puiſſances quelconques F, H, étant données avec la direction QF de la premiere F, & ſon point d'application Q à un Levier QB d'appui donné B : on demande le point d'application de la ſeconde puiſſance H à ce Levier prolongé (s'il eſt neceſſaire) en ligne quelconque, & la direction que cette puiſſance H doit avoir pour faire équilibre avec l'autre puiſſance F ſur l'appui donné B de ce même Levier de figure & d'eſpece quelconques. FIG. 359. & ſuivantes juſqu'à 372

CAS I.

Dans lequel on veut que la direction cherchée de la puiſſance H, ſoit parallele à la direction donnée QF de l'autre puiſſance F pareillement donnée. FIG. 359. 360. 361.

SOLUTION.

Du point d'appui donné B ſoit menée BP perpendiculaire en quelque point P à la direction QF prolongée de la puiſſance F. Sur cette droite BP auſſi prolongée, s'il eſt neceſſaire, ſoit priſe BR. BP : : F. H. Après quoi par le point R ſoit menée RV parallele à QF, & qui rencontre en V le Levier BQ prolongé de figure & d'eſpece quelconques.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée à ce Levier en ce point V ſuivant VR, fera équilibre ſur l'appui donné B de ce même Levier avec l'autre puiſſance

donnée F, qu'on lui ſuppoſe appliquée en Q ſuivant QF. *Ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Puiſque (*ſolut.*) VH eſt parallele à QF, & qu'elle eſt rencontrée en R par BR perpendiculaire en P ſur QF; cette droite BR, où PBR eſt auſſi perpendiculaire en R ſur VH : & conſequemment BP, BR, ſont les diſtances de l'appui B à ces directions QF, VH, des puiſſances F, H. Donc ayant (*ſolut.*) BR. BP : : F. H. Ces deux puiſſances données F, H, ſeront ici (*Th.* 21. *Corol.* 13.) en équilibre entr'elles ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CAS II.

FIG. 362. & ſuivantes juſqu'à 372.

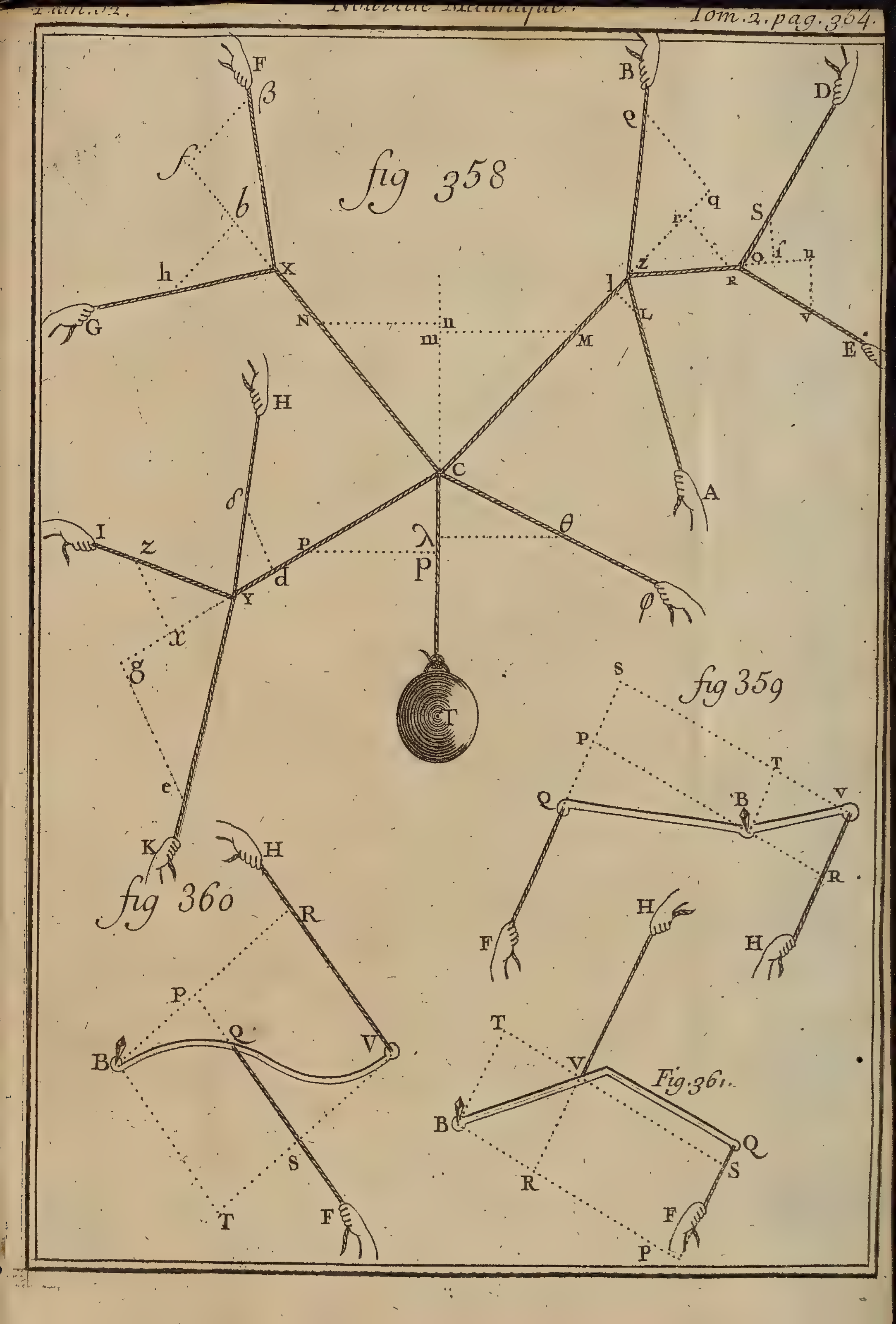
Dans lequel on veut que la direction demandée de la puiſſance donnée H, rencontre quelque part la direction donnée QF de la puiſſance F pareillement donnée.

SOLUTION I.

FIG. 362. 363. 364. 365.

Sur la direction donnée QF de la puiſſance donnée F, ſoit priſe QG à volonté; & de ſon point G ſoit menée en angle quelconque QGL avec elle, la droite GL qui ſoit à GQ comme la puiſſance donnée H eſt à la donnée F, c'eſt-à-dire, GL telle qu'on ait ici GL. QG : : H. F. Après cela du point d'appui donné B ſoit menée BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction QF prolongée de la puiſſance F. Enfin de ce point C ſoit menée CH parallele à GL, & qui prolongée rencontre en V ce Levier auſſi prolongé (s'il eſt neceſſaire) en ligne quelconque.

Je dis que ce point V ſera le point requis d'application de la puiſſance donnée H à ce Levier, & VH la direction qu'elle doit avoir pour faire équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F de direction CF ou QF pareillement donné. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*


fig 358
fig 359
fig 360
Fig. 361.

DEMONSTRATION.

D'un point D quelconque de CF, pris depuis C vers F, ſoit menée DA parallele à GL, & qui rencontre en A la droite BC prolongée, comme ſa parallele QL (*ſolut.*) eſt rencontrée en L par GL. Ce parallelifme de DA à GL, & de CA à QL, joint à ce que CD & QG ſont ſur la même droite CF, rend les deux triangles CDA, QGL, ſemblables entr'eux; & en conſequence DA. CD : : GL. QG (*ſolut.*) : : H. F. Soit preſentement menée AE parallele à CD, & qui rencontre en E la droite VH parallele (*ſolut.*) à GL, à laquelle DA vient auſſi d'être faite parallele. L'on aura ici le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſera ſur BC prolongée (s'il eſt neceſſaire) & les côtez CD, CE, ſur les directions CF, VH, des puiſſances F, H; & ce parallelogramme rendant CE = DA, l'on aura ici CE. CD : : DA. CD. Mais on vient de trouver DA. CD : : H. F. Donc on aura pareillement ici CE. CD : : H. F. Par conſequent (*Th.* 21. *part.* 6.) ces deux puiſſances données H, F, dirigées ſuivant la direction trouvée CH, & la donnée CF, ſeront ici en équilibre entre elles ſur l'appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

SOLUTION II.

Du point d'appui donné B ſoit BP perpendiculaire en quelque point P à la direction donnée & prolongée QF de la puiſſance F. Sur cette perpendiculaire BP auſſi prolongée, ſoit priſe BD. BP : : F. H. Du point B ſoit menée la droite BV égale à BD, ou plus grande qu'elle en raiſon quelconque pour plus de generalité; laquelle droite BV rencontre quelque part en V le Levier QB prolongé, s'il eſt neceſſaire. Autour de cette droite BV, comme diametre, ſoit décrit le cercle BRVR, qui rencontre en R, R, l'arc circulaire RDR ou RRD décrit du centre B & du rayon BD. FIG. 366. & ſuivantes juſqu'à 372.

Cela fait, je dis que la puiſſance donnée H, appliquée au point V du Levier BQ prolongé de ce côté-là, & di-

rigée de V vers H ſuivant celle qu'on voudra des deux droites VR, VR, fera équilibre ſur l'appui donné B de ce Levier, avec l'autre puiſſance donnée H, qu'on lui ſuppoſe appliquée en F ſuivant QF. *Ce qu'il falloit encore* 2°. *trouver.*

DEMONSTRATION.

Chaque demi-cercle BRV rendant la droite BR perpendiculaire en R ſur RV ou VH, comme la droite BP l'eſt (*ſolut.*) en P ſur PF ou QF; ces deux droites BR, BP, ſont les diſtances de l'appui B à ces deux directions VH, QF, des puiſſances H, F. Mais l'arc de cercle RDR ou RRD décrit du centre B par D, R, rendant BR=BD, rend auſſi BR. BP :: BD. BP (*ſolut.*) :: F. H. Donc ces deux puiſſances F, H, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances BP, BR, de leurs directions QF, VH, à l'appui B du Levier auquel elles ſont appliquées ſuivant ces directions. Par conſequent (*Th.* 21. *Corol.* 3.) ces deux puiſſances données F, H, ſeront ici en équilibre entr'elles ſur l'appui donné B de ce Levier quelconque. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

FIG. 362. 363. 364. 365. Suivant la ſolut. 1. & la démonſtr. du cas 2. l'angle CDA des Fig. 362. 363. 364. 365. étant égal à l'arbitraire QGL, & pouvant ainſi varier à l'infini, ſans détruire l'équilibre démontré en conſequence de cette ſolut. 1. peut conſequemment changer en une infinité d'autres la direction demandée CE ou VH de la puiſſance donnée H, pendant que la direction donnée CF de l'autre puiſſance donnée F, demeure toûjours la même, ſans que (*démonſtr. de la ſolut.* 1.) ces deux puiſſances données ceſſent de faire équilibre entr'elles ſur l'appui donné B. D'où l'on voit que le Problême ici propoſé, y eſt ſuſceptible d'une infinité de ſolutions, à la maniere de la ſolut. 1.

COROLLAIRE II.

La ſolut. 2. & la dém. du cas 2. convenant également à chacune des deux directions RVH, VRH, de la puiſſance donnée H, determinées par le point V, & par chacune des deux coupes R, R, reſultantes de BV plus grande que BD en quelque rapport que ce ſoit, c'eſt-à-dire, (*ſolut.*) de BV en plus grande raiſon quelconque à BP que la puiſſance donnée F n'eſt à la puiſſance H; cette ſolution & cette demonſtration du cas 2. font voir enſemble que cette puiſſance H fera également ici équilibre ſuivant chacune de ces deux directions VH, VH, ſur l'appui donné B, avec la puiſſance F de direction donnée, & toûjours la même. Ce qui pour chaque rapport de majorité de BV à BD, ou à ſon égale BG, donne deux ſolutions du Problême: de ſorte que ce rapport pouvant varier à l'infini, ce Problême pourra ainſi avoir une infinité de ſolutions, double de l'infinité de ces rapports, à la maniere de la ſolut. 2. comme il en peut avoir auſſi une infinité (*Corol.* 1.) à la maniere de la ſolut. 1. Fig. 366. & ſuivantes jusqu'à 372.

COROLLAIRE III.

Si preſentement, dans la même ſolut. 2. du cas 2. l'on ſuppoſe que le point V eſt au point E, où le Levier eſt rencontré par DE tangente en D de l'arc RDR ou DRR, & qu'ainſi BV ſoit en BE; le cercle BRVR, qui ſe trouve alors de ce diametre BE, rencontre (l'angle BDE étant droit) l'arc RDR ou DRR en D, & en un autre point également diſtant de E de l'autre côté de ce diametre BE: ce qui fait alors paſſer les points R, R, en ces deux-là, & les deux droites égales VR en deux touchantes ED en ces points de l'arc RDR ou DRR, égales auſſi entr'elles, leſquelles ſe trouvent ainſi pour lors les directions de la puiſſance donnée H, non ſeulement propres l'une & l'autre à la mettre en équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F de direction donnée, & toûjours la même QF; mais encore dont celle qui eſt ſuivant la tou-

chante ici marquée ED ou DE de l'arc RDR ou DRR du centre B, se trouve comme (*solut.* 2.) QF ou PF, perpendiculaire à la droite DBP, & consequemment parallele à QF, de même que dans le premier cas, lequel se trouve encore ainsi resolu en consequence de la solution du second.

COROLLAIRE IV.

Si enfin dans la même solut. 2. du cas 2. le Levier passoit par le point D, en qui soit ainsi le point V, & le diametre BV sur le rayon BD auquel il se trouveroit ainsi reduit. Le cercle BRVR n'ayant alors pour diametre que ce rayon BD de l'arc RDR ou DRR, ne rencontreroit cet arc qu'au seul point D, où il le toucheroit, & où leurs deux sections R, R, se réuniroient en un seul attouchement en ce point D, où les deux droites VR, VR, se confondroient en une seule ED ou DE touchante commune de ces deux cercles en ce point D. Ce qui ne donneroit alors que cette seule direction de la puissance donnée H, propre à la mettre en équilibre sur l'appui donné B, avec l'autre puissance donnée F de direction donnée QF; & ne fourniroit ainsi qu'une seule solution du Problême, dont BV plus grande que BD en quelque rapport que ce soit, en fournit deux (*Corol.* 2. 3.) pour chacun de ces rapports. Mais cette direction ED ou DE touchante commune en D des deux cercles qui s'y toucheroient aussi, BD étant ici le rayon de l'un & le diametre de l'autre; perpendiculaire qu'elle seroit en ce point D à la droite DBP ou DPB comme QF lui est (*solut.* 2. *du cas* 2.) perpendiculaire en P, seroit encore ici parallele à QF comme dans le Corol. 2. Donc les puissances données H, F, ici dirigées suivant ces paralleles ED ou DE, & QF y étant entr'elles (*solut. du cas* 2.) en raison reciproque des distances BD, BP, de ces directions à l'appui donné B, feroient ici (*Th.*21.*Cor.*13.) équilibre entr'elles sur cet appui B, comme dans la solut. du cas 1. qui se trouve encore ici resolu, ainsi que dans le Corol. 2. en consequence de la solution du cas 2.

SCHOLIE.

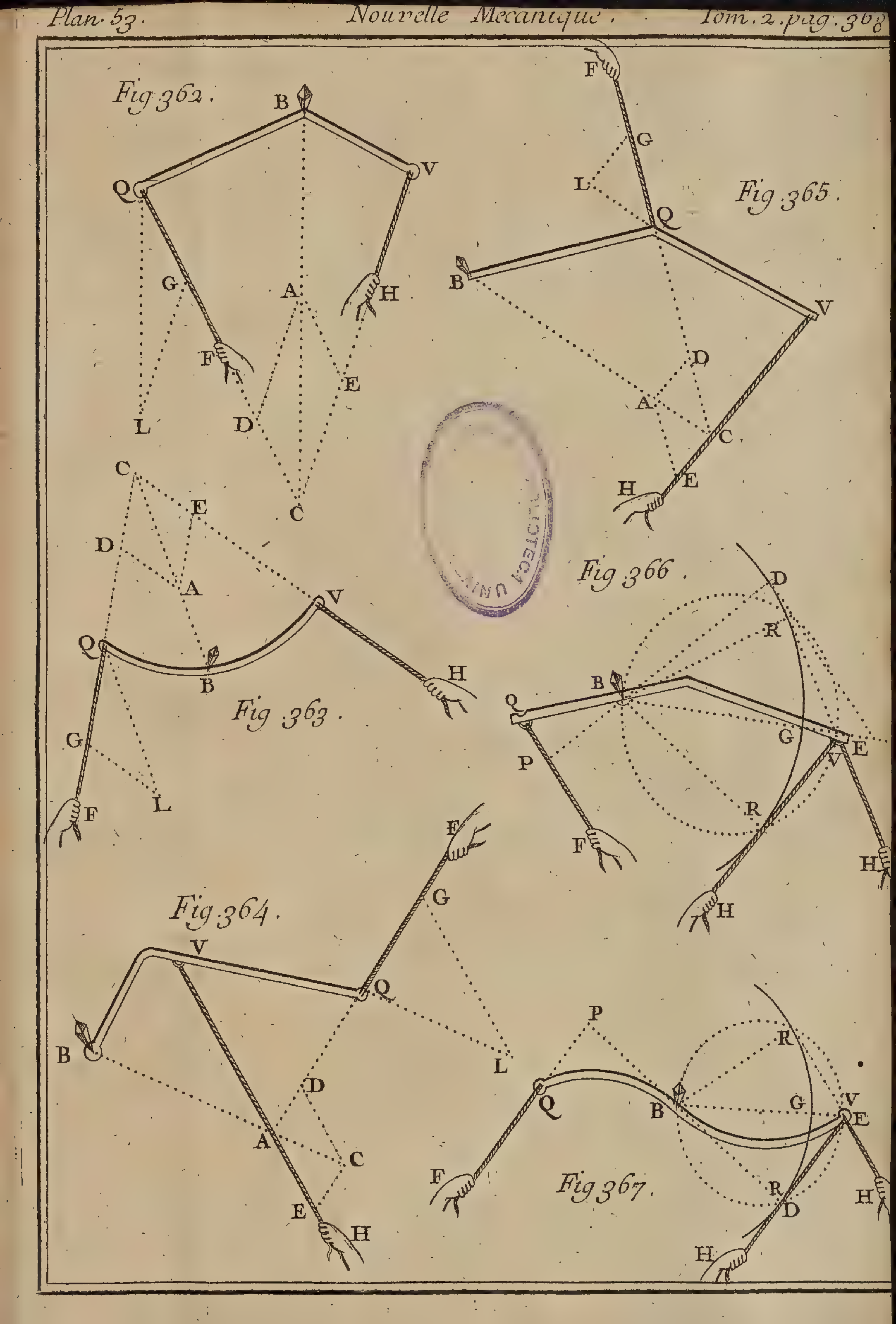


Fig. 362.
B
Q
V
G
A
H
F
E
L
D
C
Fig. 365.
F
G
L
Q
B
V
D
A
C
H
E
C
E
D
A
V
Q
B
H
Fig. 363.
G
L
F
Fig. 366.
D
R
B
Q
G
E
P
V
R
F
H
H
Fig. 364.
E
G
V
Q
B
P
L
D
A
C
E
H
R
G
V
Q
B
E
F
Fig. 367.
R
D
H
H

SCHOLIE.

La raiſon pour laquelle j'ai dit dans la ſolut. 2. du cas 2. que BV doit être égale à BD, ou plus grande qu'elle en quelque rapport que ce ſoit ; c'eſt que ſi BV étoit moindre que BD, le cercle BR, VR decrit de ce diametre BV, ne rencontreroit nulle part l'autre RDR ou DRR decrit du rayon BD & du centre B ; & que faute de cela il ne determineroit aucune direction de la puiſſance H, bien loin de lui en determiner une ſuivant laquelle elle fît équilibre ſur l'appui donné B avec l'autre puiſſance donnée F, & de direction donnée QF, ainſi que l'exige le Problême.

PROBLEME XIX.

Deux puiſſances F, H, étant données avec leurs points Q, V, d'application à un Levier quelconque QV d'appui donné B, trouver les directions requiſes à ces deux puiſſances, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui B. Fig. 373. 374. 375. 376.

SOLUTION.

De ce point donné B, aux deux points auſſi donnez Q, V, d'application des puiſſances données F, H, au Levier quelconque QV, ſoient menées les droites BQ, BV, deſquelles, comme diametres, ſoient decrits les cercles BPQP, BRVR, dans leſquels de leur point commun B ſoient inſcrites des droites ou cordes BP, BR, en raiſon reciproque des puiſſances données F, H, en ſorte qu'on ait ici BP. BR : : H. F. Après cela du centre B, & de ces rayons BP, BR, ſoient decrits les arcs de cercles PP, RR, dont le premier rencontre le cercle BPQP en P, P ; & le ſecond, le cercle BRVR en R, R.

Cela fait, je dis que ſi du point Q par les points P, P, l'on mene les deux droites QP, QP ; & que du point V par les points R, R, l'on mene de même les deux droites VR, VR ; la puiſſance F dirigée ſuivant celle qu'on voudra des deux premieres QF, QF, de ces quatre droites, fera

équilibre ſur l'appui donné B, avec l'autre puiſſance H, dirigée ſuivant celle qu'on voudra auſſi des deux autres droites VH, VH. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

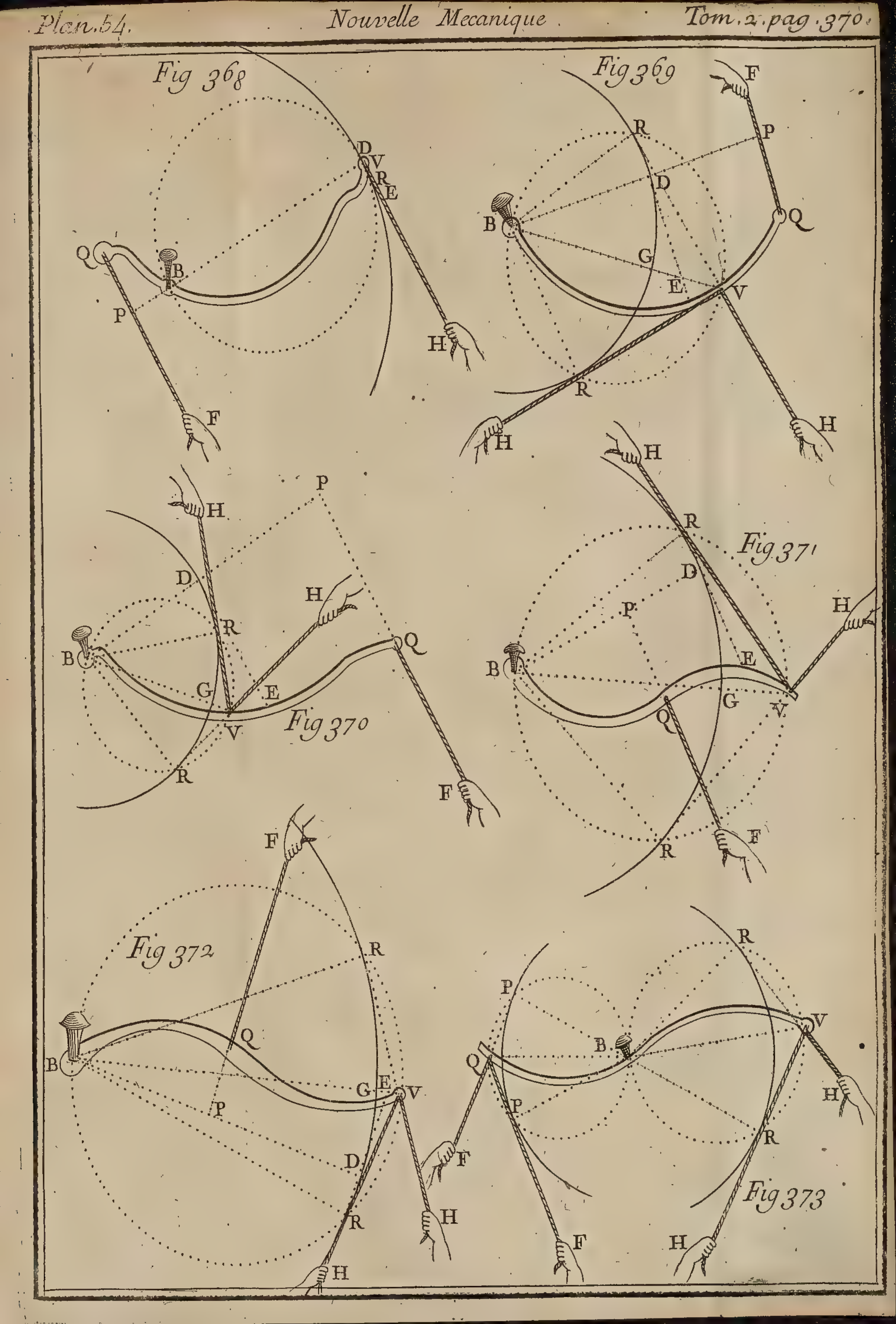
Les demi-cercles BPQ, BRV, rendant droits les angles de ces noms qu'ils contiennent, les droites BP, BR, ſeront les diſtances de l'appui donné B aux directions QF, VH, des puiſſances données F, H. Ainſi ayant (*ſolut.*) BP. BR :: H. F. Ces deux puiſſances H, F, ſont ici entr'elles en raiſon reciproque des diſtances de leurs directions à cet appui B. Donc (*Th.* 1. *Corol.* 3.) elles demeureront ici en équilibre entr'elles ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

La ſolution & la demonſtration convenant également à chacune des deux directions PF, PF, de la puiſſance F, & à chacune des deux VH, VH, de l'autre puiſſance H, tant que les cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, ſeront entr'elles en raiſon reciproque de ces puiſſances F, H; l'on voit que chaque cas des grandeurs que ces cordes auroient en ce rapport, fournira deux ſolutions du Problême dont il s'agit ici. Donc ces grandeurs des cordes BP, BR, pouvant varier à l'infini, ſans ceſſer d'être entr'elles en ce rapport, excepté dans le cas du Scholie ſuivant; ce Problême pourra ainſi avoir une infinité de ſolutions, double de l'infinité des cas où ces grandeurs des cordes BP, BR, peuvent ainſi varier ſans ceſſer d'être entr'elles en raiſon reciproque des puiſſances données F, H, qui, à cauſe des angles (*ſolut.*) toûjours droits BPQ, BRV, auront toûjours ces cordes BP, BR, des cercles BPQP, BRVR, pour diſtances de l'appui B à leurs directions PF, VH.

SCHOLIE.

Il eſt à remarquer que ſi la poſition de la direction QF de la puiſſance F étoit donnée telle que BR priſe à BP en


Fig 368
Fig 369
Fig 370
Fig 371
Fig 372
Fig 373

raison de F à H, se trouvât plus grande que BV diametre du cercle BRVR; le Problême dont il s'agit ici seroit impossible : puisque cette droite BR ne pourroit plus être inscrite dans ce cercle, ni consequemment être la distance de l'appui B à la direction requise par V à la puissance H.

PROBLEME XX.

Deux puissances F, H, étant données à volonté avec les points Q, V, de leurs applications à un Levier quelconque QBV ou BQV d'appui B donné aussi à volonté; diriger ces deux puissances de maniere qu'elles fassent équilibre entr'elles sur cet appui B; & que la charge (que j'appelle P) qui lui resultera de leur concours d'action sur lui, soit à chacune de ces deux puissances F, H, en raison d'une grandeur donnée quelconque A à chacune des deux autres D, E, pareillement données, c'est-à-dire, en sorte qu'on ait ici P. F. H :: A. D. E. Fig. 377. 378 379. 380.

REMARQUE.

On sçait (*Th.* 21. *part.* 3. *joint au Th.* 1. *Cor.* 6. *art.* 1.) que pour rendre ce Problême possible, cette charge P de l'appui B, doit être telle par rapport aux puissances F, H, du concours desquelles elle doit resulter, que de ces trois grandeurs P, F, H, & en consequence (*Hyp.*) des trois A, D, E, la somme de deux quelconques soit plus grande que la troisiéme. Cela posé, voici la solution du Problême dans les deux cas, dans le premier desquels l'appui donné B se trouve entre les puissances F, H, comme dans les Fig. 377. 378. & dans le second ces puissances sont toutes deux d'un même côté de cet appui B, comme dans les Fig. 379. 380. Ces deux cas pourroient se resoudre à la fois par la methode qu'on va voir leur convenir à tous deux: mais le different arrangement des trois points donnez Q, B, V, & B, Q, V; y causeroit de doubles repetitions en lettres differentes, & par consequent quelque confusion dans la solution & dans la démonstration generales qu'on pourroit donner de ces deux cas à la fois:

c'eſt pour plus de netteté que nous les allons reſoudre & démontrer l'un après l'autre, quoique par la même methode.

CAS I.

FIG. 377. 378. *Dans lequel l'appui B eſt donné entre les points donnez Q, V, d'application des puiſſances F, H, au Levier QBV des Fig. 377. 378.*

SOLUTION.

Par les extrêmitez Q, V, du Levier donné QBV dans les Fig. 377. 378. ſoit menée la droite QV, ſur laquelle ſoit fait un triangle QKV, dont les côtez KV, KQ, ſoient à cette baſe QV, comme les grandeurs données D, E, ſont à la donnée A; c'eſt-à-dire, un triangle QKV, tel qu'il ait ſes côtez QV. KV. KQ : : A. D. E. lequel triangle ſera toûjours poſſible; puiſque de ces trois dernieres grandeurs données A, D, E, la ſomme de deux quelconques eſt (*Hyp.*) plus grande que la troiſiéme. Autour de ce triangle QKV ſoit circonſcrit un cercle QKVC rencontré auſſi en C par la droite KBC, menée de ſon point K par l'appui donné du Levier donné QBV, droit ou courbe, il n'importe. Enfin de ce point C par les extrêmitez Q, V de ce Levier ſoient menées les droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378.

Cela fait, je dis que ces droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378. ſont les directions requiſes aux puiſſances F, H, pour demeurer en équilibre entr'elles ſur l'appui donné B, ainſi qu'on l'exige; & pour cauſer à cet appui par leur concours la charge qu'on lui exige auſſi; c'eſt-à-dire, que ces deux puiſſances F, H, appliquées ſuivant ces directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier de figure quelconque QBV, & d'appui donné entr'eux, non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B; mais encore qu'elles lui cauſeront alors par leur

concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres données D, E. *Ce qu'il falloit 1°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit fait le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit ſur KC prolongée, s'il eſt neceſſaire, & dont les côtez CD, CE, ſoient de même ſur les directions QF, VH, (auſſi prolongées s'il eſt neceſſaire) des puiſſances F, H: l'on aura (*ſolut.*) les angles QVK=KCQ=ACD, & VQK=KCV=ACE=CAD. Donc le triangle QKV a deux angles QVK, VQK, égaux chacun à chacun des deux angles ACD, CAD, du triangle ADC; & conſequemment ces deux triangles QKV, ADC, ſont ſemblables entr'eux. Donc QV: KV. KQ : : CA. CD. DA : : CA. CD. CE. Mais (*ſolut.*) QV. KV. KQ : : A. D. E (*Hyp.*) : : P. F. H. Donc CA. CD. CE : : P. F. H.

Or en conſequence de CD. CE : : F. H. (*Th.* 21. *part.* 6.) on voit qu'il y aura ici équilibre entre ces deux puiſſances F, H, ſur l'appui donné B, par où paſſe (*ſolut.*) la diagonale CA du parallelogramme CDAE, dont les côtez CD, CE, ſont ſur les directions de ces puiſſances F, H.

De plus en ce cas d'équilibre (*Th.* 21. *part.* 3.) on voit auſſi que la charge de cet appui (que j'appelle auſſi B comme lui) reſultante du concours de ces deux puiſſances F, H, eſt à ces mêmes puiſſances, comme cette diagonale CA eſt à ces deux côtez CD, CE, de ce parallelogramme CDAE: c'eſt-à-dire, B. F. H : : CA. CD. CE. De ſorte que venant de trouver auſſi P. F. H : : CA. CD. CE. L'on aura ici B=P. Ainſi ayant (*Hyp.*) P. F. H : : A. D. E. L'on aura pareillement ici B. F. H : : A. D. E.

Donc les deux puiſſances données F, H, étant appliquées ſuivant les directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier QBV d'appui B donné entr'eux dans les Fig. 377. 378. non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais

encore qu'elles lui causeront par leur concours d'action sur lui, une charge B=P, laquelle sera à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qui est tout ce qu'il falloit ici 1°. démontrer.*

CAS II.

Fig. 379. 380. *Dans lequel les deux puissances données F, H, sont d'un mesme côté de l'appui donné B, comme dans les Fig. 379. 380.*

SOLUTION.

Ce second cas se resoudra de même que le premier, à la difference des lettres près. Pour le voir, par les extrêmitez B, V du Levier BQV donné de figure quelconque dans les Fig. 379. 380. soit menée la droite BV, sur laquelle soit fait un triangle BKV, dont les côtez KV, KB, soient à cette base BV, comme les grandeurs données A, E, sont à la donnée D : c'est-à-dire, un triangle tel qu'il ait ses côtez KV. KB. BV : : A. E. D. Et en consequence KV. BV. KB : : A. D. E. Lequel triangle sera toûjours possible, à cause que de ces trois grandeurs A, D, E, la somme de deux quelconques est (*Hyp.*) plus grande que la troisiéme. Autour de ce triangle BKV soit circonscrit un cercle BKVC rencontré aussi en C par la droite KQC menée de son point K par celui du milieu des trois points donnez B, Q, K, lequel est ici celui Q d'application de la puissance F au Levier donné BQV ; laquelle droite KQC soit prolongée vers F dans l'une & dans l'autre de ces deux Figures. Enfin de son point C par les extrêmitez B, V, de ce Levier, soient menées les droites BAC, VCH.

Cela fait, je dis que les droites CQF, VCH, sont les directions requises aux deux puissances données F, H, pour demeurer en équilibre entr'elles sur l'appui donné B, ainsi qu'on l'exige ; & pour causer à cet appui par leur

concours d'action ſur lui, la charge qu'on lui exige auſſi : c'eſt-à-dire, que ces deux puiſſances F ; H, appliquées ſuivant ces directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier donné de figure quelconque BQV, & d'appui B donné, d'un ſeul côté duquel ſont ces deux points Q, V, non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais encore qu'elles lui cauſeront par leur concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qu'il falloit 2°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Soit fait le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA ſoit ſur BC prolongée, s'il eſt neceſſaire ; & dont les côtez CD, CE, ſoient ſur les directions QF, VH auſſi prolongées des puiſſances F, H ; l'on aura (*ſolut.*) les angles BVK=KCB=DCA, & VBK=KCV=AEC=CDA. Donc le triangle BKV a deux angles BVK, VBK, égaux chacun à chacun des deux angles DCA, CDA, du triangle DAC ; & conſequemment ces deux triangles BKV, DAC, ſont ſemblables entr'eux. Donc KV. BV. KB : : CA. CD. DA : : CA. CD. CE. Mais (*ſolut.*) KV. BV. KB : : A. D. E (*Hyp.*) : : P. F. H. Donc CA. CD. DE : : P. F. H. ainſi que dans la démonſtration de la ſolut. du cas 1. de ſorte qu'en continuant cette démonſtration-ci comme celle-là, l'on trouvera ici comme là, que les deux puiſſances données F, H, étant appliquées ſuivant les directions QF, VH, aux points donnez Q, V, de leurs applications au Levier donné QBV d'appui donné B d'un même côté de ces deux points dans les Fig. 379. 380. non ſeulement demeureront en équilibre entr'elles ſur cet appui B, mais encore qu'elles lui cauſeront par leur concours d'action ſur lui, une charge qui ſera à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, pareillement données. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici 2°. démontrer.*

Si dans les Fig. 379. 380. on transpose les points donnez Q, V, en sorte que le Levier BQV y devienne BVQ encore du cas 2. de pareille transposition, des puissances F, H, & des lettres D, E, rendront ces deux Figures propres à ce nouveau Levier BVQ, aussi-bien que la solution & la démonstration du cas 2. en y changeant Q, F, D, en V, H, E; & reciproquement. Tout cela est si visible, qu'il auroit été fort inutile d'y repeter ces deux Fig. 379. 380. aussi peu changées avec la solution & la démonstration du cas 2. qui ne differe point ici de ce qu'elles sont là, qu'en ces six lettres ainsi transposées.

COROLLAIRE I.

Fig. 377. 378. I. Dans le cas 1. de la Fig. 377. 378. le Levier QBV déterminant la longueur de la droite QV, & le triangle QKV ayant (*solut.*) ses côtez QV. KV. KQ : : A. D. E. qui sont (*Hyp.*) trois grandeurs données; son point K est déterminé, aussi-bien que ses deux autres points Q, V, & que l'appui donné B du Levier donné QBV. Donc tant que ces deux points K, B, sont differens, la position de la droite KBC, qui passe (*solut.*) par ces deux points déterminez K, B, est aussi déterminé avec le point C, où elle rencontre la circonference du cercle QKVC déterminé de position & de grandeur par la détermination de ses trois points Q, K, V. Ainsi les directions QF, VH, des puissances F, H, devant (*solut.*) des points donnez Q, V, passer par ce point déterminé C, en les prolongeant vers lui, elles sont aussi de positions déterminées; & consequemment les seules qui puissent satisfaire ici (*Fig.* 377. 378.) au premier cas du Problême, tant que les points K, B, y sont differens. Donc ce cas 1. de ce Problême n'est alors susceptible que d'une seule solution.

Fig. 379. 380. II. De même dans le cas 2. (*Fig.* 379. 380.) le Levier donné BQV déterminant la longueur de la droite BV, & le triangle BKV ayant (*solution*) ses côtez KV. KB. BV : : A. E. D. qui (*Hyp.*) sont trois grandeurs données; son point K est déterminé, aussi-bien que ses points donnez B, V, & que son point d'appui donné Q du

du Levier BQV. Donc tant que ces deux points K, Q, ſont differens comme ici, la poſition de la droite KQC, qui (*ſolut.*) paſſe par ces deux points determinez K, Q, eſt auſſi determinée avec le point C, où elle rencontre la circonference du cercle BKVC determiné de poſition & de grandeur par la determination de ſes trois points B, K, V. Ainſi les directions QF, VH, des puiſſances F, H, devant (*ſolut.*) des points donnez Q, V, paſſer par ce point determiné C, en les prolongeant vers lui; elles ſont auſſi de poſitions determinées, & conſequemment les ſeules qui puiſſent ſatisfaire ici (*Fig.* 379. 380.) au ſecond cas du Problême, tant que les points K, Q, y ſont differens. Donc ce cas 2. de ce Problême ici propoſé, n'eſt alors ſuſceptible que d'une ſeule ſolution.

III. Donc en general (*art.* 1. 2.) tant que le point K eſt different de celui du milieu des trois points donnez Q, B, V, du Levier donné quelconque QBV, ou BQV, ou BVQ; le Problême dont il s'agit ici, n'eſt ſuſceptible que d'une ſeule ſolution dans celui qu'on voudra des deux cas auſquels on le vient de reduire. FIG. 377. 378. 379. 380.

IV. Mais ſi le Levier eſt de telle figure que le point K ſe confonde avec celui quelconque de ſes trois points donnez Q, B, V, qui s'y trouve entre les deux autres; alors la poſition de la droite, qui ſuivant les ſolutions des cas 1. 2. doit paſſer par ce point moyen & par le point K, ſe trouvant indeterminé, le point C, dans lequel elle doit rencontrer le cercle qui paſſe par les deux extrêmes des trois points donnez, & par le point K, pourra ſe trouver en une infinité de la circonference de ce cercle : ce qui variant à l'infini les directions CF, CH, CB, des puiſſances F, H, de l'appui B, rendra pour lors le Problême dont il s'agit ici ſuſceptible d'une infinité de ſolutions differentes par les ſeules differences de ces directions.

COROLLAIRE II.

Si la droite QV dans les Fig. 377. 378. du cas 1. & BV dans les Fig. 379. 380. du cas 2. y étoit le Levier donné,

dont l'appui donné fût en *b* dans les Fig. 377. 378. & que le point donné d'application de la puissance F au Levier BV des Fig. 379. 380. fût en *q*: la solution & la démonstration de chacun des deux cas precedens, seroient les mêmes ici que là, en substituant seulement *b* au lieu de B dans celles du cas 1. & *q* au lieu de Q dans celles du cas 2. Ce qui résoudroit ici le Problême pour des Leviers droits, comme là pour des Leviers courbes quelconques.

Mais chacun de ces deux nouveaux points donnez, un sur chacun de ces Leviers droits, sçavoir, *b* au lieu de B dans les Fig. 377. 378. & *q* au lieu de Q dans les Fig. 379. 380. s'y trouvant differens chacun du point K de sa Figure; il suit de l'art. 3. du precedent Corol. 1. que le Problême dont il s'agit n'y seroit susceptible que d'une seule solution pour chacun de ces Leviers droits.

PROBLEME XXI.

Fig. 377. 378. 381. 382. 383. 384. *Toutes choses demeurant ici les mêmes que dans le précedent Probl. 20. excepté que le point d'appui du Levier, n'est plus ici donné comme il l'étoit là; & qu'au lieu de lui, c'est l'angle (là indifferent) de la direction de sa charge avec la droite comprise entre les extrêmitez du Levier, qui est ici donnée, par exemple, égal au donné M de la Fig. 381. & de la Fig. 382. On demande presentement ici l'appui de ce Levier avec les directions requises aux deux puissances données F, H, pour faire équilibre entr'elles sur cet appui, de maniere que la charge qui lui doit resulter de leur concours d'action sur lui, soit suivant la direction qu'on lui exige ici, & encore à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune de deux autres pareillement données D, E; ainsi que dans le précedent Probl. 20.*

CAS I.

Dans lequel l'appui du Levier QBV des Fig. 377. 378. est demandé entre les points donnez Q, V, d'application des puissances F, H, à ce Levier. Fig. 377. 378. 381.

Solution.

Soit encore ici (Fig. 377. 378. comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) la droite QV comprise entre les extrêmitez données Q, V, du Levier proposé QBV ; sur laquelle soit le triangle rectiligne QKV fait de côtez QV. KV. KQ : : A. D. E. auquel soit circonscrit le cercle QKVC : le tout (dis-je) comme dans le cas 1. du precedent Probl. 20. Après cela (specialement pour ici) soit menée la droite KC, de maniere qu'elle fasse avec la droite QV un angle C*b*V égal au donné M de la Fig. 381. ce qui est facile à faire : laquelle droite KC rencontre en B le Levier proposé QBV, & en C le cercle QKVC. De ce point C par les données Q, V, soient menées les droites CQF, CVH, dans la Fig. 377. & CFQ, CHV, dans la Fig. 378. soit aussi fait (comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) le parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA soit sur la droite CBK prolongée par de-là C dans la Fig. 378. & les côtez CD, CE, sur les droites CF, CH, aussi prolongées par de-là C dans la Fig. 378.

Cela fait, on trouvera, comme dans la solut. du cas 1. du precedent Probl. 20. que les deux puissances données F, H, dirigées suivant les droites QF, QH, qui prolongées passent des points donnez Q, H, par le trouvé C, doivent ici (*Fig.* 377. 378.) faire équilibre entr'elles sur un appui placé au point trouvé B du Levier proposé QBV ; & que CB ou BC est la direction de la charge de cet appui B, resultante alors du concours d'action de ces deux puissances sur lui ; & que cette charge est à chacune de ces deux mêmes puissances données F, H, comme

la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, données avec elle. Donc l'angle C*b*V dans les Figures 377. 378. dont il s'agit ici, étant (*conſtr.*) égal au donné M de la Fig. 381. le point B ſera ici celui de l'appui qu'on y demandoit; & CB ou BC la direction demandée de ſa charge reſultante du concours d'action des deux puiſſances F, H, ſur cet appui; deſquelles puiſſances données F, H, les droites QF, VH, ſont auſſi les directions demandées: & enfin cette charge de l'appui trouvé B, ſera ici (comme dans la ſolut. du cas 1. du precedent Probl. 20.) à chacune de ces deux puiſſances F, H, comme la grandeur donnée A eſt à chacune des deux autres D, E, données avec elle. *C'eſt tout ce qu'il falloit ici 1°. trouver & démontrer.*

CAS II.

Fig. 382. 383. 384. *Dans lequel l'appui demandé doit avoir d'un ſeul côté de lui les deux puiſſances F, H, comme dans les Fig. 379. 380. & dans les Fig. 383. 384.*

SOLUTION.

Soit dans chacune des Fig. 383. 384. une ligne VPQRS, droite ou courbe quelconque, indefinie du côté de S, une partie de laquelle commencée en V vers S, doit être le Levier dont on demande l'appui du côté de S par rapport à deux points Q, V, qui en ſoient donnez tous deux de l'autre côté de cet appui, & auſquels on veut que les puiſſances F, H, ſoient appliquées à ce Levier d'appui demandé depuis Q vers S. Sur la droite VQ compriſe entre les deux points donnez Q, V, ſoit un triangle rectiligne VQB, dont les côtez VQ, VB, BQ, ſoient entr'eux comme les grandeurs A, D, E, telles que la ſomme de deux quelconques d'entrelles ſoit ici, comme dans le cas 1. plus grande que la troiſiéme, pour rendre ici, comme là, le Problême poſſible; c'eſt-à-dire, un triangle rectiligne VQB, dont les côtez ſoient VQ. VB. BQ : : A. D. E.

Autour de ce triangle VBQ soit circonscrit un cercle VTQXBCG; & après avoir pris (de grandeur quelconque) *Mu*=*Md* dans la Fig. 382. & y avoir mené la droite *ud*, soit fait sur la droite BV des Fig. 383. 384. un triangle isoscelle V*m*B, semblable à l'isoscelle *u*M*d*, qui est sur *du* dans la Fig. 382. & qui consequemment ait son angle *m* égal à l'angle M de celui-ci. Autour de cet autre triangle V*m*B soit aussi circonscrit un cercle VO*mb*B*n*, lequel rencontre en *b* la ligne proposée quelconque VPQR*b*S, sur laquelle on veut que depuis Q vers S soit le Levier d'appui demandé du côté de S par rapport au point donné Q. De ce point *b* par B soit menée la droite *b*BZ, qui rencontre en C le cercle VPQXBCG. Enfin de ce point C par les donnez Q, V, d'application des puissances F, H, au Levier qu'on veut depuis V vers S sur la ligne quelconque VPQR*b*S, soient menées les droites CQ, CV.

Cela fait, je dis que si l'on dirige les puissances F, H, suivant QF, VH, en lignes droites avec CQ, CV; ces deux puissances données F, H, feront équilibre entre-elles sur un appui placé au point *b* du Levier VRQR*b*, auquel elles seront ainsi appliquées; que la charge de cet appui *b*, resultante alors de leur concours d'action sur lui, sera pour lors à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux, D, E, données avec elle; que la direction de cette charge sera suivant C*b* ou *b*C; & qu'enfin cette direction fera avec la droite V*b* (comprise entre les extrêmitez V, *b*, du Levier trouvé VPQR*b*) un angle C*b*V égal au donné M. *C'est tout ce qu'il falloit ici 2°. trouver.*

DEMONSTRATION.

Si dans les Fig. 383. 384. l'on fait un parallelogramme CDAE, dont la diagonale CA soit en ligne droite avec CB, & ses côtez CD, CE, en lignes droites aussi CQ, CV; & que dans ces deux Fig. 383. 384. l'on ajoûte K au point Q; la démonstration de la solution du cas 2. du

precedent Probl. 20. employée ici, y fera voir comme là, que les deux puissances F, H, dirigées suivant QF, VH, doivent faire équilibre entr'elles sur un appui placé au point *b* (c'étoit-là en B) du Levier trouvé VPQR*b*; que C*b* ou *b*C (ayant sur elle la diagonale CA du parallelogramme CDAE) est la direction de la charge de cet appui *b*, resultante alors du concours d'action de ces deux puissances sur lui; & que cette charge est à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux D, E. données avec elle. Donc le cercle VO*mb*B*n* rendant dans les mêmes Fig. 383. 384. l'angle B*b*V (compris entre les droites B*b*, V*b*) égal à l'angle B*m*V qu'on vient de faire (*solut.*) égal au donné M de la Fig. 382. le point *b* sera ici dans les Fig. 383. 384. celui de l'appui qu'on y demandoit; la droite CB*b* (*Fig.* 383.) & *b*BC (*Fig.* 384.) sera la direction demandée de la charge de cet appui *b*, resultante du concours d'action des puissances F, H, sur lui; les droites QF, VH, dirigées suivant CQ, CV, seront aussi les directions requises des puissances F, H, pour les mettre en équilibre entr'elles sur cet appui trouvé *b*: & enfin la charge de ce même appui *b*, sera ici (de même que dans la solut. du cas 2. du precedent Probl. 20.) à chacune de ces deux puissances F, H, comme la grandeur donnée A est à chacune des deux autres D, E, données avec elle. *C'est tout ce qu'il falloit ici 3°. démontrer.*

COROLLAIRE I.

Fig. 377. 378. 381.

I. Dans les Fig. 377. 378. les rapports donnez (*solut. du cas* 1.) des côtez KQ, KV, du triangle rectiligne QKV, à la base Q, V, donnée de position & de grandeur par les points Q, V, déterminent la position du point K par rapport à cette droite QV de position donnée; & consequemment la droite KC ne peut faire avec elle qu'un seul angle V*b*C égal au donné M dans la Fig. 381. tel qu'il est requis dans le Problême. Ainsi le point *b* de cet angle est aussi determiné que le point K; & consequemment

la position de la droite KbC est determinée par ces deux points determinez K, b, de même que la position & la grandeur du cercle QKVC le sont par les trois points déterminez Q, K, V, par lesquels il passe. Donc le point C, dans lequel la droite KbC rencontre ce cercle, est aussi determiné que les points donnez Q, V, & que le point B où elle rencontre le Levier QBV de position donnée. Par consequent les directions CQ, CV, des puissances F, H, sont ici déterminées de même que la direction CB ou BC de l'appui B, laquelle l'est encore d'ailleurs en consequence de ces deux-là. Donc le cas 1. du Problême dont il s'agit ici, n'est susceptible que d'une seule solution.

II. Dans les Fig. 383. 384. les rapports donnez (*solut. du cas* 2.) des côtez VB, QB, du triangle rectiligne VQB, à son côté QV donné de position & de grandeur en consequence de ses points donnez Q, V, determinent de position & de grandeur le premier BV de ces trois côtez, lequel a ainsi son extrêmité B aussi determinée que l'autre donnée V. Donc non seulement le cercle VTQXBG, qui (*solut. du cas* 2.) passe par ces trois points determinez B, Q, V, est determiné de position & de grandeur, mais encore le triangle V*mb* semblable (*solut. du cas* 2.) à l'isoscelle *u*M*d* (*Fig.* 382.) d'angles donnez, ayant ainsi tous ses angles donnez avec son côté BV determiné de grandeur & de position, aura en consequence sa pointe *m* aussi determinée qu'on vient de trouver ses deux autres points B, V : c'est-à-dire, que ces trois points *m*, B, V, sont ici determinez de position, chacun par rapport aux deux autres. Donc le cercle VO*m*B*n*, qui passe (*solut. du cas* 2.) par ces trois points determinez *m*, B, V, est determiné de grandeur & de position ; & consequemment il ne peut rencontrer qu'en un seul *b* de ses points, autre que son point V, la ligne quelconque VPQRS donnée de position sans retour sur elle-même. Ainsi ce point *b* est encore déterminé : par consequent venant de trouver que l'autre B l'est de même, la position de la droite *b*BZ est pareillement Fig. 382. 383. 384.

determinée. Donc venant de trouver aussi que le cercle VTQXBG est determiné de grandeur & de position, le point C où cette droite *b*BZ rencontre ce cercle ailleurs qu'en B, est aussi determiné que ce point B. Par consequent les directions CQ, CV, des puissances F, H, sont ici determinées de même que la direction de l'appui *b*. Donc le cas 2. dont il s'agit ici, n'est susceptible que d'une seule solution.

COROLLAIRE II.

Fig. 377. 378. Dans le cas 1. si le Levier droit, par exemple, si la droite QV étoit ce Levier, aux extrêmitez Q, V, duquel on voulût que les puissances données F, H, fussent appliquées: le point *b*, dans lequel la droite KC rencontreroit ce Levier droit Q*b*V, seroit le point où il faudroit placer l'appui de ce Levier, & les droites QF, VH, qui continuées passent ensemble par le point C trouvé comme dans la solut. du cas 1. seroient les directions requises aux puissances E, F, pour faire équilibre entr'elles sur cet appui *b* du Levier droit Q*b*V, d'une maniere qui satisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problême dont il s'agit dans le cas 1. Tout cela se demontrera comme la solution de ce cas 1.

COROLLAIRE III.

Fig. 383. 384. Dans le cas 2. si la ligne sur laquelle on propose à trouver le Levier de ce cas, étoit aussi la droite menée (si l'on veut) de V par Q indefiniment vers λ; & que ses deux points V, Q fussent donnez pour ceux ausquels l'on voudroit que les puissances données F, H, fussent appliquées au Levier droit demandé: le point β où cette droite VQλ rencontreroit le cetcle VO*mb*βB*n*, seroit le point où il faudroit placer l'appui qui doit terminer le Levier cherché, qui seroit le droit VQβ; & si du point δ, dans lequel l'autre cercle VTQXBCδG seroit rencontré par la droite βBδ prolongée au travers de lui, l'on menoit par les deux points

Fig 374
F
F
P
R
Q
P
V
B
R
H
H
fig. 375.
H
H
R
P
B
V
Q
R
P
F
H
F
fig. 378.
K
B
V
Q
b
F
H
C
E
D
A
F
R
P
F
V
B
Q
R
H
H
P
fig. 376.
C
D
E
A
b
Q
B
V
K
F
H
fig. 377.
M
fig. 381.

points donnez Q, V, du Levier droit VQβ, deux droites qu'il eſt aiſé d'imaginer : elles ſeroient les directions requiſes aux puiſſances F, H, pour les mettre en équilibre entr'elles ſur cet appui β du Levier droit VQβ, d'une maniere qui ſatisferoit pour un tel Levier à toutes les conditions du Problême dont il s'agit ici dans le cas 2. Tout cela ſe demontrera encore comme la ſolution de ce cas 2.

SCHOLIE.

Le precedent Corol. 3. fait voir qu'au lieu des figures generales qu'on y vient d'employer, on pourroit en employer une beaucoup plus ſimple pour reſoudre le Problême qu'on y reſout par le moyen de ces figures generales pour un Levier droit à determiner depuis V vers λ, ſur une droite Vλ commencée en V, & indefiniment prolongée vers λ; ſur laquelle droite Vλ ſoient donnez les deux points V, Q, où l'on voudra que deux puiſſances données quelconques H, F, ſoient appliquées au Levier droit qui du côté de λ doit ſe terminer au point d'appui qu'on en demande avec les directions requiſes aux puiſſances données F, H, pour faire équilibre entr'elles ſur cet appui, d'une maniere qui ſatisfaſſe à toutes les conditions du cas 2. FIG. 385.

Pour reſoudre cette queſtion particuliere ſur une figure qui lui ſoit auſſi particuliere, & conſequemment plus ſimple; ſoit ſur la partie donnée VQ de la droite Vλ, un triangle VQB, dont les deux autres côtez VB, QB, ſoient à ce donné VQ comme les puiſſances données F, H, ſont à la charge qu'on veut qui en reſulte à l'appui demandé, moindre que la ſomme, & plus grande que la difference de ces deux puiſſances, ſi l'on veut que le Problême ſoit poſſible. Autour de ce triangle VQB ſoit circonſcrit le cercle VQBδG; & ſur ſa corde BV un triangle iſoſcelle B*m*V, dont l'angle *m* ſoit égal au donné M de la Fig. 382. qu'on veut que faſſe le Levier droit avec la direction de la charge preſcrite de ſon appui demandé. Autour de ce triangle B*m*V ſoit circonſcrit auſſi un autre cercle V*m*B*n*,

qui rencontre en β la droite Vλ. De ce point β par B soit menée la droite βBδ, qui rencontre en δ le cercle VQBδG ; duquel point δ par les points donnez Q, V, soient menées les droites CQF, CHV.

Cela fait, on trouvera, comme dans la solution & démonstration du cas 2. que le point β est celui où doit être placé l'appui du Levier qu'on demande, lequel en consequence est le droit Vβ ; & que les puissances F, H, appliquées à ce Levier suivant les directions QF, VH, demeureront en équilibre entr'elles sur son appui β, d'une maniere qui satisfera à toutes les conditions du Problême dont il s'agit ici.

PROBLEME XXII.

Fig 386. & suivantes jusqu'à 390.

La longueur AC d'un Levier droit, ou d'une partie d'un Levier droit, étant donnée dans les Fig. 387. 388. 389. portant à ses extrêmitez A, C, deux bassins D, E, de balances, lesquels soient de pesanteurs ou de poids connus, que j'appelle de leurs noms D, E ; & étant aussi donnez trois autres poids F, G, H, dans la Fig. 386. on demande un point d'appui de ce Levier, sur lequel appui (dans l'hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, tant les naturelles, que les détournées Aa des poids F, G, aux points A des Fig. 389. 390.) un de ces trois poids F, G, H, par exemple, le poids G étant successivement mis dans chacun des bassins D, E, feroit équilibre avec chacun des deux autres F, H, mis chacun dans chacun des bassins que le poids G n'occupe point : sçavoir, F en D pendant que G sera en E dans les Fig. 387. 389. & H en E pendant que G sera en D dans les Fig. 388. 390.

SOLUTION.

I. Pour trouver l'appui qu'on damande ici, supposons pour un moment qu'il est en B, & que sur lui fixement placé là, il y auroit équilibre entre les poids F, G, dans les Fig. 387. 389. & entre les poids G, H, dans les Fig. 388. 390. le Levier AC étant le même dans les Fig. 387.

388. & le Levier BC étant aussi le même, & ses points A, C, les mêmes dans les Fig. 389. 390. En ce cas d'équilibre le Th. 21. Corol. 13. donneroit (*Fig.* 387. 389.) $F+D. G+E :: BC. AB$ (*Fig.* 388. 390.) $:: G+D. H+E$. Donc on auroit alors $F+D. G+E :: G+D. H+E$ (I).

II. Pour abreger nos expressions, soient presentement $M=F+D$, $N=G+E$, $P=G+D$, $Q=H+E$. Ces nouveaux noms étant ainsi supposez,

1°. Dans les Fig. 387. 389. nous aurons $M. N :: F+D. G+E$ (*art.* 1.) $:: BC. AB :: BC. \pm AC \mp BC$. dont les superieurs des doubles signes sont pour la Fig. 387. & les inferieurs pour la Fig. 389. Ce qui donnera $\pm M\times AC \mp M\times BC = N\times BC$; & en consequence (en multipliant le tout par ± 1) $M\times AC = M\times BC \pm N\times BC = \overline{M\pm N}\times BC$, c'est-à-dire, $M\times AC = \overline{M\pm N}\times BC$ (K). Fig. 387. 389.

2°. Dans les Fig. 388. 390. nous aurons de même $P. Q :: G+D. H+E$ (*art.* 1.) $:: BC. AB :: BC. \pm AC \mp BC$. dont les superieurs des doubles signes seront aussi pour la Fig. 388. & les inferieurs pour la Fig. 390. Ce qui donnera de même $\pm P\times AC \mp P\times BC = Q\times BC$; & en consequence (en multipliant le tout par ± 1) $P\times AC = P\times BC \pm Q\times BC = \overline{P\pm Q}\times BC$, c'est-à-dire, $P\times AC = \overline{P\pm Q}\times BC$ (L). Fig. 388. 390.

III. Si l'on ajoûte presentement ensemble les deux équations K, L, des nomb. 1. 2. du precedent art. 2. sçavoir, leurs premiers membres ensemble, & leurs seconds aussi ensemble, l'on aura $M\times AC + P\times AC = \overline{M\pm N}\times BC + \overline{P\pm Q}\times BC$, c'est-à-dire, $\overline{M+P}\times AC = \overline{M\pm N+P\pm Q}\times BC$, & en consequence $BC = \frac{\overline{M+P}}{\overline{M\pm N+P\pm Q}}\times AC$ (R), dont (*art.* 2. *nomb.* 1. 2.) les superieurs des doubles signes sont pour les Fig. 387. 388. & les inferieures pour les Figures 389. 390. Par consequent en Fig. 387. & suivantes jusqu'à 390.

restituant ici les valeurs de M, N, P, Q, supposées dans le precedent article 2. l'on aura enfin ici $BC = \frac{F + D + G + D}{F + D + G + D \pm G \pm E \pm H \pm E} \times AC = \frac{F + G + 2D}{F + G + 2D \pm G \pm H \pm 2E} \times AC$ (S), dont les superieurs des doubles signes sont encore ici pour les Fig. 387. 388. & les inferieurs pour les Figures 389. 390. Ce qui donne $BC = \frac{F + G + 2D}{F + H + 2D + 2E + 2G} \times AC$ (T) dans les Figures 387. 388. & $BC = \frac{F + G + 2D}{F - H + 2D - 2E} \times AC$ (V) dans les Fig. 389. 390. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans ces deux dernieres égalitez T, V, excepté BC; elles donneront aussi la valeur de BC en consequence des valeurs qu'on aura données de tout le reste qu'on suppose ici connu. Donc BC sera ainsi par tout ici comme avec AC, qui est (*Hyp.*) donnée; & en consequence le point d'appui B, d'abord (*art.* 1.) indéterminé, sera ici déterminé & connu pour l'effectif, sur lequel se doit faire l'équilibre demandé. *Ce qu'il falloit trouver & démonter.*

EXEMPLE.

Fig. 387. 388. I. Soient donnez en livres les poids F = 8, G = 6, H = 3; & les bassins D, E, égaux en pesanteur = 1. En ce cas,

1°. L'équation T du precedent art. 3. deviendra $BC = \frac{8 + 6 + 2}{8 + 3 + 2 + 2 + 12} AC = \frac{16}{27} \times AC$ dans les Fig. 387. 388. Ce qui fait voir qu'en y divisant en 27 parties égales la longueur donnée du Levier droit AC, & qu'en y prenant depuis C vers A, une partie CB égale à 16. de celles-là; le point B où cette partie CB se determinera du côté de A, sera le point d'appui que les valeurs ici don-

nées, exigent dans les Fig. 387. 388. pour y produire l'équilibre demandé.

2°. L'équation V du même article 3. deviendra BC=

$$\frac{8+6+2}{8+2-3-2}\times AC=\frac{16}{5}\times AC$$ dans les Fig. 389. 390. Fig. 389. 390.

Ce qui fait voir qu'en y divisant en cinq parties égales la longueur donnée de la portion CA du Levier droit BC, & qu'en la prolongeant par de-là A jusqu'à ce qu'on ait CB égale à 16. de ces cinquiémes parties de AC, son terme B sera le point d'appui que les valeurs ici données exigent dans les Fig. 389. 390. pour y produire aussi l'équilibre demandé.

II. N'y ayant rien de negatif dans la formule T, qui est dans l'art. 3. de la solution pour les Fig. 387. 388. quelques autres valeurs qu'on donne des precedens poids F, G, H, D, E; cette formule T donnera toûjours de cette maniere l'appui demandé dans ces Fig. 387. 388. Fig. 387. 388.

III. Mais il n'en est pas de même de la formule V qui est dans le même art. 3. de la solution pour les Fig. 389. 390. car la fraction de cette formule V, dont le numerateur est tout positif, ayant des grandeurs negatives avec des positives dans son denominateur; il y faut que les valeurs en soient données ou prises telles que la somme des positives soit plus grande en quelque raison que ce soit, que la somme des negatives: autrement la valeur de cette fraction, & en consequence la valeur de BC dans la formule V, deviendroit infinie ou negative, selon que ces deux sommes seroient égales entr'elles, ou que la positive seroit moindre que la negative. Par consequent si l'on donne, ou qu'on prenne (comme dans l'art. 1.) D=E dans cette formule V, il y faudra le poids F plus grand que le poids H en quelque rapport que ce soit; ou si l'on y prend F plus petit que H, il faudra que D y surpasse E d'une difference plus grande en quelque rapport que ce soit, que celle dont H y surpassera F. Fig. 389. 390.

En observant cette condition, quelques valeurs qu'on

donne aux poids F, G, H, D, E, les formules T, V, de l'art. 3. de la solut. donneront toûjours l'appui demandé, ainsi qu'elles viennent de le donner dans le preced. art. 1.

COROLLAIRE I.

Dans la même hypothese des directions des poids paralleles entr'elles, un raisonnement semblable à celui qui vient de donner dans les Fig. 387. 388. 389. 390. le point d'appui B d'un Levier droit AC ou BC, sur lequel appui trois poids donnez F, H, G, feroient équilibre entr'eux deux à deux, placé un à un (comme ci-dessus) dans chacun des bassins D, E, de pesanteurs données, que ce Levier porte à ses points donnez A, C: un raisonnement (dis-je) semblable à celui-là, donnera de même le point d'appui (que j'appelle encore ici B) du même Levier droit quelconque, sur lequel tant de poids donnez qu'on voudra, F, G, H, K, L, &c. feroient équilibre entr'eux deux à deux, placez de suite (comme ci-dessus) un à un dans chacun des bassins de ce Levier AC ou BC, repeté dans chacune des Fig. 391. 392. sans ces bassins D, E, qu'on lui suppose cependant encore en ses points donnez quelconques A, C; sçavoir, F en D, en équilibre avec G en E; G en D, en équilibre auec H en E; H en D, en équilibre aveé K en E; K en D, en équilibre avec L en E, &c. en sorte qu'en prenant encore ici D, E, pour les pesanteurs ou poids des bassins de ces noms, le poids total en A, sera fait de celui D de son bassin de ce nom, & de celui des autres F, G, H, K, L, &c. qui sera dans ce bassin; & ainsi du poids total en C: le tout comme on le voit exprimé dans la premiere Table que voici; lesquels

FIG. 387. 388. 389. 390.

FIG. 391. 392.

Poids totaux suspendus au Levier AC ou BC, en A, en C.

TABLE I.

F+D.	G+E	:: BC. AB :: BC. ±AC∓BC.
G+D.	H+E	
H+D.	K+E	
K+D.	L+E	
&c.	&c.	

poids totaux, en cas d'équilibre deux à deux (marquez en même ligne) ſur l'appui indéterminement ſuppoſé B de chaque Levier droit AC, BC, ſeront entr'eux (*Th.* 21. *Corol.* 13.) dans la raiſon commune qu'on leur voit ici marquée, le ſuperieur des doubles ſignes qu'on y voit, y étant pour la Fig. 391. & l'inferieur pour la Fig. 392. de ſorte qu'en prenant ici, pour abreger, $M=F+D$, $N=G+E$, $P=G+D$, $Q=H+E$, $R=H+D$, $S=K+E$, $T=K+D$, $V=L+E$, &c. l'on y aura les mêmes analogies que voici dans la ſeconde Table, leſquelles donne-

TABLE 2.

M.	N	:: BC. $\pm AC \mp BC$.
P.	Q	
R.	S	
T.	V	
&c.		

ront $\overline{M+P+R+T}\times\overline{\pm AC\mp BC}=\overline{N+Q+S+V}\times BC$; ce qui (en multipliant le tout par ± 1) devient $\overline{M+P+R+T}\times\overline{AC-BC}=\overline{\pm N\pm Q\pm S\pm V}\times BC$: d'où reſulte $\overline{M+P+R+T}\times AC=\overline{M+P+R+T}\times BC\;\overline{\pm N\pm Q\pm S\pm V}\times BC=\overline{M+P+R+T\pm N\pm Q\pm S\pm V}\times BC$; ce qui donne $BC=\frac{M+P+R+T}{M+P+R+T\pm N\pm Q\pm S\pm V}\times AC$; d'où reſulte auſſi (en reſtituant les valeurs precedentes de M, P, R, T, N, Q, S, V,) $BC=$

$$\frac{F+D+G+D+H+D+K+D}{F+D+G+D+H+D+K+D\pm G\pm E\pm H\pm E\pm K\pm E\pm L\pm E}$$

$$\times AC=\frac{F+G+H+K+4D}{F+G+H+K+4D\pm G\pm H\pm K\pm L\pm 4E}\times AC\,(\beta)$$

dont les ſuperieurs des doubles ſignes ſont encore pour la Figure 391. & les inferieurs pour la Figure 392. Par

consequent l'on aura enfin ici premierement $BC = \frac{F + G + H + K + 4D}{F + L + 2G + 2H + 2K + 4D + 4E} \times AC$ (♪) pour le cas de la Fig. 391. & secondement $BC = \frac{F + G + H + K + 4D}{F - L + 4D - 4E} \times AC$ (λ) pour le cas de la Fig. 392. Donc tout étant (*Hyp.*) donné dans les deux valeurs de BC comprises dans ces deux dernieres équations ♪, λ; BC y est aussi connue que AC: & consequemment le point B d'appui ici demandé de chacun des Leviers AB, BC, des Fig. 391. 992. y est connu de même. *Ce qu'il falloit ainsi trouver & démontrer par la methode de la solution precedente.*

COROLLAIRE II.

Ce qu'on voit dans le precedent Corol. 1. pour les cinq poids donnez F, G, H, K, L, se trouvera de même pour tel nombre *n* des poids donnez qu'on voudra : de sorte que quelque soit ce nombre *n* de poids donnez quelconques, pour trouver l'appui B du Levier donné AC dans la Fig. 391. ou BC de partie donnée AC dans la Fig. 392. sur lequel appui tous ces poids feroient équilibre deux à deux, placez de suite (comme ci-dessus) un à un dans chacun des bassins D, E, suspendus aux points donnez A, C, de chacun de ces Leviers;

1°. L'équation ♪ de ce Corol. 1. fait voir que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 391. doit être égale à une fraction d'un numerateur égal au produit du Levier donné AC, multiplié par la somme (que j'appelle Z) faite de tous les poids donnez, moins le dernier, & du poids du bassin D multiplié par $n-1$; & dont le dénominateur doit être la somme faite du premier & du dernier des poids donnez, du double de tous les autres, & de la somme des poids des deux bassins D, E, multipliée par $n-1$.

2°. L'équation λ du même Corol. 1. fait voir de même que la valeur de BC dans le cas de la Fig. 392. doit être une fraction d'un numerateur égal au produit de la partie

tie donnée AC du Levier BC, multipliée par la précedente ſomme Z, & dont le dénominateur doit être égal à la ſomme faite du premier, moins le dernier des poids donnez, & du produit de $n-1$ par le poids de D—E.

SCHOLIE.

Si l'on ſuppoſoit les Leviers AC, BC; des Fig. 387. 388. 389. 390. 391. 392. ſans baſſins, & que les poids donnez F, G, H, &c. y fuſſent ſuſpendus ſeuls aux points donnez A, C, dans l'ordre où ils étoient dans ces baſſins; cette hypotheſe rendant par tout ici D=o, E=o, feroit que Fig. 387. & ſuivantes juſqu'à 392.

Dans la ſolution.

1°. L'analogie 1. de l'art. 1. de cette ſolution deviendroit F. G :: G. H. ce qui fait voir que pour la poſſibilité du Problême dans l'un & l'autre cas des Fig. 387. 388. 389. 390. il faudroit ici que les poids donnez F, G, H, fuſſent en progreſſion géométrique.

2°. L'équation T de l'art. 3. de la même ſolution deviendroit $BC = \frac{F+G}{F+H+2G} \times AC$ pour le cas des Fig. 387. 388.

3°. L'équation V du même art. 3. deviendroit $BC = \frac{F+G}{F-H} \times AC$ pour le cas des Fig. 389. 390.

Dans le Corol. 1.

4°. La Table 1. de ce Corol. 1. donneroit F. G :: G. H :: H. K :: K. L :: &c. c'eſt-à-dire, que pour la poſſibilité du Problême dans l'un & l'autre cas des Fig. 391. 392. il faudroit dans la preſente hypotheſe que les poids donnez F, G, H, K, L, &c. fuſſent en progreſſion géométrique, de même que dans le nomb. 1.

5°. L'équation ♪ de ce Corollaire 1. deviendroit $BC = \frac{F+G+H+K}{F+L+2G+2H+2K} \times AC$ pour le cas de la Fig. 391.

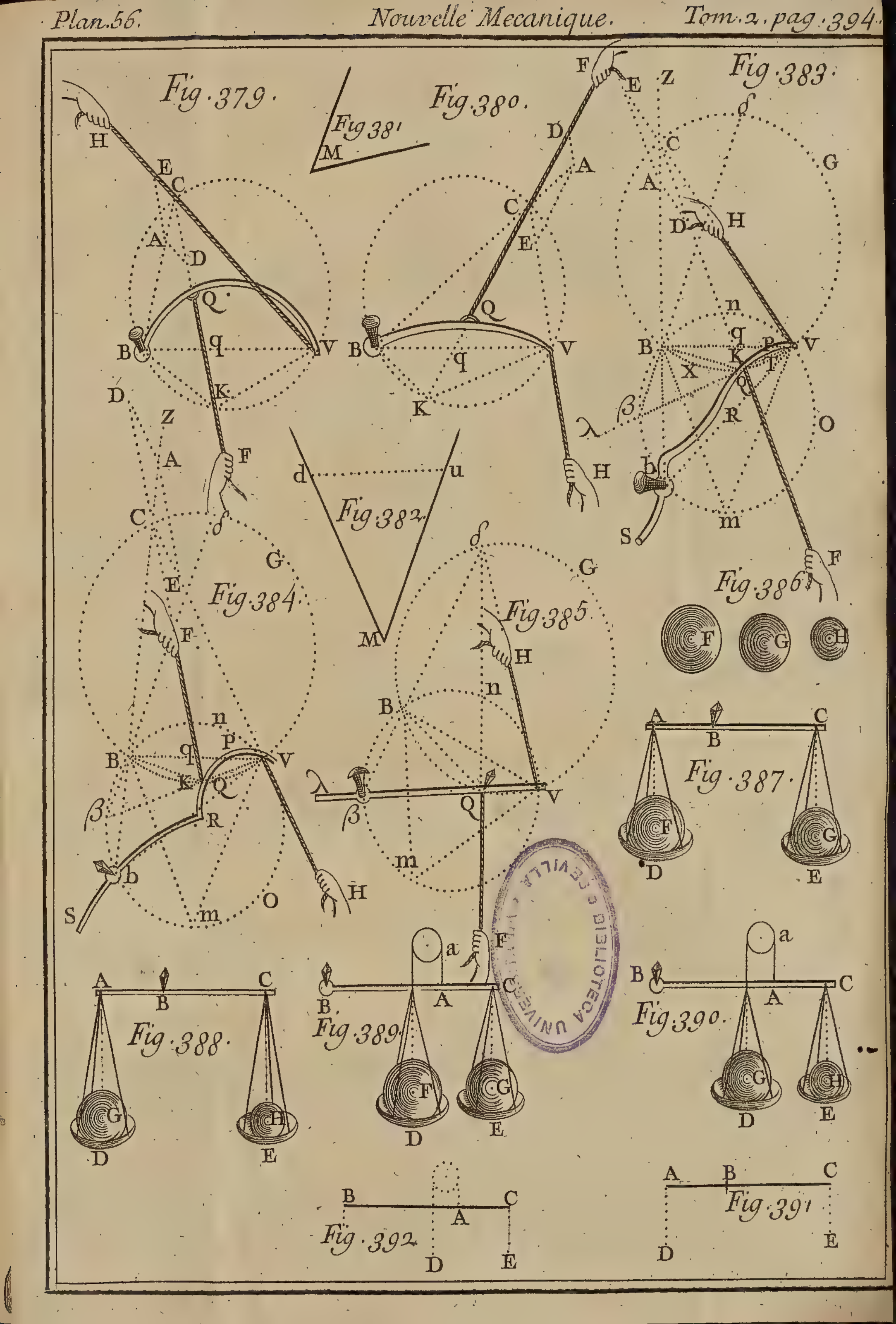
6°. L'équation λ du même Corol. 1. deviendroit $BC = \frac{F + G + H + K}{F - L} \times AC$ pour le cas de la Fig. 392.

PROBLEME XXIII.

Fig. 393. & suivantes jusqu'à 396. *Trois puissances F, H, K, étant données en raison quelconque des trois lignes Ff, Hh, Kk, de la Fig. 393. desquelles puissances une quelconque F ait aussi sa direction donnée QF avec son point d'application à un Levier quelconque BQ d'appui donné B : on demande le point d'application à ce Levier, requis aux deux autres puissances H, K, avec les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre avec la troisiéme F sur l'appui donné B de ce même Levier.*

SOLUTION.

Sur la direction donnée QF de la puissance donnée F, soit prise QG=Ff, premiere des proportionnelles données : de son point G (en angle quelconque avec cette partie QG de QF) soit menée GT=Kk, derniere de ces trois proportionnelles ; & de son point T (en angle aussi quelconque avec elle) soit TL=Hh, seconde des mêmes proportionnelles. Soient ensuite menées GL, QL ; & du point d'appui donné B, la droite BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là ; sur laquelle direction soit prise CD=QG ; & de son point D soit menée DA parallele à GL, laquelle rencontrant BC en A comme GL rencontre en L la droite QL parallele à CB, acheve le triangle CDA semblable à QGL ; & qui ayant (*Hyp.*) CD=QG=Ff, aura aussi DA =GL, & AC=QL. Après avoir achevé le parallelogramme CDAE, qui rend CE=DA, soient menées CM parallele à GT, & EM parallele à LT ; lesquelles CM, EM, se rencontrant en M comme leurs paralleles GT, LT, se rencontrent en T, forment avec CE le triangle CME semblable à GTL : de sorte que venant de trouver CE= DA, l'on aura pareillement ici EM=TL=Hh, & CM=


Fig. 379.
Fig. 380.
Fig. 381.
Fig. 382.
Fig. 383.
Fig. 384.
Fig. 385.
Fig. 386.
Fig. 387.
Fig. 388.
Fig. 389.
Fig. 390.
Fig. 391.
Fig. 392.

GT=Kk. Enfin aprés avoir auſſi achevé le parallelogramme CMEN, ſoient ſes côtez CN, CM, prolongez du côté de E vers H, K, & juſqu'à la rencontre en V, R, du Levier BQ auſſi prolongé en ligne quelconque juſqu'à ces deux points V, R.

Cela fait, je dis que les deux puiſſances données H, K, étant appliquées à ce Levier en deux points V, R, & dirigées ſuivant ces lignes VH, RK, feront enſemble équilibre ſur ſon appui donné B, avec la troiſiéme puiſſance donnée F de direction donnée QF.

DEMONSTRATION.

Le parallelogramme CMEN rendant CN=EM (*ſolut.*) =Hh, la ſolution donnant CM=Kk, & ayant (*Hyp.*) Hh. Kk :: H. K. l'on aura pareillement ici CN. CM :: H. K. Donc (*Lem.* 3. *Corol.* 1. *part.* 1.) l'effort ou la force (que j'appelle E) reſultante du concours d'action de ces deux puiſſances H, K, ſera de C vers E ſuivant CE, & à la puiſſance H comme cette diagonale CE eſt au côté CN du parallelogramme CMEN, c'eſt-à-dire, E. H :: CE. CN. Mais (*Hyp.*) H. F :: Hh. Ff (*ſolut.*) :: CN. CD. Donc (en raiſon ordonnée) E. F :: CD. CE. Donc auſſi (*Th.* 21. *part.* 4.) l'effort ou la force reſultante du concours de la premiere E, & de la puiſſance F, c'eſt-à-dire, du concours des trois puiſſances données K, H, F, ſera ici de C vers E ſuivant la diagonale CA du parallelogramme CDAE, laquelle prolongée vers l'appui donné B, paſſe (*ſolut.*) par cet appui. Donc enfin (*Th.* 21. *part.* 5.) il y aura ici équilibre entre ces trois puiſſances données F, H, K, ſur cet appui donné B. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Puiſque le parallelogramme CDAE rend CE parallele à DA, qui l'eſt (*ſolut.*) à GL, & que les triangles EMC, GTL, ſont (*ſolut.*) ſemblables entr'eux ; & que la ſolution rendant auſſi leurs autres côtez EM, ou (à cauſe de l'autre parallelogramme EMCN) CN parallele à GT, &

CM parallele à LT. D'où l'on voit que les directions demandées CH, GK, des puissances H, K, étant ici (*solut.*) suivant CN, CM, sont aussi paralleles à GT, LT : sçavoir, CN à GT, & CM à LT. De sorte qu'en les faisant telles par le point C dès que les deux triangles GTL, QGL, ont été faits, on les auroit eues sans le secours d'aucun parallelogramme. Mais pour sçavoir de quels côtez du Levier BQ prolongé ces deux puissances H, K, doivent être placées dans ces directions CH, CK, le parallelogramme CMEN étoit necessaire, le point E de sa diagonale CE, étant (par rapport à C) du côté vers lequel ces deux puissances ainsi dirigées doivent agir ; & pour avoir la position de ce point E par rapport à C, c'est-à-dire, la position de cette diagonale CE, qui est un des côtez de l'autre parallelogramme CDAE, cet autre parallelogramme étoit pareillement necessaire.

COROLLAIRE II.

De ce que (*solut.*) les angles QGT, GTL, sont tous deux arbitraires ou variables à la fois ; & de ce que (*Corol.* 1.) les directions CH, CK, des puissances données H, K, sont toûjours paralleles aux côtez GT, TL, de ces deux angles, & consequemment variables comme les positions de ces deux côtez le sont pendant que la direction donnée CF de la troisiéme puissance donnée F, demeure constante & toûjours la même : il resulte que le Problême dont il s'agit ici, est susceptible d'une infinité d'infinité de solutions, en prenant ici pour differentes solutions de ce Problême, celles qui, quoiqu'issues d'une même méthode & d'une même direction donnée d'une même puissance donnée, différent dans les directions demandées des autres puissances pareillement données ; laquelle infinité d'infinité de solutions est le produit du nombre infini d'angles possibles QGT, multiplié par le nombre pareillement infini d'angles possibles GTL, c'est-à-dire, est le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces

deux angles également variables rendent égaux. En effet la liberté que la solution précedente donne de faire à la fois les angles QGT, GTL, tels qu'on voudra, permettant de faire chacun d'eux constant & toûjours le même pendant qu'on variera l'autre à volonté ;

1°. Si l'on suppose le second GTL constant pendant que le premier QGT variera à l'infini, la seule varieté infinie de celui-ci changera à l'infini les positions de leurs côtez constans GT, TL, & des variables GL, QL. Ainsi BC menée de l'appui donné B jusqu'à la direction donnée QF prolongée de la puissance donnée F, étant toûjours (*solut.*) parallele à QL, & les directions CH, CK, des deux autres puissances données H, K, étant toûjours aussi (*Corol.* 1.) paralleles aux côtez (*solut.*) constans GT, TL, de l'angle GTL ici supposé pareillement constant : la seule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend aussi variables à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puissances données H, K. Donc trois simultanées quelconques de ces directions issues d'un même angle quelconque QGT, fournissant (*solut.*) une solution du Problême ; la seule variabilité à l'infini de cet angle, qu'on voit les rendre aussi variables à l'infini, doit fournir ainsi autant de solutions differentes de ce Problême que d'angles QGT, c'est-à-dire, une infinité ; & consequemment cette seule variabilité à l'infini de l'angle QGT, rend ce Problême susceptible d'une infinité de solutions differentes.

2°. Si presentement on suppose cet angle QGT constant pendant que GTL variable (*solut.*) comme lui, variera à l'infini ; on démontrera ici, comme l'on a fait dans le nomb. 1. par rapport à la seule variabilité à l'infini qu'on y supposoit de cet autre angle QGT : on démontrera, dis-je, ici (comme là pour la seule variabilité de l'angle QGT) que la seule variabilité qu'on y suppose à l'infini de l'angle GTL, doit y varier de même à l'infini les directions CB, CH, CK, de l'appui donné B, & des puissances pareillement données H, K. Donc cette seule variabilité ici

ſuppoſée de cet angle GTL, y fournira (comme la ſeule variabilité de l'angle QGT dans le nomb. 1.) autant de ſolutions differentes du Problême dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles GTL differens; & conſequemment rendra pareillement ici ſeule ce Problême ſuſceptible d'une infinité de ſolutions differentes.

3°. Puiſque (*nomb.* 1.) pour chaque angle GTL la ſeule variabilité de l'angle QGT fournit autant de ſolutions differentes du Problême dont il s'agit ici, qu'elle peut fournir d'angles QGT differens; & que (*nomb.* 2.) pour chaque angle QGT la ſeule variabilité de l'angle GTL en fournit de même autant de ſolutions differentes qu'elle peut fournir d'angles GTL differens: ces deux variabilitez permiſes à la fois par la ſolution precedente, fourniront enſemble de ce Problême un nombre de ſolutions égal au produit entr'elles des deux infinitez d'angles QGT & GTL, fournies chacune par chacune de ces variabilitez des deux indéterminez (*ſolut.*) de ces noms. Donc ſuivant la ſolution precedente, le Problême dont il s'agit ici, y eſt ſuſceptible d'une infinité d'infinité de ſolutions; laquelle infinité d'infinité eſt le produit du nombre infini d'angles poſſibles QGT, multiplié par le nombre pareillement infini d'angles poſſibles GTL, c'eſt-à-dire, eſt le quarré d'un quelconque de ces deux nombres infinis, que ces deux angles également variables rendent égaux: le tout ainſi qu'on le vient d'avancer au commencement de ce Corollaire-ci.

COROLLAIRE III.

Un raiſonnement ſemblable à celui qui vient de faire voir dans le precedent Cor. 2. que les variabilitez à l'infini des angles QGT, GTL, que la ſolution permet arbitraires à la fois entre des côtez dont l'un eſt conſtant QG, GT, TL, rendent enſemble le Problême ſuſceptible d'une infinité d'infinité de ſolutions, fera voir de même que ces deux variabilitez enſemble des angles QGT, GTL, doivent rendre auſſi la charge de l'appui donné B (reſultante du

concours d'action des trois puiſſances ici données F, H, K,) ſuſceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs, & d'autant de directions differentes.

En effet ces deux variabilitez à l'infini de ces angles QGT, GTL, fourniſſant autant de poſitions de la droite QL, qu'elles fourniſſent de directions CH, CK, aux deux puiſſances données H, K, c'eſt-à-dire (*Corol.* 2.) une infinité d'infinité; la droite BC toûjours parallele (*ſolut.*) à QL, en devient auſſi ſuſceptible d'une infinité d'infinité de poſitions, qui ſeront autant de directions d'autant de charges de l'appui B, reſultante du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K, en conſequence d'autant (*Corol.* 2.) de variabilitez à l'infini de chacune des directions CH, CK, des deux dernieres H, K, de ces trois puiſſances, dont la premiere F eſt la ſeule qui ſoit de direction donnée QF ou CF; leſquelles directions CH, CK, variant la poſition de la diagonale CF du parallelogramme CMEN, & en conſequence l'angle DCE de l'autre parallelogramme CDAE, en autant de manieres qu'elles varient elles-mêmes, en rendent la diagonale CA variable auſſi en une infinité d'infinité de grandeurs differentes, leſquelles exprimeront (*Th.* 21. *part.* 4.) autant de charges de l'appui B, reſultantes du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K, toûjours exprimées (*ſolut.*) par les côtez conſtans CD, CN, CM, des deux parallelogrammes CDAE, CMEN, d'angles ainſi variables en une infinité d'infinité d'autres. Donc les variabilitez à l'infini des deux angles QGT, GTL, que la ſolution permet arbitraires à la fois, rendent enſemble ici la charge de l'appui donné B (reſultante du concours d'action des trois puiſſances données F, H, K,) ſuſceptible d'une infinité d'infinité de grandeurs par rapport à ces puiſſances toûjours les mêmes, & cette charge ſuſceptible auſſi d'une infinité d'infinité de directions differentes.

SCHOLIE.

De la maniere dont vient d'être reſolu le précedent

Probl. 23. où l'on demandoit de mettre en équilibre entr'elles ſur un appui donné d'un Levier quelconque, trois puiſſances données à volonté, d'une ſeule deſquelles le point d'application à ce Levier, étoit donné avec ſa direction quelconque : de cette maniere, dis-je, on peut auſſi reſoudre en general le Problême où l'on demandoit de mettre de même en équilibre entr'elles ſur un appui donné d'un Levier quelconque, tant de puiſſances qu'on voudra, données auſſi à volonté, d'une ſeule auſſi deſquelles le point d'application à ce Levier ſeroit donné avec la direction quelconque de cette puiſſance, ſans rien avoir non plus des autres que leurs valeurs ou leurs rapports à celle-ci.

PROBLEME XXIV.

FIG. 397. 398. 399. *Tant de puiſſances F, H, K, P, S, &c. qu'on voudra, étant données en raiſons quelconques d'autant de lignes données Ff, Hh, Kk, Pp, Ss, &c. deſquelles puiſſances une ſeule quelconque, par exemple, F, ſoit appliquée à un Levier quelconque en un point donné Q, ſuivant une direction pareillement donnée QF : on demande les points d'application à ce Levier, requis à toutes les autres puiſſances, & les directions qu'elles doivent avoir pour faire équilibre toutes enſemble avec la premiere F ſur un appui donné B de ce Levier.*

SOLUTION.

I. Sur la direction donnée QF de cette premiere puiſſance donnée F, ſoit priſe QG=F*f*, & de ſon point G ſoit menée (en angle quelconque avec elle) la droite GO égale à la derniere des proportionnelles aux puiſſances ici données ; laquelle derniere proportionnelle étant ici S*s*, il faudra ici GO=S*s*. De ſon point O (en angle quelconque avec elle) ſoit menée OI=P*p* : de ſon point I (en angle auſſi quelconque avec elle) ſoit menée IT=K*k* : de ſon point T (en angle encore quelconque avec elle) ſoit menée TL=H*h* ; & toûjours de même juſqu'à celle incluſivement de ces proportionnelles, qui ſuit immediatement

ment la premiere F*f*, laquelle seconde proportionnelle est ici H*h*. Du point G par les points I, T, L, &c. soient menées les droites GI, GT, GL, &c. Et du point Q par le dernier de ceux-là, qui est ici L, soit aussi menée la droite QL.

II. Après cela, du point d'appui donné B, soit menée la droite BC parallele à QL, & qui rencontre en C la direction donnée QF prolongée de ce côté-là ; sur laquelle direction soit prise CD=QG (*art.* 1.) =F*f*. De son point D soit menée DA parallele à GL ; laquelle DA rencontrant BC en A, comme GL rencontre en L la droite QL parallele à CB, formera avec CD, CA, le triangle CDA semblable à QGL, & qui ayant (*Hyp.*) CD=QG, aura consequemment aussi DA=GL, & CA=QL. Après avoir achevé le parallelogramme CDAE, qui aura CE =DA=GL, faites CM parallele à GT, & EM parallele à LT ; lesquelles CM, EM, se rencontrant en M, comme leurs paralleles GT, LT, se rencontrent en T, formeront avec CE le triangle CME semblable à GTL : de sorte que venant de trouver CE=GL, ces deux triangles semblables auront consequemment aussi EM=TL (*art.* 1.) =H*h*, & CM=GT. Des points C, M, soient faites de même CX parallele à GI, & MX parallele à TI ; ce qui avec CM formera aussi le triangle CXM semblable à GIT : de sorte que venant de trouver CM= GT, l'on aura pareillement ici MX=TI (*art.* 1.) =K*k* ; & CX=GI. Des points C, X, soient aussi faites Cβ parallele à GO, & Xβ parallele à OI ; ce qui avec CX formera de même le triangle CβX semblable à GOI : de sorte que venant de trouver CX=GI, l'on aura pareillement ici Xβ=OI (*art.* 1.) =P*p*, & Cβ=GO (*art.* 1.) =S*s*, qui est ici la derniere des proportionnelles aux puissances qui s'y trouvent données. C'est ainsi qu'il faudroit continuer de faire jusqu'à la derniere, s'il y en avoit davantage qu'ici, en quelque nombre qu'elles fussent.

III. Soient presentement achevez les parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXδ, &c. jusqu'au dernier fait des

deux dernieres proportionnelles, s'il y en avoit davantage, comme CβXδ est fait ici (*art.* 1.) des deux Cβ (*art.* 2.) =GO=Ss, & Cδ=βX (*art.* 2.) =OI=Pp, qui s'y trouvent les dernieres. Soient enfin prolongez depuis C jusqu'au Levier BQ pareillement prolongé, tout ce que ces parallelogrammes ont de côtez opposez à EM, MX, Xβ, &c. jusqu'au dernier inclusivement de ces parallelogrammes, qui est ici CβXδ, duquel seul les deux côtez Cδ, Cβ, qui passent par C, doivent être ainsi prolongez; c'est-à-dire ici, que les côtez CN, CY, Cδ, Cβ, des parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXδ, sont les seuls qui doivent y être ainsi prolongez jusqu'au Levier BQ pareillement prolongé en ligne quelconque jusqu'à sa rencontre avec eux en V, R, Z, ω, ainsi que le côté CD du premier parallelogramme l'est jusqu'au point Q de ce Levier. Ces côtez CN, CY, Cδ, Cβ, ainsi prolongez jusqu'aux points V, R, Z, ω, du Levier ZBQω, soient aussi prolongez jusqu'en H, K, P, S, vers les endroits que regardent les extrêmitez differentes E, M, X, les diagonales CE, CM, CX, de leurs parallelogrammes CMEN, CXMY, CβXδ.

IV. Cela fait, je dis que les points V, R, Z, ω, du Levier ZBQω, trouvez dans le précedent art. 3. sont les requis où les puissances ici données H, K, P, S, doivent être appliquées à ce Levier, aux côtez où on les voit; & que les lignes droites CVH, CRK, CZP, ωCS, trouvées aussi dans le même art. 3. sont les directions que ces quatre puissances ici données, y doivent avoir pour faire équilibre sur l'appui donné B, avec la cinquiéme aussi donnée F, & de direction QF ou CQF pareillement donnée; c'est-à-dire, que ces cinq puissances ici données F, H, K, P, S, étant appliquées en Q, V, R, Z, ω, suivant QF, VH, RH, ZP, ωS, au Levier ZBQω d'appui donné B, feront ici équilibre entr'elles sur cet appui, & ainsi de tant d'autres puissances données qu'on voudra, d'une seule quelconque desquelles la direction soit donnée avec son point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit trouver.*

DEMONSTRATION.

Puiſque des parallelogrammes CDAE, CMEN, CXMY, CβXδ, des art. 2. 3. de la ſolution, ſon art. 2. fait voir que le premier CDAE a ſon côté CD=Ff; que le ſecond CMEN rend CN=ME=Hh; que le troiſiéme CXMY rend CY=XM=Kk; que le quatriéme CβXδ rend Cδ =βX=Pp; & que Cβ=Ss: les côtez CD, CN, CY, Cδ, de ces parallelogrammes, & Cβ, ſont proportionnels aux lignes Ff, Hh, Kk, Pp, Ss, leſquelles l'étant (*Hyp.*) aux puiſſances données F, H, K, P, S; ces côtez CD, CN, CY, Cδ, & Cβ, ſont auſſi proportionnels à ces mêmes puiſſances F, H, K, P, S. Donc,

1°. Ayant ainſi S. P :: Cβ. Cδ. l'effort ou la force (que j'appelle X) reſultante du concours d'action de ces deux puiſſances S, P, ſera ici (*Lem.* 3. *Cor.* 1. *p.* 1.) de C vers X ſuivant CX, & à la puiſſance P comme cette diagonale CX du parallelogramme CβXδ eſt à ſon côté Cδ; c'eſt-à-dire, X. P :: CX. Cδ. Or on vient de trouver P. K :: Cδ. CY. Donc (en raiſon ordonnée) X. K :: CX. CY.

2°. Par conſequent l'effort ou la force (que j'appelle M) reſultante du concours de la premiere compoſée X, & de la puiſſance K, c'eſt-à-dire (*nomb.* 1.) reſultante du concours d'action des trois puiſſances S, P, K, ſera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers M ſuivant CM, & à la puiſſance K comme cette diagonale CM du parallelogramme CXMY eſt à ſon côté CY; c'eſt-à-dire, M. K :: CM. CY. Or on vient de trouver K. H :: CY. CN. Donc (en raiſon ordonnée) M. H :: CM. CN.

3°. Par conſequent l'effort ou la force (que j'appelle E) reſultante du concours de la ſeconde compoſée M & de la puiſſance H, c'eſt-à-dire (*nomb.* 2.) reſultante du concours d'action des quatre puiſſances S, P, K, H, ſera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers E ſuivant CE, & à la puiſſance H comme cette diagonale CE du parallelogramme CMEN eſt à ſon côté CN; c'eſt-à-dire, E. H :: CE. CN.

Or on vient de trouver H. F : : CN. CD. Donc (en raison ordonnée (E. F : : CE. CD.

4°. Par consequent l'effort ou la force resultante du concours de la troisiéme composée E & de la puissance F, c'est-à-dire (*nomb.* 3.) resultante du concours d'action des cinq puissances données S, P, K, H, F, sera ici (*Lem.* 3. *Corol.* 10.) de C vers A suivant la diagonale CA du parallelogramme CDAE, laquelle diagonale prolongée vers l'appui donné B, passe (*solution art.* 2.) par cet appui.

5°. Donc enfin (*Th.* 21. *part.* 6.) il y aura ici équilibre entre ces cinq puissances données F, H, K, P, S, sur cet appui donné B : & ainsi de tant d'autres puissances qu'on voudra, d'une seule quelconque desquelles la direction soit donnée avec son point d'application à un Levier quelconque d'appui donné. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE I.

Suivant l'art. 2. de la solution, les côtez Cβ, βX, XM, ME, des parallelogrammes CβXδ, CXMY, CMEN, sont paralleles aux côtez GO, OI, IT, TL, du poligone GOITL, chacun à chacun dans l'orde qu'ils ont ici. Or suivant l'art. 3. de la même solution, les directions demandées ωCS, CP, CK, CH, des puissances données, S, P, K, H, sont, la premiere ωCS suivant Cβ, & les autres CP, CK, CH, paralleles à βX, XM, ME. Donc ces directions demandées ωCS, CP, CK, CH, des puissances données S, P, K, H, sont aussi paralleles à GO, OI, IT, TL, chacune à chacune. D'où l'on voit que pour avoir simplement ces directions demandées des puissances données S, P, K, H, sans se mettre en peine de quels côtez du Levier ces puissances doivent être placées ; il n'y avoit sans le secours d'aucun parallelogramme, qu'à mener tout d'un coup ces directions ωS, CP, CK, CH, par le point C trouvé dès le commencement de l'art. 2. de la solution, paralleles ainsi à ces côtez GO, OI, IT, TL,

du poligone GOITL fait comme dans l'art. 1. de la même solution. Mais les parallelogrammes qu'on y vient d'employer, y étoient necessaires (*solut. art.* 3. 4.) pour reconnoître de quels côtez du Levier ZBQω ces puissances S, P, K, H, de directions demandées, devroient être placées, le devant être (*solut. art.* 3.) suivant ces directions (presentement trouvées) vers les endroits que regardent les extrêmitez differentes X, M, E, des parallelogrammes CβXδ, CXMY, CMEN, qui ont leurs côtez Cβ, Cδ, CY, CN, sur ces directions ωS, CP, CK, CH: le tout par la même raison que dans le Corol. du précedent Probl. 23.

COROLLAIRE II.

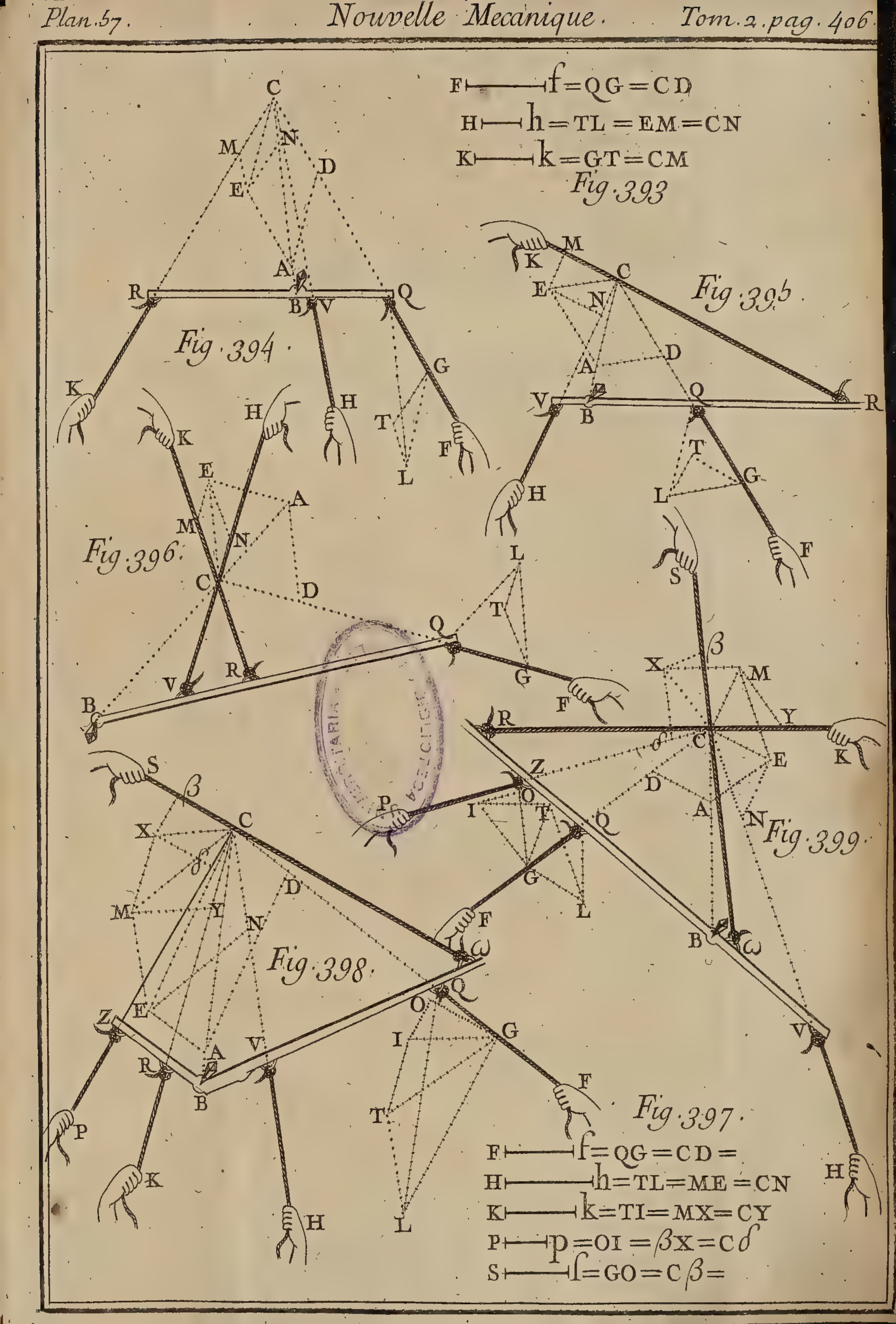
Si l'on considere que dans le Corol. 2. de ce Probl. 23. les variabilitez, chacune à l'infini, des deux seuls angles arbitraires QGT, GTL, des Fig. 394. 395. 396. y fournissent ensemble une infinité d'infinité de directions differentes à chacune des puissances H, K, au lieu d'une qu'on y demandoit pour chacune; & en consequence y fournissent aussi une infinité d'infinité tant de solutions de ce Probl. 23. que (suivant son Corol. 3.) de charges de l'appui qui est donné, & que de directions de ces charges: cela (dis-je) consideré, on verra que les differentes combinaisons des variabilitez, chacune aussi à l'infini, des quatre angles QGO, GOI, OIT, ITL, ici arbitraires dans la Fig. 398. y doivent donner un nombre beaucoup plus de fois infini de directions à chacune des puissances H, K, P, S, au lieu de chacune une qu'on leur demandoit pareillement ici; & aussi en consequence un pareil nombre de solutions tant du Problême dont il s'agit ici, que de charges differentes de l'appui qui y est donné, & que de directions de ces charges.

On voit de là que ce nombre de solutions du Problême, de charges de l'appui donné, & de directions de ces charges, augmenteroit d'infini en infini, à proportion qu'il y

auroit plus de puiſſances données dans ce Problême, deſquelles une ſeule auroit ſa direction donnée avec ſon point d'application au Levier propoſé d'appui donné, ſur lequel il faudroit mettre (comme dans la ſolution précedente) toutes ces puiſſances données en équilibre entr'elles, quel qu'en fût le nombre ; c'eſt-à-dire, à proportion qu'il y auroit plus de puiſſances de directions demandées dans ce Problême avec leur point d'application au Levier propoſé d'appui donné.

SCHOLIE.

Voilà juſqu'ici pour trouver l'équilibre, &c. ſur un appui donné d'un Levier quelconque entre tant de puiſſances qu'on voudra, données ou ſeulement de rapports donnez à volonté ; deſquelles une ſeule quelconque auroit ſa direction donnée avec ſon point d'application à ce Levier, & toutes les autres de directions demandées avec leurs points d'application à ce même Levier. Preſentement ſi au lieu de la direction & du point d'application d'une ſeule de ces puiſſances à ce Levier, les directions de deux ou de pluſieurs d'entr'elles étoient données avec leurs points d'application au même Levier quelconque d'appui donné, & qu'il ne s'agit plus que de trouver les points d'application à ce Levier, & les directions requiſes aux autres puiſſances pour les mettre en équilibre avec celles-là ſur cet appui, c'eſt-à-dire, pour mettre ſur lui en équilibre entr'elles tout ce qu'il y en auroit ici de données : il n'y auroit qu'à chercher, comme dans le Problême 17. en quel point du Levier propoſé il faudroit mettre un appui (le donné étant ôté pour un moment) ſur lequel ſeul ces ſeules puiſſances de directions données feroient équilibre entr'elles, quelle ſeroit la charge qui de leur concours reſulteroit à ce point d'appui, & la direction de cette charge ; prendre enſuite cette charge ainſi connue avec ſa direction, pour une ſeule puiſſance (que j'appelle π) qui lui ſeroit égale, appliquée en ſa place ſuivant


F f = QG = CD
H h = TL = EM = CN
K k = GT = CM
Fig. 393
Fig. 394
Fig. 395
Fig. 396
Fig. 399
Fig. 398
Fig. 397
F f = QG = CD =
H h = TL = ME = CN
K k = TI = MX = CY
P p = OI = βX = Cδ
S ſ = GO = Cβ =

ſa direction au point d'appui trouvé du Levier, ſur lequel toutes ces puiſſances de directions données feroient ſeules équilibre entr'elles. Alors (reſtituant l'appui donné, & ôtant le ſuppoſé) le Problême ainſi réduit à cette nouvelle puiſſance connue π, ſeule de point d'application & de direction connues, & aux autres toutes de points d'application & de directions demandées, ſeroit dans les conditions du dernier qu'on vient de reſoudre, & conſequemment ſe reſoudroit alors comme lui.





MACHINES SANS FROTTEMENT,

Démontrées ſuivant les principes de la Nouvelle Mécanique.

TOut ce que l'on voit de Machines ſans frottement, eſt fait d'un rouleau ou cylindre, qui ſert d'eſſieu à une roue en forme de poulie. Ce rouleau auquel pend un fardeau, eſt ſoûtenu par deux cables attachez au haut d'une eſpece de grue, en ſorte que ces cordes & celle du fardeau s'entortillent neceſſairement autour de ce rouleau dès que la puiſſance appliquée à ſa roue l'oblige de tourner.

La ſeule vûe de ces Machines fait à la verité voir que tout cela s'y execute ſans frottemens ; mais en échange le rapport de la puiſſance au poids qu'elle doit enlever, y paroît ſi conſiderablement au-deſſus de ce qu'il ſeroit, ſi cette poulie ne tournoit que ſur un centre fixe, qu'il y a grand lieu d'appréhender qu'on ne perde bien autant, & peut-être plus, de ce côté-là, qu'on ne gagne de l'autre.

FIG. 400. En effet, ſans même avoir d'égard à la peſanteur de la poulie & de ſon rouleau, ſi l'on conſidere, lorſque cette Machine MHN s'appuye en H ſur les bras de gruau CD, que la puiſſance E ſoûtient le poids F, de même qu'elle feroit avec un levier GL, dont l'appui ſeroit en H, & auquel cette puiſſance & ce poids ſeroient appliquez en G & en L ; l'on trouvera que cette puiſſance & ce poids doivent ici être entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées du point H ſur leurs directions EG & FL ; c'eſt-à-dire, lorſque ces directions ſont paralleles, comme HL à HG, ou bien (en faiſant HI parallele à ces directions, & par le centre A l'horiſontale MN) comme IN à IM ;

IM ; au lieu que dans l'uſage ordinaire où cette Machine tourneroit autour de ſon centre A ſur un pivot fixe (faiſant abſtraction du frottement qu'il y auroit) la puiſſance E ſeroit toûjours au poids F, quelques directions qu'ils euſſent, comme le rayon AN du rouleau HN au rayon AM de la poulie : ce qui demande un ſurcroît de forces dans la puiſſance E d'autant plus conſiderable que les bras de gruau CD font un plus grand angle avec l'horiſon ; parce qu'alors IA en devenant plus grande, le rapport de IN à IM en ſurpaſſe auſſi d'autant plus celui de AN à AM.

Par exemple, ſuppoſé que ces bras de gruau CD faſſent un angle de 30. deg. avec l'horiſon auquel les directions EG & FL ſoient perpendiculaires, l'angle IHA, étant auſſi pour lors de 30. degrez, IA ſera la moitié de AN : faiſant donc AN de deux parties, dont le rayon AM en contienne, ſi l'on veut, 10. AN ſera en ce cas à MA, comme 2. à 10. & IN ſera à MI, comme 3. à 9. Ainſi ſi le poids F étoit, par exemple, de 100. liv. dans l'uſage ordinaire où le point fixe ſeroit en A, la puiſſance E ne ſeroit que de 20. liv. & dans l'uſage preſent elle devroit être de 33. liv. $\frac{1}{3}$. Si l'angle de ces bras de gruau avec l'horiſon étoit de 50. deg. l'angle IHA étant auſſi pour lors de 50. deg. AI ſeroit de 1. $\frac{1830127}{2500000}$. ce qui feroit IN de 3. $\frac{1830127}{2500000}$. & IM de 8. $\frac{669873}{2500000}$. ainſi la puiſſance E ſeroit alors de 45. liv. $\frac{2868415}{20669873}$ ce qui eſt plus du double de ce qu'elle ſeroit dans l'uſage ordinaire. Si l'angle de gruaux avec l'horiſon étoit de 70. deg. par un ſemblable changement, la puiſſance E ſeroit de 47. liv. $\frac{15674061}{20301537}$. & ainſi toûjours en augmentant à meſure que cet angle augmentera, juſqu'à ce qu'enfin ces bras de gruau ſoient perpendiculaires à l'horiſon ; & alors l'appui du rouleau HA ſe trouvant en B, comme dans la Machine où ce rouleau ne ſeroit ſoutenu qu'avec des cordes perpendiculaires KB, la puiſſance E ſeroit au poids F,

comme le diamétre BN du rouleau HN à BM moitié de la difference qui est entre ce diamétre & celui de la poulie ; c'est-à-dire ici, comme 4. à 8. ou comme 50. liv. contre 100. liv. & par consequent une fois & demi plus grande qu'il n'auroit fallu dans l'usage ordinaire. Après cela je laisse à juger s'il y a du gain ou de la perte à sauver ainsi les frottemens.

Il est vrai que le poids F doit monter ici plus vîte que dans les Machines ordinaires, puisqu'il monte ici, & parce que sa corde s'entortille au rouleau HN, & parce que ce rouleau lui-même monte encore ; au lieu que dans les Machines ordinaires ce poids ne monte que par l'entortillement de sa corde autour de ce rouleau : mais ce surcroît de vîtesse n'est point du tout à comparer à cette augmentation de puissance, vû qu'on est bien plus maître du tems que des forces : outre qu'à toute rigueur, c'est-à-dire, toute vîtesse bien comptée, cette augmentation de forces seroit encore assez considerable pour faire douter s'il n'y a point plus de perte que de gain à sauver ainsi les frottemens. En effet à prendre même la plus grande vîtesse que ce poids puisse avoir avec ce rouleau mobile ; c'est-à-dire, à la prendre double de ce qu'elle seroit si ce rouleau avoit son axe fixe ; la puissance E ne devroit être alors tout au plus que double de ce qu'elle seroit dans ce dernier état ; & par consequent n'étant ici que de 20. liv. pour l'axe fixe de ce rouleau, elle ne devroit être tout au plus que de 40. liv. sur cet axe mobile. On la vient cependant de trouver de 50. liv. c'est donc 10. liv. pour les frottemens que causeroient à ce rouleau fixe une puissance de 20. liv. contre un poids de 100. Ce qui non seulement ici, où l'on suppose AM à AN, comme 10. à 2. mais encore dans tout autre rapport de ces rayons, fait assez voir qu'une telle puissance est toûjours à ce qu'il en coûte pour sauver ainsi les frottemens, *comme la difference du rayon de la roue à celui de son rouleau, est au diamétre entier de ce même rouleau.* Et cela, comme l'on voit, sans compter ce qu'il faut encore ici dépenser de forces pour des vîtesses dont on se passeroit bien.

DEMONSTRATION.

La force de la puissance E seroit au poids F sur le point A comme AM à MA, ou comme BN à 2MA : & ce poids F lui seroit sur l'appui B comme MB à BN : la force de la puissance E sur ce point A seroit donc à celle qu'il lui faudroit sur B, comme BM à 2MA, retirant donc 2BM de 2MA, comme l'on vient de faire 40. de 50. pour fournir à la vîtesse qu'on trouve ici double de ce qu'elle seroit sur ce point A. Ce reste sera donc 2BA ou BA pour la mesure de ce qu'il en faudroit encore, toute vîtesse bien comptée par ces frottemens. Ainsi la force de la puissance E sur le point A devroit toûjours être à celle des frottemens qu'elle y causeroit, comme BM à BN, c'est-à-dire, *comme la difference du rayon de la roue à celui de son rouleau, est au diametre entier de ce même rouleau.* C. Q. F. D.

Je ne compte point non plus ce qu'il faudroit encore de forces pour enlever la poulie avec son rouleau, qu'on a jusqu'ici regardez comme sans pesanteur. Voici le tout en general, & pour tous les cas possibles.

PROPOSITION PREMIERE.

Soit la puissance E appliquée suivant EC à la poulie CG, dont l'axe est un rouleau BA tellement soûtenu avec les cordes BK sur les bras de gruau IT, que ces cordes, aussi-bien que AF, qui est celle du poids F, s'entortillent necessairement autour de ce rouleau dès que l'on fera tourner la roue CG conformément à l'effort de la puissance E. Quelque angle OPA que la direction OP du centre de gravité O commun à la roue CG & à son rouleau BA, fasse avec la direction AF du poids F : quelque angle aussi PZC que la direction PQ de l'impression commune qui resulte de leur concours d'action, fasse avec CE direction de la puissance E ; je dis qu'en cas d'équilibre, Fig. 401. 402. 403.

1°. *La puissance E sera à la charge des bras de gruau IT sur lesquels le rouleau BA est appuyé, comme le produit des sinus des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles KHZ & QZE.*

2°. La puiſſance E ſera à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'eſt-à-dire, la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles ZHO, & QZE.

3°. La puiſſance E ſera à tout le poids de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA, au produit des ſinus des angles EZH & ZPA.

4°. La puiſſance E ſera au poids F, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA, au produit des ſinus des angles EZH & OPZ.

DEMONSTRATION.

Pour avoir les angles des directions AP, OP, CE & KB, concevons-les toutes dans un même plan perpendiculaire à l'axe du rouleau BA, de même que ſeroient les coupes faites ſur ce plan par autant d'autres plans qui paſſant par ces lignes, lui ſeroient perpendiculaires. De-là quelque angle APO que faſſent entr'elles AP & OP directions du poids F, & de la Machine CA faite de la poulie CG & du rouleau BA ; il eſt clair par toutes les propoſitions de la nouvelle Mécanique, que tout ce que cette Machine en reçoit d'impreſſion, non ſeulement ſe fait ſuivant la diagonale PQ de quelque parallelogramme MN, dont les côtez PM & PN ſont pris ſur les directions AP, OP, mais encore que cette impreſſion compoſée ſur la Machine CA, eſt la même (*Corol. 6. Lem. 3.*) que ſi au lieu de la peſanteur de cette Machine & du poids F, elle étoit ſeulement pouſſée ſuivant PQ par une force égale à celle que lui cauſent ces deux enſemble. On peut donc regarder cette Machine ainſi tirée en même tems par ſa peſanteur, par le poids F, & par la puiſſance E, comme ſi elle ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée ſuivant PQ & par la puiſſance E appliquée ſuivant CE : ainſi quelque angle QZE que ces directions faſſent entr'elles, il faut encore pour la même raiſon que ce que la Machine CA recevra d'impreſſion de ces deux forces, c'eſt-à-dire, du concours d'action de ſa peſanteur, de

celle du poids F, & de la puissance E, suivie de même la diagonale ZX de quelqu'autre parallelogramme VY, dont les côtez ZV & ZY soient pris sur PQ & CE prolongées ; & de plus que cette commune impression soit la même sur cette Machine, que si au lieu de ces trois forces, elle étoit seulement poussée suivant ZX par une autre force égale à celle que lui causent ces trois ensemble. On peut donc encore regarder cette Machine comme n'ayant d'impression de toute sa charge, que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner suivant ZX contre la resistance du crochet K ; & alors ainsi chargée, elle sera comme un poids d'une direction suivant ZX que le crochet K suivant KB qui rencontre ZX prolongée en H, retiendra sur la surface IT ; de sorte qu'en cas d'équilibre, il faudra (*Th.* 26.) que de l'impression suivant HZ, que l'on peut encore regarder comme composée de deux autres, dont l'une suivroit KH prolongée vers β, & l'autre une ligne OHω perpendiculaire au bras de gruau IT, (la resistance du crochet K soûtenant celle qui suivroit Hβ) il n'en reste à cette Machine CA que suivant ligne Hω.

Achevant donc le parallelogramme ωβ, dont la diagonale Hϖ se trouve dans la direction HZ, l'on trouvera (*Corol.* 1. *Lem.* 3.) qu'en cas d'équilibre la charge des bras de gruau representez par IT, doit être à la resistance des crochets K, & à l'impression suivant HZ de la charge entiere de la Machine CA, comme le côté Hω au côté Hβ, & à la diagonale Hϖ du parallelogramme ωβ ; de sorte que cette impression totale suivant HZ, la resistance des crochets K, & la charge des bras de gruau IT, sont alors entr'elles comme les lignes Hϖ, Hβ, & Hω ; c'est-à-dire, comme les sinus des angles ωHβ, ωHϖ, & βHϖ ; ou comme les sinus des angles KHO, ZHO, & KHZ.

Or à cause que cette impression suivant HZ suit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallelogramme VY, dont les côtez ZY & ZV ont été pris sur les directions des forces dont

cette impreſſion eſt compoſée, c'eſt-à-dire, ſur les directions prolongées CZ & PZ de la puiſſance E & de la force qui ſuit FQ ; cette puiſſance E, cette force ſuivant QZ, & cette impreſſion ſuivant HZ ſont auſſi entr'elles (*Cor.* 1. *Lem.* 3.) comme ZY, ZV, & ZX, comme les ſinus des angles VZX, YZX, & VZY, c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles QZH, EZH, & QZE.

De plus la force qui ſuit QZ, ſuivant auſſi (*Hyp.*) la diagonale PQ du parallelogramme MN, dont les côtez PM & PN ont été pris ſur les directions AM & ON du poids F & de la peſanteur de la Machine CA ; cette force, le poids F, & la peſanteur de cette Machine, pour la même raiſon, ſont encore entr'eux comme les ſinus des angles NPM, NPQ, & MPQ, c'eſt-à-dire, comme les ſinus des angles OPA, OPZ, & APZ.

Donc en multipliant deux à deux ſelon l'ordre de leurs termes toutes ces rangées de proportionnelles :

{ Impreſ. ſuiv. HZ.	ch. des bras de gr. IT	: :	ſKHO.	ſKHZ.
{ Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. HZ	: :	ſQZH.	ſQZE.
{ Impreſ. ſuiv. HZ.	reſiſt. des crochets K	: :	ſKHO.	ſZHO.
{ Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. HZ	: :	ſQZH.	ſQZE.
{ Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. QZ	: :	ſQZH.	ſEZH.
{ Impreſ. ſuiv. QZ.	peſ. de la Mach. CA	: :	ſOPA.	ſAPZ.
{ Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. QZ	: :	ſQZH.	ſEZH
{ Impreſ. ſuiv. QZ.	poids F	: :	ſOPA.	ſOPZ.

L'on aura, 1°. la puiſſance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles KHZ & QZE. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles KHO & QZH au produit des ſinus des angles ZHO & QZE. 3°. La puiſſance E au poids de la Machine CA, comme le produit des ſinus des angles QZH & OPA au produit des ſinus des angles EZH & APZ. 4°. La puiſſance E au poids F, comme le produit

des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & OPZ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

De-là suppléant les figures de tous les autres cas, il seroit aisé de tirer une infinité de Corollaires, qui découvriroient encore non seulement en general les rapports qui sont entre la charge des bras de gruau IT, la resistance des crochets K, la pesanteur de la Machine CA, & le poids F dans toutes les combinaisons possibles ; mais aussi le détail tant de ces rapports que des précedens pour toutes les inclinaisons possibles des bras de gruau IT, & pour toutes les directions imaginables des cordes BK, de la puissance E, du poids F, & de la Machine CA. Je passe tout cela, parce qu'il est plus long que difficile à conclure ; outre que le seul cas des directions paralleles que j'ai d'abord examiné, suffit avec quelques experiences sur les frottemens, pour juger s'il y a du gain ou de la perte à les sauver ainsi.

Outre cette maniere de sauver les frottemens de la Machine CA, l'on pourroit encore en imaginer une autre, où les crochets K seroient vers le bas, & où cette machine devroit descendre pour enlever le poids F ; & cette maniere seroit d'autant au-dessus de l'autre, que, 1°. l'on n'auroit plus cette machine à enlever ; 2°. au contraire elle aideroit elle-même par sa pesanteur à enlever le poids F ; 3°. regardant la puissance E & le poids F appliquez en G & en L à un Levier HG, dont l'appui fût en H, l'on trouveroit aussi que le bras de la puissance E seroit à celui du poids F en plus grande raison que dans la maniere de M. Perault : mais aussi d'un autre côté on ne sauveroit pas tous les frottemens de la machine entiere ; puisque la poulie I, sur laquelle la corde du poids F doit passer, y seroit toûjours sujette. FIG. 404.

PROPOSITION II.

En ce cas le rapport general de la puissance E seroit, 1°. à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des sinus

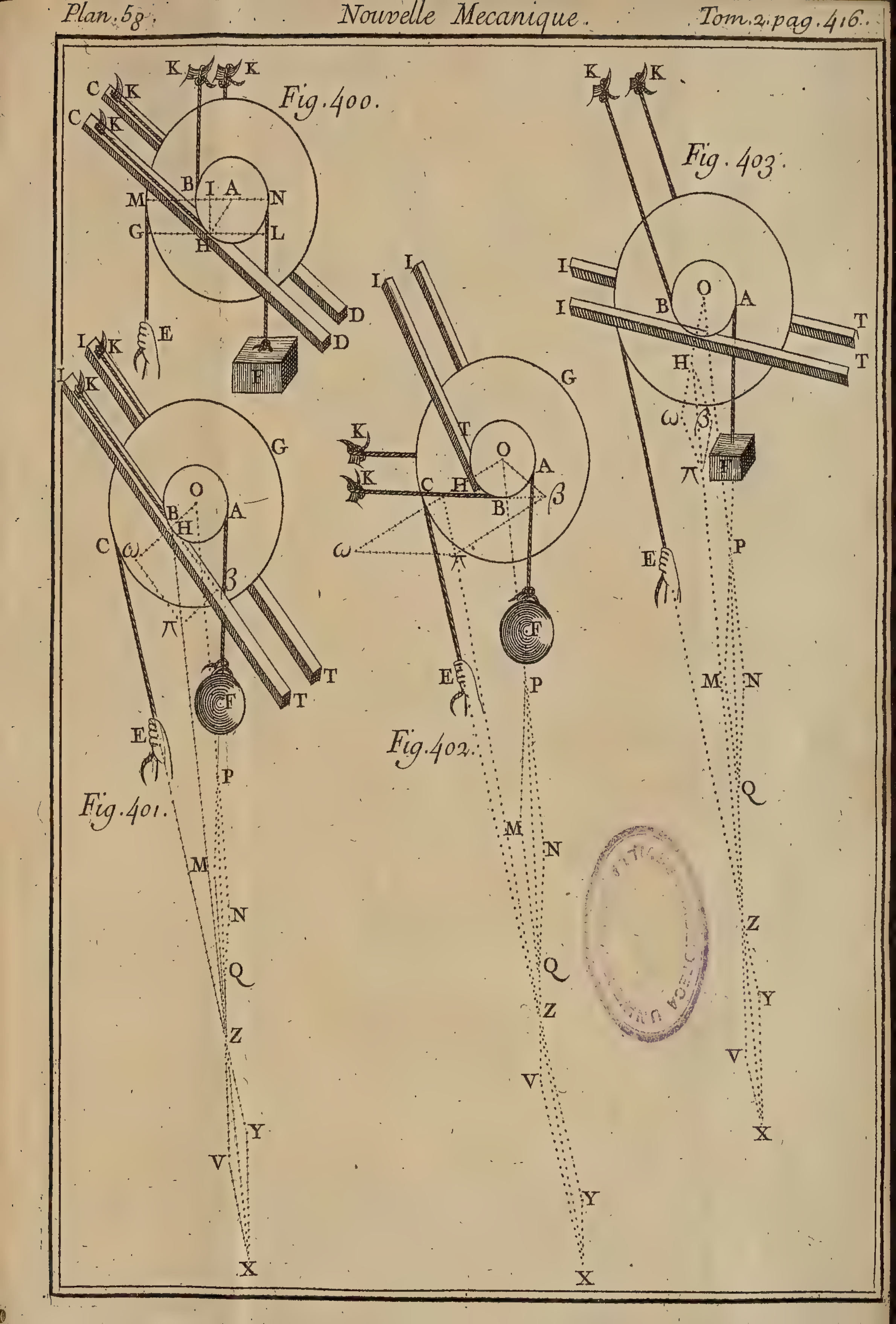
des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles KHZ & QZE : 2°. à la resistance des crochets K, comme le produit des sinus des angles KHO & QZH au produit des sinus des angles ZHO & QZE : 3°. à tout le poids de la machine faite de la poulie CG & de son rouleau BA, comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & APZ : 4°. au poids F, comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & OPZ : 5°. à la charge de la poulie I, comme le produit des sinus des angles QZH, OPA, & ADI au produit des sinus des angles EZH, OPZ, & ADF.

DEMONSTRATION.

Tout cela se démontrera encore dans toute son étendue par la démonstration précedente, excepté l'art. 5. pour lequel il faut de plus ajoûter suivant la part. 2. du Th. 14. que le poids F est à la charge de la poulie I, comme le sinus de l'angle ADI, au sinus de l'angle ADF ; afin que multipliant cette rangée de proportionnelles par celle de l'art. 4. où la puissance E est au poids F, comme le produit des sinus des angles QZH & OPA au produit des sinus des angles EZH & OPZ ; la puissance E se trouve à la charge de la poulie I, comme le produit des sinus des angles QZH, OPA, & ADI, au produit des sinus EZH, OPZ, & ADF ; c'est-à-dire (dans l'hypothese ordinaire, où les directions PO & DF de la pesanteur de la machine CA & du poids F, passent pour paralleles) comme le produit des sinus des angles QZH & ADI au produit des sinus des angles EZH & OPZ.

La combinaison & le détail de tous ces rapports sont encore plus longs que difficiles ; outre qu'il n'est pas ici tout-à-fait question de cette derniere maniere de sauver les frottemens. Je passe donc à l'autre.

PROP.


Fig. 400.
Fig. 401.
Fig. 402.
Fig. 403.

PROPOSITION III.

Toutes choses demeurant les mêmes que dans la premiere proposition, quelque angle OPC que la direction OP du centre de gravité O commun à la roue CG & à son rouleau BA, fasse avec la direction CP de la puissance E : quelque angle aussi PZA que la direction PQ de l'impression commune qui resulte de leur concours d'action, fasse avec ZA direction du poids F; je dis encore qu'en cas d'équilibre, Fig. 405.

1°. *La puissance E est à la charge des bras de gruau IT, sur lesquels le rouleau BA est appuyé, comme le produit des sinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des sinus des angles OPC, PZA, & KHZ.*

2°. *La puissance E est à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'est-à-dire, à la resistance des crochets K, comme le produit des sinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des sinus des angles OPC, PZA, & ZHO.*

3°. *La puissance E est à tout le poids de la poulie CG & de son rouleau BA, comme le sinus de l'angle OPQ à celui de l'angle CPQ.*

4°. *La puissance E est au poids F, comme le produit des sinus des angles OPQ & HZA, au produit des sinus des angles OPC & PZH.*

DEMONSTRATION.

Par un raisonnement tout semblable à celui des démonstrations précedentes, quelque angle CPO que les directions CP & OP de la puissance E & de la machine CA, fassent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impression commune; & faisant sur leurs directions particulieres le parallelogramme MN, dont la diagonale soit sur PQ; l'on trouvera que la puissance E, le poids de la machine CA, & la force de ce qui resulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ, sont entr'eux comme les sinus des angles OPQ, CPQ, & OPC. De même quelque angle PZA que PQ prolongée fasse avec

la direction ZA du poids F, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme VY, dont la diagonale ZX prolongée paſſe par le point H, où la corde KB concourt avec la ligne Oω tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement ſur le bras de gruau IT; l'on trouvera encore que le poids F, la force qui ſuit PQ, & celle de l'impreſſion qui reſulte de leur concours d'action ſuivant ZX ou HZ, ſont entr'eux comme les ſinus des angles PZH, AZH, & PZA. Enfin ſur Oω & KB prolongée achevant le parallelogramme ωβ, dont la diagonale Hπ ſoit ſur HZ, l'on aura encore de la même maniere l'impreſſion qui ſuit ainſi ZX ou HZ, la charge des bras de gruau IT, & la reſiſtance des crochets K entr'elles comme les ſinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	: :	ʃOPQ. ʃOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	: :	ʃHZA. ʃPZA.
Impreſ. ſuiv. ZX.	ch. des bras de gr. IT	: :	ʃKHO. ʃKHZ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	: :	ʃOPQ. ʃOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	impreſſion ſuiv. ZX	: :	ʃHZA. ʃPZA.
Impreſ. ſuiv. ZX.	reſiſt. des crochets K	: :	ʃKHO. ʃZHO.
Puiſſance E.	poids de la Mach. CA	: :	ʃOPQ. ʃCPQ.
Puiſſance E.	impreſſion ſuiv. PQ	: :	ʃOPQ. ʃOPC.
Impreſ. ſuiv. PQ.	poids F.	: :	ʃHZA. ʃPZH.

L'on aura, 1°. la puiſſance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & KHZ. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles OPQ, HZA, & KHO, au produit des ſinus des angles OPC, PZA, & ZHO. 3°. La puiſſance E à tout le poids de la machine faite de la roue

CG & de ſon rouleau BA, comme le ſinus de l'angle OPQ au ſinus de l'angle CPQ. 4°. La puiſſance au poids F, comme le produit des ſinus des angles OPQ & HZA au produit des ſinus des angles OPC & PZH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION IV.

Toutes choſes demeurant encore les mêmes que dans la propoſition précedente, quelque angle APC que la direction AP du poids F, faſſe avec la direction CP de la puiſſance E: quelque angle auſſi PZO que la direction PQ de l'impreſſion commune qui reſulte du concours d'action, faſſe avec ZO direction du centre de gravité O commun à la roue CG & à ſon rouleau BA; je dis encore qu'en cas d'équilibre, FIG. 406.

1°. *La puiſſance E eſt à la charge des bras de gruau IT, ſur leſquels le rouleau BA eſt appuyé, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & KHZ.*

2°. *La puiſſance E eſt à la force qu'il faudroit pour retenir la corde BK, c'eſt-à-dire, à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & ZHO.*

3°. *La puiſſance E eſt à tout le poids de la poulie CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles APQ, & HZO, au produit des ſinus des angles CPA & PZH.*

4°. *La puiſſance E eſt au poids F comme le ſinus de l'angle APQ à celui de l'angle CPQ.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement encore tout ſemblable à celui des démonſtrations précedentes, quelque angle CPA que les directions CP & AP de la puiſſance E & du poids F, faſſent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impreſſion commune, & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme MN, dont la diagonale ſoit ſur PQ, l'on trouvera que la puiſſance E, le poids F, & la

force de ce qui resulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ, sont entr'eux comme les sinus des angles APQ, CPQ, & CPA. De même quelque angle PZO que PQ prolongée fasse avec la direction ZO de la machine CA, faisant sur ces lignes le parallelogramme VY, dont la diagonale ZX prolongée passe par le point H où la corde KB concourt avec la ligne Oω, tirée du centre O du rouleau BA perpendiculairement sur le bras de gruau IT; l'on trouvera encore que le poids de la machine CA, la force qui suit PQ, & celle de l'impression qui resulte de leur concours d'action suivant ZX ou ZH, sont entre-eux comme les sinus des angles PZH, HZO, & PZO. Enfin sur Oω & KB prolongée faisant le parallelogramme ωβ dont la diagonale Hϖ soit sur HZ; l'on aura encore de la même maniere l'impression qui suit ainsi ZX ou HZ, la charge des bras de gruau IT, & la resistance des crochets K entr'elles, comme le sinus des angles KHO, KHZ, & ZHO.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici sous un même crochet:

Puissance E.	impression suiv. PQ ::	ſAPQ.	ſCPA.
Impres. suiv. PQ.	impression suiv. ZX ::	ſHZO.	ſPZO.
Impres. suiv. ZX.	ch. des bras de gr. IT ::	ſKHO.	ſKHZ.
Puissance E.	impression suiv. PQ ::	ſAPQ.	ſCPA.
Impres. suiv. PQ.	impression suiv. ZX ::	ſHZO.	ſPZO.
Impres. suiv. ZX.	resist. des crochets K ::	ſKHO.	ſZHO.
Puissance E.	impression suiv. PQ ::	ſAPQ.	ſCPA.
Impres. suiv. PQ.	poids de la Mach. CA ::	ſHZO.	ſPZH.
Puissance E.	poids F. ::	ſAPQ.	ſCPQ.

L'on aura, 1°. la puissance E à la charge des bras de gruau IT, comme le produit des sinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des sinus des angles CPA,

PZO, & KHZ. 2°. La puiſſance E à la reſiſtance des crochets K, comme le produit des ſinus des angles APQ, HZO, & KHO, au produit des ſinus des angles CPA, PZO, & ZHO. 3°. La puiſſance E à tout le poids de la machine faite de la roue CG & de ſon rouleau BA, comme le produit des ſinus des angles APQ & HZO au produit des ſinus des angles CPA & PZH. 4°. La puiſſance E au poids F, comme le ſinus de l'angle APQ au ſinus de l'angle CPQ. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je ne dis rien encore de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces deux propoſitions, en ſuppléant, comme dans la premiere, les figures de tous les cas que leur univerſalité comprend. Il ſuffit de faire remarquer que l'uſage de la premiere propoſition eſt (la peſanteur de la machine CA & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la puiſſance E) de faire trouver la valeur de la puiſſance E, &c. L'uſage de la troiſiéme eſt (la puiſſance E, & la peſanteur de la machine CA étant donnée avec leurs directions, & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F, &c. L'uſage de la quatriéme eſt (la puiſſance E & le poids F étant donnez avec leurs directions & celle de la machine CA) de faire trouver la peſanteur de la machine CA, &c.

Voilà, ce me ſemble, tout ce que l'on peut demander par rapport à l'uſage preſent de la machine CA. Je paſſe donc au rouleau que M. Perault fait encore agir ſans frottement au pied de ſa machine, pour en augmenter, dit-il, la force.

Ce rouleau eſt GG tellement lié dans les cordes HI, que lorſqu'on le fait tourner en abaiſſant les Leviers LN, les cordes I s'entortillent à l'entour, les cordes H ſe détortillent, & le rouleau deſcend. D'où il arrive que ſi la puiſſance E tient aſſez ferme contre le poids E, la corde ED pour l'empêcher de gliſſer ſur ce rouleau, ce poids ſe trouve obligé de monter, & parce que ce rouleau deſcend, & parce que ſa corde doit auſſi pour lors s'entortiller autour de ce même rouleau. FIG. 407.

FIG. 408. Il eſt encore manifeſte que dans cet uſage du rouleau GG, ſon mouvement ne ſe fait point ſur ſon axe, mais ſeulement ſur une ligne qui joint les points où les cordes H & I ſe rencontrent; c'eſt-à-dire (en regardant ce rouleau de profil) ſeulement comme ſur l'extrêmité K de cette ligne, avec un levier LK, auquel ſont appliquez en L, G, & M, la puiſſance L, le poids du rouleau G, & le poids F, dont je ſuppoſe la corde DE retenue par la puiſſance E ſur le rouleau G, de même que ſi elle y étoit ſeulement attachée. Ainſi, 1°. le poids du rouleau G, & ce qu'il ſoûtient pour ſa part du poids F, doivent ici être entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées de l'appui K ſur leurs directions. 2°. La puiſſance L, & le reſte du poids F, ſont auſſi entr'eux en raiſon reciproque des perpendiculaires tirées du même point K ſur leurs directions: de ſorte que lorſque ces directions ſont paralleles à la partie de corde KI ou KH, dont l'extrêmité ſert d'appui K, ces perpendiculaires ſe confondant avec le diamétre KN & le levier LN, que je lui ſuppoſe en ligne droite; le poids du rouleau G ſera à ce qu'il ſoûtient pour ſa part du poids F, comme le diamétre KN à ſa moitié KG; & la puiſſance L au reſte du poids F, comme le diamétre KN à la ſomme LK faite de ce diamétre & du levier LN.

D'où il s'enſuit que ſi en ce cas le diamétre KN étoit de 4. parties, dont le levier LN fût (ſi l'on veut) de 10. que de plus le poids F fût de 100. liv. & la peſanteur du rouleau G de 10. liv. puiſque cette peſanteur du rouleau G eſt à ce qu'elle ſoutient du poids F, comme le diamétre NK à ſa moitié GK, c'eſt-à-dire, comme 2. à 1. cette partie du poids F que la peſanteur du rouleau G ſoutiendroit pour ſa partie, ſeroit de 5. liv. ainſi ce reſte ſoûtenu par la puiſſance L ſeroit de 95. liv. leſquelles étant auſſi à cette puiſſance L, comme LK à NC, c'eſt-à-dire ici, comme 14. à 4. cette même puiſſance, quoique ſecourue de la peſanteur du rouleau G, ſeroit encore de 27. liv. $\frac{1}{7}$ au lieu que dans l'uſage ordinaire de ce rouleau,

où son axe G seroit fixe, cette puissance L ne seroit que de 16. liv. $\frac{2}{3}$. c'est-à-dire, près de la moitié moins qu'ici. Voici le tout en general, & pour tous les cas possibles.

PROPOSITION V.

Soit la puissance L appliquée par le moyen d'un levier LN au rouleau G lié, comme l'on vient de dire, suivant HNMI dans une corde attachée par ses extrémitez aux crochets H & I, & auquel le poids F soit aussi appliqué avec une corde DM, laquelle entortillée aussi autour, soit retenue dessus par quelque puissance ou autrement : quelque angle LPG que fassent entr'elles les directions LP & GP de la puissance L, & du rouleau G : quelque angle aussi QZD que la direction PQ de l'impression commune qui resulte de leur concours d'action, fasse dans sa rencontre en Z avec DM direction du poids F; Je dis qu'en cas d'équilibre, FIG. 409. jusqu'à 412.

1°. *La puissance L est au poids du rouleau G, comme le sinus de l'angle ZPG, au sinus de l'angle ZPL.*

2°. *La puissance L est au poids F, comme le produit des sinus ZPG & DZK, au produit des sinus des angles LPG & QZK.*

3°. *La puissance L est à la resistance du crochet I, comme le produit des sinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des sinus des angles LPG, QZD, & ZKH.*

4°. *La puissance L est à la resistance du crochet H, comme le produit des sinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des sinus des angles LPG, QZD, & ZKI.*

DEMONSTRATION.

Quelqu'angle LPG que fassent entr'elles LP & GP directions de la puissance L & du rouleau G, équipé comme il est ici, il est clair par toutes les propositions de la Nouvelle Mécanique, que ce que ce rouleau en reçoit d'impression, non seulement se fait suivant la diagonale PQ de quelque parallelogramme RS, dont les côtez soient pris sur les directions de LP & de GP, mais encore

que cette impreſſion compoſée ſur le rouleau G, eſt la même (*Corol.* 2. *Lem.* 3.) que ſi au lieu de la puiſſance L & de la peſanteur de ce rouleau, il étoit ſeulement pouſſé ſuivant PQ par une force égale à celle que lui cauſent ces deux enſemble : l'on peut donc regarder ce rouleau ainſi tiré en même tems par ſa peſanteur, par la puiſſance L, & par le poids F, comme s'il ne l'étoit que par cette nouvelle force appliquée ſuivant PQ, & par le poids F appliqué ſuivant DM ; ainſi quelque angle DZQ que ces directions faſſent entr'elles, il faut encore pour la même raiſon que ce que le rouleau G recevra d'impreſſion de ces deux forces, c'eſt-à-dire, du concours d'action de ſa peſanteur, de celle du poids F, & de la puiſſance L, ſuive de même la diagonale ZX de quelqu'autre parallelogramme AB, dont les côtez ſoient pris ſur PQ & DM prolongées, & que cette commune impreſſion ſoit la même ſur ce rouleau ; que ſi au lieu de ces trois forces, il étoit ſeulement pouſſé ſuivant ZX par une autre force égale à celle que lui cauſent ces trois enſemble. On peut donc encore regarder ce rouleau comme n'ayant d'impreſſion en tout que ce que cette nouvelle force lui en pourroit donner ſuivant ZX contre la reſiſtance des cordes HK & KI.

Ainſi cette direction ZX prolongée doit paſſer (*Corol.* 15. *Lem.* 3.) par le point K où ces cordes concourent ; & en cas d'équilibre (*Corol* 5. *Th.* 1.) la force de cette impreſſion ſuivant ZX, doit être à la reſiſtance de chaque crochet I & K, comme le ſinus de l'angle HKI à chacun des ſinus des angles ZKH & ZKI.

Or à cauſe que cette impreſſion ſuivant ZK ſuit (*Hyp.*) la diagonale ZX du parallelogramme AB, dont les côtez ZA & ZB ont été pris ſur les directions des forces dont cette impreſſion eſt compoſée, c'eſt-à-dire, ſur les directions DM & QZ du poids F, & de la force qui ſuit PQ ; cette impreſſion ſuivant ZX doit être (*Lem.* 3. *part.* 1.) au poids F, & à la force qui ſuit ZQ, comme la diagonale ZX du parallelogramme AB à ſes côtez ZA & ZB : de

de ſorte que cette impreſſion ſuivant ZX, le poids F, & la force qui ſuit ZQ, ſont entr'eux comme ZX, ZA, & ZB, ou comme les ſinus des angles QZD, QZK, & DZK.

De plus la force qui ſuit ZQ, ſuivant auſſi (*Hyp.*) la diagonale PQ du parallelogramme RS, dont les côtez PS & PR ont été pris ſur les directions LP & GP de la puiſſance L & du rouleau G; cette force ſuivant ZQ, la puiſſance L, & le poids du rouleau G, pour la même raiſon, ſont encore entr'eux comme les ſinus des angles LPG, ZPG, & ZPL.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on en voit ici ſous un même crochet:

{ Puiſſance L. poids du roul. G :: ſZPG. ſZPL.

{ Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
{ Impr. ſuiv. ZQ. poids F :: ſDZK. ſQZK.

{ Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
{ Impr. ſuiv. ZQ. impreſ. ſuiv. ZX :: ſDZK. ſQZD.
{ Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. I :: ſHKI. ſZKH.

{ Puiſſance L. impreſ. ſuiv. ZQ :: ſZPG. ſLPG.
{ Impr. ſuiv. ZQ. impreſ. ſuiv. ZX :: ſDZK. ſQZD.
{ Impr. ſuiv. ZX. reſiſt. du croch. H :: ſHKI. ſZKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L au poids du rouleau G, comme le ſinus de l'angle ZPG au ſinus de l'angle ZPL. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPG & DZK, au produit des ſinus des angles LPG & QZK. 3°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKH. 4°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPG, DZK, & HKI, au produit des ſinus des angles LPG, QZD, & ZKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VI.

Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la propoſition précedente, quelque angle MZG que faſſent entr'elles les directions DM & GZ du poids F & du rouleau G : quelque angle auſſi LPZ que la direction ZX de l'impreſſion commune qui reſulte de leur concours d'action, faſſe dans ſa rencontre en P avec LP direction de la puiſſance L ; Je dis encore qu'en cas d'équilibre ;

1°. *La puiſſance L eſt au poids du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & MZP.*

2°. *La puiſſance L eſt au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & PZG.*

3°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKH.*

4°. *La puiſſance L eſt à la reſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKI.*

DEMONSTRATION.

Par un raiſonnement tout ſemblable à celui de la démonſtration précedente, quelque angle MZG que les directions GZ & MZ du rouleau G & du poids F, faſſent entr'elles, prenant ZX pour la direction de leur impreſſion commune, & faiſant ſur leurs directions particulieres le parallelogramme AB, dont la diagonale ſoit ſur ZX ; l'on trouvera que la peſanteur du rouleau G, le poids F, & la force de ce qui réſulte d'impreſſion de leur concours d'action ſuivant ZX, ſont entr'eux comme les ſinus des angles MZP, PZG, & MZG. De même, quelque angle LPZ que ZX prolongée faſſe avec la direction LP de la puiſſance L, faiſant ſur ces lignes le parallelogramme RS, dont la diagonale PQ prolongée paſſe

par le point K, où les cordes HK & IK concourent ; l'on trouvera encore que la puiſſance L, la force qui ſuit ZX, & celle de l'impreſſion qui réſulte de leur concours d'action ſuivant PQ, ſont entr'elles comme les ſinus des angles ZPK, LPK, & LPZ. Enfin l'on trouvera encore (*Corol.* 5. *Th.* 1.) que la force qui ſuit ainſi PK, doit être à la réſiſtance de chaque crochet I & H, comme le ſinus de l'angle IKH à chacun des ſinus des angles PKH & PKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & les multipliant deux à deux ſelon l'ordre de leurs termes :

{ Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. ZX	::	ſZPK.	ſLPK.
{ Impr. ſuiv. ZX.	peſant. du roul. G	::	ſMZG.	ſMZP.
{ Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. ZX	::	ſZPK.	ſLPK.
{ Impr. ſuiv. ZX.	poids F	::	ſMZG.	ſPZG.
{ Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. PQ	::	ſZPK.	ſLPZ.
{ Impr. ſuiv. PQ.	réſiſt. du croch. I	::	ſIKH.	ſPKH.
{ Puiſſance L.	impreſ. ſuiv. PQ	::	ſZPK.	ſLPZ.
{ Impr. ſuiv. PQ.	réſiſt. du croch. H	::	ſIKH.	ſPKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L au poids du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & MZP. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le produit des ſinus des angles ZPK & MZG, au produit des ſinus des angles LPK & PZG. 3°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKH. 4°. La puiſſance L à la réſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles ZPK & IKH, au produit des ſinus des angles LPZ & PKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION VII.

Toutes choses demeurant encore les mêmes que dessus, quelque angle LPM que fassent entr'elles les directions LP & DM de la puissance L & du poids F : quelque angle aussi PZG que la direction PQ de l'impression commune qui résulte de leur concours d'action, fasse dans sa rencontre en Z avec ZG direction du rouleau G ; Je dis encore qu'en cas d'équilibre,

1°. *La puissance L est au poids du rouleau G, comme le produit des sinus des angles MPZ & GZK, au produit des sinus des angles LPM & PZK.*

2°. *La puissance L au poids F, comme le sinus de l'angle MPZ, au sinus de l'angle LPZ.*

3°. *La puissance L à la résistance du crochet I, comme le produit des sinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des sinus des angles LPM, GZP, & ZKH.*

4°. *La puissance L à la résistance du crochet H, comme le produit des sinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des sinus des angles LPM, GZP, & ZKI.*

DEMONSTRATION.

Par un raisonnement encore tout semblable à celui de la démonstration précedente ; quelque angle LPM que les directions LP & DM de la puissance L & du poids F fassent entr'elles, prenant PQ pour la direction de leur impression commune, & faisant sur leurs directions particulieres le parallelogramme RS, dont la diagonale soit sur PQ, l'on trouvera que la puissance L, le poids F, & la force de ce qui résulte d'impression de leur concours d'action suivant PQ, sont entr'eux comme les sinus des angles MPZ, LPZ, & LPM. De même quelque angle PZG que PQ prolongée fasse avec la direction ZG du rouleau G, faisant sur ces lignes le parallelogramme AB, dont la diagonale ZX prolongée passe par le point K où les cordes HK & IK concourent ; l'on trouvera encore que la pesanteur du rouleau G, la force qui suit PQ, &

celle de l'impreſſion qui réſulte de leur concours d'action ſuivant ZX, ſont entr'elles comme les ſinus des angles PZK, GZK, & PZG. Enfin l'on trouvera encore que la force qui ſuit ainſi ZK, doit être à la réſiſtance de chaque crochet I & H, comme le ſinus de l'angle IKH à chacun des ſinus des angles ZKH & ZKI.

Reprenant donc toutes ces rangées de proportionnelles, & multipliant entr'elles & par ordre tout ce que l'on voit ici ſous un même crochet:

Puiſſance L.	impreſ ſuiv. PQ ::	ſMPZ.	ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ.	peſant. du roul. G ::	ſGZK.	ſPZK.

Puiſſance L.	poids F. ::	ſMPZ.	ſLPZ.

Puiſſance L.	impreſ ſuiv. PQ ::	ſMPZ.	ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ.	impreſ ſuiv. ZX ::	ſGZK.	ſGZP.
Impr. ſuiv. ZX.	reſiſt. du croch. I ::	ſIKH.	ſZKH.

Puiſſance L.	impreſ ſuiv. PQ ::	ſMPZ.	ſLPM.
Impr. ſuiv. PQ.	impreſ ſuiv. ZX ::	ſGZK.	ſGZP.
Impr. ſuiv. ZX.	reſiſt. du croch. H ::	ſIKH.	ſZKI.

L'on aura, 1°. la puiſſance L à la peſanteur du rouleau G, comme le produit des ſinus des angles MPZ & GZK au produit des ſinus des angles LPM & PZK. 2°. La puiſſance L au poids F, comme le ſinus de l'angle MPZ au ſinus de l'angle LPZ. 3°. La puiſſance L à la reſiſtance du crochet I, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKH. 4°. La puiſſance L à la reſiſtance du crochet H, comme le produit des ſinus des angles MPZ, GZK, & IKH, au produit des ſinus des angles LPM, GZP, & ZKI. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Je n'entre point encore dans le détail de tous les Corollaires qu'on pourroit tirer de ces trois dernieres propoſitions, en ſuppléant dans la ſixiéme & la ſeptiéme, comme dans la cinquiéme, les Figures de tous les cas que leur

universalité comprend. Il suffit encore de faire remarquer que l'usage de la cinquiéme proposition est (la puissance L & le poids du rouleau G étant donnez avec leurs directions ; & celle du poids F) de faire trouver la valeur du poids F, &c. L'usage de la sixiéme est (le poids F & la pesanteur du rouleau G étant donnez avec leurs directions, & celle de la puissance L) de faire trouver la valeur de la puissance L ; &c. L'usage de la septiéme est (la puissance L & le poids F étant donnez avec leurs directions, & celle du rouleau G) de faire trouver le poids du rouleau G, &c.

L'application de tout cela aux Machines en question, fera voir ce que l'on doit attendre de cet usage du rouleau G : ce que j'en ai dit pour le cas des directions paralleles immédiatement avant la cinquiéme proposition, doit déja en avoir fait comprendre quelque chose.

FIG. 408. Mais on le verra encore mieux si l'on fait reflexion que lorsqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir reprise, il faut encore plus de force dans la puissance L, que lorsqu'il le faut abaisser. Pour le comprendre, il faut considerer, 1°. *que la puissance E doit étre plus grande que le poids F joint aux frottemens de sa corde sur le rouleau G, pour ne point se laisser emporter, lorsque, pour avoir reprise, il faut relever le levier LN*, puisqu'elle doit alors surmonter tout ce que ce poids joint à ces frottemens fait de resistance pour empêcher sa corde de glisser. 2°. *Au contraire la puissance E jointe à la resistance de ces frottemens, ne doit valoir que le poids F, pour empêcher sa corde de glisser sur le rouleau G ; lorsqu'il est question de faire monter ce poids par l'abaissement du levier LN* ; puisqu'il n'est alors besoin que de s'opposer à ce que ce poids fait d'efforts pour cela.

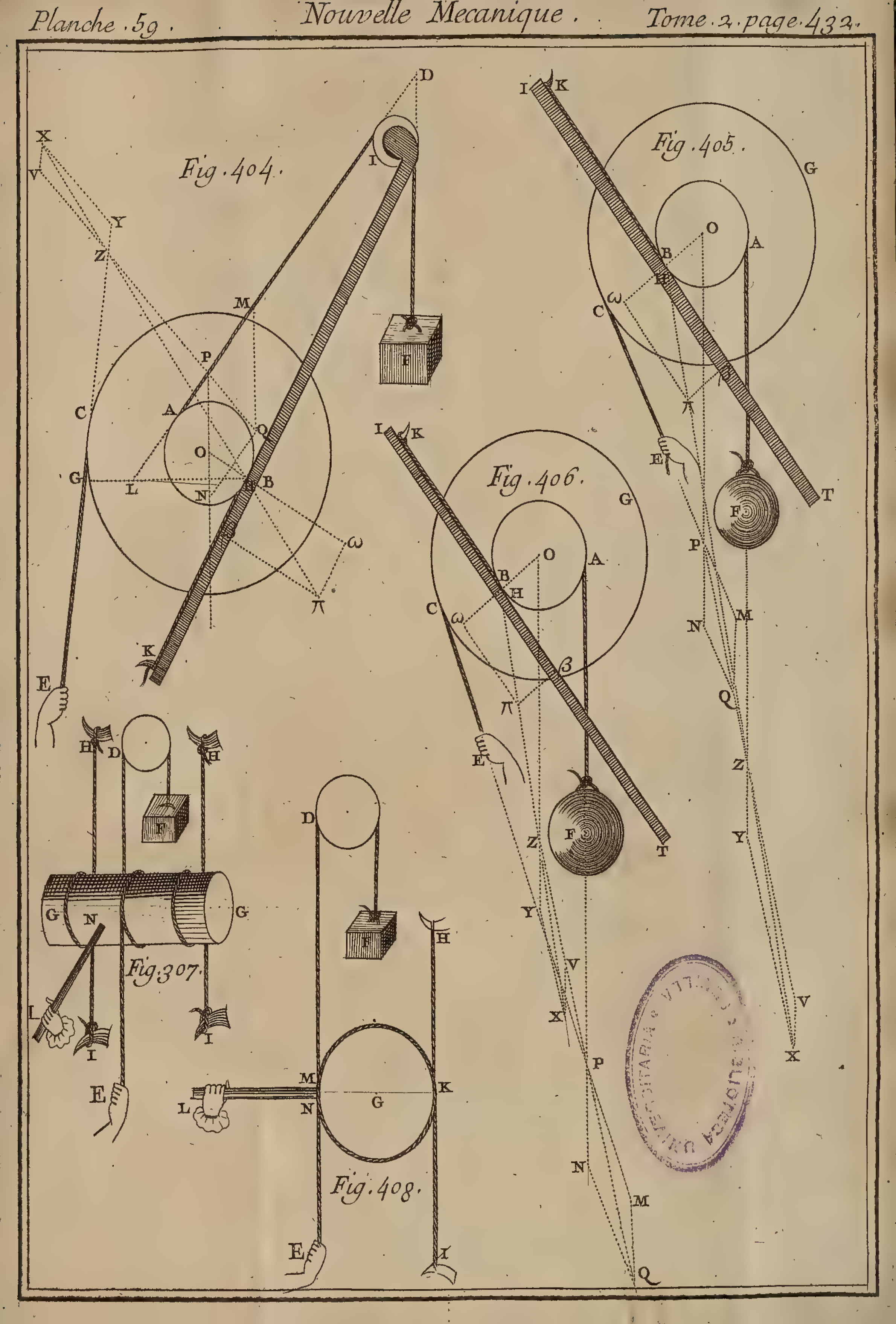
De là il suit, 1°. que dans l'abaissement du levier LN, la puissance E doit être égale à la difference qui est entre le poids F, & la resistance du frottement de sa corde avec le rouleau G. 2°. Que ce qu'il faut de forces en tout dans la puissance E pour un abaissement plus une élevation du levier LN, est plus grand que deux fois ce poids F. 3°. Que

tout ce qu'il faut de forces à cette puiſſance pour l'élevation de ce levier, doit ſurpaſſer ce qu'il lui en faut pour l'abaiſſement de ce même levier, de plus de deux fois la reſiſtance des frottemens de ſa corde avec le rouleau G. 4°. Que dans l'élevation du levier LN la puiſſance L agiſſant contre la puiſſance E, de même que dans l'abaiſſement de ce levier, elle agit contre le poids F : & (toutes choſes d'ailleurs égales) cette puiſſance L employant des forces proportionnelles aux reſiſtances que ce poids & la puiſſance E lui font tour à tour ; ce que cette puiſſance L employe de forces dans l'abaiſſement du levier LN, doit être à ce qu'elle en employe dans l'élevation de ce levier, comme le poids F (je ne compte point le frottement de la poulie D) eſt à ce même poids plus la reſiſtance des frottemens de ſa corde avec le rouleau G.

Il ne reſte plus qu'un mot à dire de la roideur des cables qui ſe doivent entortiller autour des rouleaux dont on ſe ſert ici. M. Perault prétend que *bien loin que la roideur que leur donne le poids qu'ils ſoûtiennent, repugne à leur pliement ; il eſt vrai qu'au contraire plus le cable eſt étendu par la peſanteur du fardeau, & plus il a de diſpoſition à ſe plier. Car*, dit-il, *il faut conſiderer que, comme pour le pliement d'un cable il eſt neceſſaire que les parties qui ſont au côté où il ſe plie, s'acourciſſent, il eſt certain que ce qui diſpoſe ces parties à s'acourcir, diſpoſe le cable à ſe plier. Or il eſt évident que plus les parties ont été allongées, & plus elles demandent à s'acourcir, quand la cauſe qui les allongeoit vient à ceſſer ; & c'eſt ce qui arrive aux parties qui ſont du côté vers lequel le cable ſe plie.* Au contraire, ces parties ne ceſſant point d'être tendues, n'ont nulle liberté de ſe racourcir pour ſe plier. Il eſt vrai que *la traction qui allongeoit les parties qui ſont depuis le fardeau, ou le point de ſuſpenſion juſqu'au rouleau, n'allonge plus celles qui ſont à l'entour de ce rouleau.* Mais auſſi cette traction durant toûjours, elle ne permet point non plus aux parties du cable qui ſont du côté de ſon rouleau, de ſe racourcir lorſqu'elles s'y appliquent : ainſi elles ne ceſſent point pour cela de de-

meurer toûjours également tendues. Ce n'eſt donc point parce que ces parties internes ſe racourciſſent d'elles-mêmes, que ce cable ſe plie autour de ſon rouleau, mais ſeulement parce qu'on l'y force en allongeant encore les parties externes, juſqu'à ce qu'elles puiſſent fournir à la convexité qu'elles doivent avoir pour cela; c'eſt-à-dire, en les allongeant encore de la difference du circuit de la baſe de leur rouleau, aux cercles qu'elles décrivent autour de lui. Il faut donc encore pour entortiller ces cables autour des rouleaux dont on ſe ſert ici, une nouvelle force d'autant plus conſiderable, que ces cables ſont naturellement plus roides, que le poids qu'ils ſoûtiennent les a déja plus tendus, qu'ils ſont d'un plus grand diamétre, & que celui de leur rouleau eſt plus petit. Je n'entre point dans un plus grand examen de cette force, de peur de me trop écarter. Paſſons à l'application de tout ce que je viens de dire.




Fig. 404.
Fig. 405.
Fig. 406.
Fig. 307.
Fig. 408.

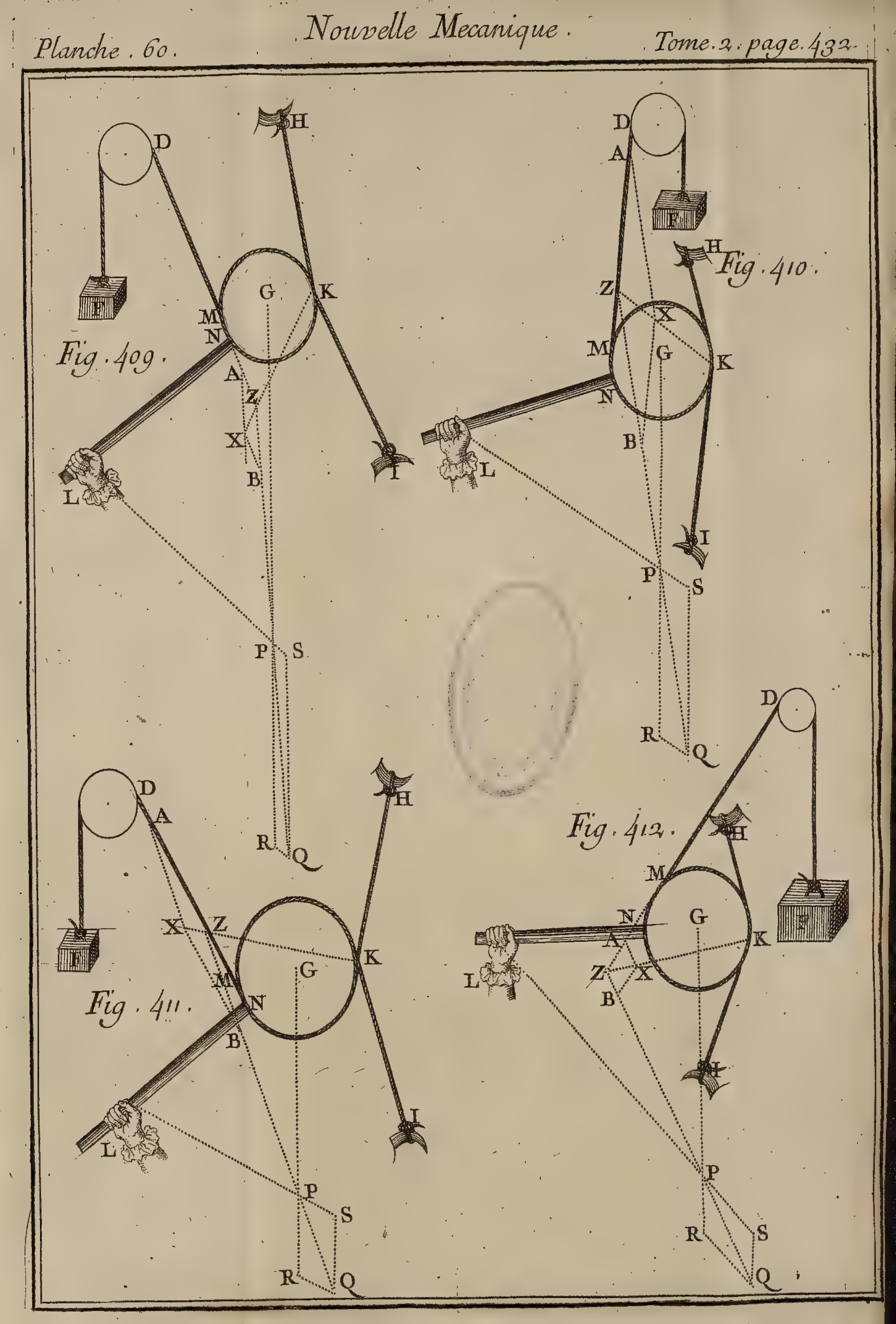


Fig . 409 .
D
H
F
G
K
M
N
A
Z
X
B
I
L
P
S
R
Q
Fig . 410 .
D
A
F
H
Z
X
M
G
K
N
B
L
I
P
S
R
Q
Fig . 411 .
D
A
H
F
X
Z
K
M
G
N
B
I
L
P
S
R
Q
Fig . 412 .
D
H
M
F
N
G
A
K
L
Z
X
B
I
P
R
S
Q

Fig. 413.

Fig. 414.

Les figures 413. et 414. appartiennent ala proposition. 6. page. 426.

Fig. 415.

Fig. 416.

Les figures. 415. et. 416. appartiennent ala proposition. 7. page. 428.



APPLICATION

DES PROPOSITIONS PRECEDENTES aux Machines ſans frottement, dont il eſt ici queſtion.

Comparaiſon de ces Machines avec elles-mêmes priſes à l'ordinaire.

JUſqu'ici je n'ai examiné ces Machines que par parties : en voici preſentement une toute entiere, dont l'examen ſervira de modéle, non ſeulement pour découvrir par les propoſitions précedentes ce qu'il faut de forces en tout ſur ces ſortes de Machines ; mais encore pour en calculer des plus impliquées par la voye de la Nouvelle Mécanique. FIG. 417.

I.

Calcul de la dépenſe des forces qu'il faut employer ſur les Machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion, ſuppoſé que les directions des poids concourent quelque part.

1°. Soit donc, ſi l'on veut, dans la Fig. 417. l'angle OPA fait par les directions OP & AP de la Machine CA & du poids F de 6'. l'angle de la corde AF ou de la direction AP avec l'horiſon de 89. 58'. l'angle de la corde CM avec l'horiſon de 50. deg. l'angle des bras de gruau VT avec l'horiſon de 60. deg. le poids F de 100 livres, la peſanteur de la Machine CA faite de la poulie CF, & de ſon rouleau HA, de 15 livres, le rayon CO de la poulie de 12 pouces ; & le rayon OH de ſon rouleau de 2 pouces.

2°. Preſentement puiſque (*nomb.* 1.) l'angle de la corde CM ou CX avec l'horiſon, eſt de 50. deg. & que celui de la direction AP ou AX avec ce même horiſon eſt de 89. 58'. l'angle CXA doit être de 40. 2'. & CXP ou SXP de 139. 58'. Ainſi puiſque (*nomb.* 1.) l'angle APO

ou XPS eſt de $6'$. l'on aura l'angle XSP ou CSO de 39°. $56'$. Tirant donc le rayon OC par le point C, où la corde CM touche la poulie CA, l'on aura auſſi l'angle COS de $50.\ 4'$. D'où l'on aura ces deux analogies : comme 64189. ſinus de l'angle CSO de $39.\ 56'$. eſt à 76679. ſinus de ſon complement COS de $50.\ 4'$. ainſi CO (*n.* 1.) de 12. pouces eſt à CS. Et comme 64189. ſinus de l'angle CSO de $39.\ 56'$. à 100000. ſinus de l'angle droit OCS, ainſi CO (*Hyp.*) de 12. pouces à OS. Ce qui donnera CS de 14. pouces $\frac{81502}{64189}$, & OS de 18. pouces $\frac{44598}{64189}$.

3°. Après cela ſi l'on tire le rayon OA par le point A, où la corde FA touche le rouleau HA, l'angle OAP étant droit, & l'angle OPA étant (*n.* 1.) de $6'$. l'on aura encore cette analogie : comme 147. ſinus de $6'$. à 100000. ſinus total, ainſi OA (*n.* 1.) de 2. pouces à OP. Ce qui donnera OP de 1149. pouces $\frac{37}{87}$. L'on vient de trouver (*n.* 2.) OS de 18. pouces $\frac{44598}{64189}$; SP ſera donc de 1130. pouces $\frac{2209455}{5584448}$. De-là par cette analogie : comme 64323. ſinus de l'angle SXP, qu'on vient de voir (*n.* 2.) de $139.\ 58'$. à 147. ſinus de l'angle XPS qu'on a ſuppoſé (*n.* 1.) de $6'$. Ainſi SP de 1130. pouces $\frac{3209455}{5584448}$ à SX. Ce qui donnera SX de 2. pouces $\frac{2096875549757}{3592084448704}$.

4°. De plus prenant ſur les directions prolongées de la Machine CA & du poids F des parties PN & PM, qui ſoient entr'elles comme les peſanteurs de cette Machine & de ce poids, c'eſt-à-dire (*n.* 1.) comme 15. à 100. Et achevant le parallelogramme MN, dont la diagonale ſoit PQ qui prolongée vers D, rencontre la corde CM en Z, on aura les deux côtez PN & NQ du triangle PNQ entr'eux comme 15. à 100. avec l'angle PNQ de $179.\ 54'$. Et par conſequent auſſi cette analogie : comme 115. ſomme des côtez PN & NQ à leur difference 85. Ainſi 8727. tangente de $3'$. moitié de la ſomme des angles NPQ & NQP à 6450 $\frac{9}{23}$ tangente de la moitié de leur differen-

ce. Ce qui donnera $2'$. $11''$. $21'''$. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ajoûtée à $3'$. moitié de la somme de ces angles, donnera $5'$. $11''$. $21'''$. pour le plus grand NPQ ou SPZ, & $48''$. $39'''$. pour l'autre NQP ou XPZ. Ainsi puisque l'on sçait déja (*n.* 2.) que l'angle SXP ou ZXP est de 139. $58'$. & que l'angle XSP ou ZSP est de 39. $56'$. on aura encore XZP de 40. $1'$. $11''$. $21'''$. & SZP de 139. $58'$. $48''$. $39'''$.

5°. Presentement à cause que ZX est à ZP comme 2358. sinus de XPZ de (*n.* 4.) $48''$. $39'''$. est à 6432332. sinus de ZXP de (*n.* 2) 139. $58'$. Et que de plus ZP est à ZS comme 6418958. sinus de ZSP de (*n.* 2.) 39. $56'$. est à 15094. sinus de SPZ de $5'$. $11''$. $21'''$. l'on aura ZX à ZS, comme le produit de 2358. & 6418958. sinus des angles XPZ & ZSP, au produit de 6432332. & 15094. sinus des angles ZXP & SPZ. Ainsi divisant SX, qu'on vient de trouver (*n.* 3.) de deux pouces $\frac{20968754975 7}{359208448704}$, en une telle raison ; l'on aura ZS de 2. pouces $\frac{4167212813951985193786}{9180057013086658046272}$, c'est-à-dire, d'environ 2. pouces $\frac{4}{9}$. Ajoûtant donc 2. pouces $\frac{4}{9}$ à la valeur de CS, qu'on vient de trouver (*n.* 2.) de 14. pouces $\frac{21502}{64189}$, c'est-à-dire, encore d'environ 14. pouces $\frac{1}{3}$; l'on aura environ 16. pouces $\frac{7}{9}$ pour la valeur de CZ.

6°. D'ailleurs puisque (*n.* 1.) l'angle de la corde CM avec l'horison est de 50. deg. & que celui des bras de gruau VT avec le même horison est de 60. deg. l'angle CMH, ou son égal HOC (je suppose HO perpendiculaire à VT) sera de 10. deg. & dans le triangle OHC la somme des angles sur la base HC, sera de 170. degrez. Ainsi ayant (*n.* 1.) HO de 2. & OC de 12. pouces, l'on aura cette analogie : comme 14. somme des côtez HO & OC, sont à la difference 10. de ces mêmes côtez, ainsi 1143005. tangente de 85. deg. moitié de la somme des angles OCH & OHC, est à $816432\frac{1}{7}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 83. $1'$. $1''$. $4'''$.

pour cette moitié de difference, laquelle moitié soustraite de 85. moitié de la somme de ces angles, laissera 1. 58. 58″. 56‴. pour la valeur du plus petit HCO; lequel ajoûté à l'angle droit OCZ, donnera 91. 58′. 58″. 56‴. pour la valeur de l'angle HCZ; cette analogie: comme 3459. sinus de l'angle HCO de 1. 58.′ 58″. 56‴. au côté HO de 2. pouces, ainsi 17364. sinus de l'angle HOC de 10. deg. au côté HC, donnera HC de 10. pouces $\frac{128}{3459}$.

7°. Ainsi puisque l'on a déja (*n.* 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ pour la valeur de CZ, & que l'angle HCZ de (*n.* 6.) 91. 58′. 58″. 56‴. laisse 88. 1′. 1″. 4‴. pour la somme des angles CHZ & CZH, l'on aura encore cette analogie: comme 26. pouces $\frac{25455}{31131}$. somme des côtez CH de (*n.* 6.) 10. pouces $\frac{128}{3459}$. & CZ de (*n.* 5.) 16. pouces $\frac{7}{9}$ est à 6 $\frac{22971}{31131}$ leur difference; ainsi 96597. tangente de 44. 0′. 30″. 34‴. moitié de la somme des angles CHZ & CZH, à 24233 $\frac{3}{4}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 13. 37′. 40″. 29‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié soustraite de 44. 0′. 30″. 34‴. moitié de la somme de ces angles, laissera 30. 22′. 50″. 5‴. pour la valeur du plus petit CZH: d'où l'on aura encore HZD de 9. 38′. 21″. 16‴. puisque l'on vient de voir (*n.* 4.) CZD ou XZP de 40. 1′. 11″. 21‴.

8°. L'on aura donc par ce moyen les quatre angles DZH de (*n.* 7.) 9. 38′. 21″. 16‴. CZH de (*n.* 7.) 30. 22′. 50″. 5‴. OPA de 6′. & OPD ou SPZ de (*n.* 4.) 5′. 11″. 21‴. avec leurs sinus 16744. 50574. 174. & 150. Ainsi puisque (*prop.* 1. *n.* 4.) le poids F est à la puissance, qui appliquée, si l'on veut, en R, le soûtiendroit avec la corde CR ou CM, comme le produit des sinus des angles CZH & OPD, au produit des sinus des angles DZH & OPA, c'est-à-dire ici, comme 7586100.

à 2913456. le poids F étant (*n.* 1.) de 100 livres, cette puiſſance en R ſeroit de 38 livres $\frac{30798}{75861}$.

9°. Soit encore au pied de la grue le rouleau G d'une direction BY perpendiculaire à l'horiſon, & entortillé, comme aux propoſitions 5.6.&7. dans la corde IKMNKH, dont les extrêmitez HK & IK faſſent avec l'horiſon des angles de 62. & de 58. deg. Que le levier LN de ce rouleau ſoit, ſi l'on veut, incliné à l'horiſon de 8. deg. & que la puiſſance L lui ſoit appliquée ſuivant une ligne Lβ, qui faſſe avec le levier LN un angle de 82. deg. Enfin que le rouleau G (j'y comprends auſſi ſon levier) ſoit de 5 livres, le diamétre de ce rouleau de 4 pouces, & le levier LN de 10 pouces.

10°. Cela étant, l'on aura l'angle GBM de 40. degrez; puiſque (*n.* 1.) BM eſt incliné de 50. deg. à l'horiſon, auquel on ſuppoſe (*n.* 9.) que GB eſt perpendiculaire. Tirant donc le rayon GM par le point M où la corde BM touche le rouleau G, l'angle GMB étant droit, l'on aura cette analogie : comme 64278. ſinus de l'angle GBM de 40. deg. au rayon GM (*n.* 9.) de 2. pouces, ainſi 100000. ſinus de l'angle droit GMB eſt à GB. Ce qui donnera 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. pour la valeur de GB.

11°. De plus puiſque (*n.* 9.) les parties de corde HK & IK font avec l'horiſon des angles de 62. & de 58. deg. l'angle HKI qu'elles font entr'elles, ſera de 176. deg. Ainſi tirant GK du centre G au point K, où ces cordes prolongées concourent, l'on aura les angles GKI & GKH de chacun 88. deg. Tirant donc encore le rayon Gϖ par le point ϖ, où la corde IK touche le rouleau G, l'angle Gϖ K étant droit, on aura cette analogie : comme 99939. ſinus de l'angle GKϖ de 88. deg. au rayon Gϖ (*n.* 9.) de 2. pouces, ainſi 100000. ſinus de l'angle droit GϖK au côté GK. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{61}{49966}$. pour la valeur de GK.

12°. D'ailleurs (*n.* 9.) l'angle de la corde IK avec l'ho-

riſon étant de 58. deg. & BY étant perpendiculaire à l'horiſon, l'angle KYG ſera de 32. deg. l'on vient de voir (*n.* 11.) que l'angle GKY eſt de 88. deg. Il faut donc que l'angle KGB, qui eſt égal à ces deux pris enſemble, ſoit de 120. deg. Ce qui donnera 60. deg. pour la ſomme des angles GKB & GBK: ainſi puiſque l'on connoît déja les côtez GB (*n.* 10.) de 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. & GK (*n.* 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. qui leur ſont oppoſez dans le triangle KGB, l'on aura cette analogie: comme 5 pouces $\frac{180988657}{1605857274}$. ſomme des côtez GB & GK, à leur difference 1. pouce $\frac{177067690}{1605857274}$. c'eſt-à-dire, ſans beaucoup s'éloigner de la préciſion, comme 5 $\frac{1}{16}$. à 1 $\frac{1}{16}$. ainſi 57735. tangente de 30. deg. moitié de la ſomme des angles GKB & GBK à 12364 $\frac{11}{81}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera environ 7. 3'. pour cette moitié de difference, laquelle moitié ôtée de 30. deg. laiſſera 22. 57'. pour la valeur du plus petit angle GBK.

13°. De-là par cette analogie: comme 38992. ſinus de l'angle GBK (*n.* 12.) de 22. 57'. au côté GK (*n.* 11.) de 2. pouces $\frac{61}{49966}$. ainſi 86602. ſinus de l'angle KGB (*n.* 12.) de 120. degrez à KB; l'on aura 3. pouces $\frac{451110240}{487096033}$. c'eſt-à-dire, quaſi 4. pouces pour la valeur de KB.

14°. Après avoir ainſi trouvé la valeur de KB & de l'angle GBK, ſoient priſes ſur la corde CM, & ſur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui ſoient entr'elles comme la puiſſance de 38 liv. $\frac{30798}{75861}$. qu'on vient de voir (*n.* 8.) neceſſaire pour retenir ici le poids F avec la ſeule corde CR, eſt au poids du rouleau G, qu'on ſuppoſe (*n.* 9.) de 5. livres; & ache-

vant le parallelogramme RG, soit la diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puissance L. Cela fait, puisque (*n.* 10.) l'angle GBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. Ainsi, puisque les paralleles BG & RY rendent les deux angles RYB & RBY pris ensemble égaux à l'angle GBR, leur somme sera aussi de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY, comme 38 $\frac{30798}{75861}$. & 5. avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & RBY, qui leur sont opposez; & par consequent l'on aura aussi cette analogie: comme 43 $\frac{30798}{75861}$. somme des côtez RB & RY à leur difference 33 $\frac{30798}{75861}$. Ainsi 274747. tangente de 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY à 208829 $\frac{2446008}{3332821}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 24'. 43''. 44'''. pour cette moitié de difference; laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 24'. 43''. 44'''. pour la valeur du plus grand RYB ou de son égal YBG. D'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 35'. 16''. 16'''. lequel ajoûté à l'angle GBK, qu'on vient de trouver (*n.* 12.) de 22. 57'. donnera 68. 32'. 16''. 16'''. pour la valeur de tout l'angle KBβ.

15°. L'on voit (*n.* 14.) que l'angle GBω est de 45. 35'. 16''. 16'''. L'on voit aussi que l'angle BGω doit être de 82. deg. puisque (*n.* 9.) BG est perpendiculaire à l'horison, & que le levier LN n'est incliné à l'horison que de 8. deg. L'on aura donc encore l'angle BωG de 52. 24'. 43''. 44'''. Ainsi puisque l'on a déja (*n.* 10.) le côté GB de 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. l'on aura aussi ces deux analogies tout à la fois: comme 79241. sinus de l'angle BωG de 52. 24'. 43''. 44'''. au côté GB de (*nomb.* 10.) 3. pouces $\frac{3583}{32199}$. Ainsi 71432. sinus de l'angle GBω de 45. 35'. 16''. 16'''. au côté Gω; ainsi encore 99026. sinus

de l'angle BGω de 82. deg. au côté Bω. Ce qui donnera 2. pouces $\frac{2053095842}{2551480959}$. pour la valeur de Gω, & 3. pouces $\frac{2267981803}{2551480959}$. pour celle de Bω; c'est-à-dire, sans beaucoup s'éloigner de la précision, 3. pouces pour la valeur de Gω, & 4. pouces pour celle de Bω.

16°. De ce que Gω est de 3. pouces, puisque GL (*n.*9.) est de 12. pouces, ωL sera de 9. pouces; & de ce que l'angle BωG ou βωL est (*n.* 15.) de 52. 35′. 16″. 16‴. l'angle βLω étant (*n.* 9.) de 82. deg. l'angle Lβω sera de 45. 35′. 16″. 16‴. Ayant donc le côté ωL de 9. pouces, l'on aura encore cette analogie : comme 71432. sinus de l'angle Lβω de 45. 35′. 16″. 16‴. au côté ωL de 9. pouces : ainsi 99026. sinus de l'angle βLω de 82. deg. au côté ωβ. Ce qui donnera ωβ de 12 pouces $\frac{34050}{71432}$. c'est-à-dire, encore d'environ 12. pouces $\frac{1}{2}$. qui avec 4. pouces valeur (*n.* 15.) de Bω, feront 16. pouces $\frac{1}{2}$. pour celle de toute la ligne Bβ.

17°. De-là, puisque l'on a d'ailleurs le côté KB (*n.*15.) de 4. pouces avec l'angle KBβ de 68. 32′. 16″. 16‴. c'est-à-dire, 111. 27′. 43″. 44‴. pour la somme des angles BKβ & BβK, qui sont sur la base Kβ du triangle KBβ; l'on aura encore cette analogie : comme 20 $\frac{1}{2}$. somme des côtez Bβ & KB, à 12 $\frac{1}{2}$. leur difference, ainsi 146764. tangente de 55. 43′. 51″. 52‴. moitié de la somme des angles BKβ & BβK, à 89490 $\frac{10}{41}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 41. 49′. 31″. 58‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié soustraite de 55. 43′. 51″. 52‴. moitié de la somme des angles BKβ & BβK, laissera 13. 54′. 19″. 54‴. pour la valeur du plus petit BβK, lequel joint a l'angle Lβω (*n.*16.) de 45. 35′. 16″. 16‴. donnera 59. 29′. 36″. 10‴. pour la valeur de tout l'angle KβL.

18°. L'on aura donc encore par ce moyen les quatre angles

angles Kβ B (*n.* 17.) de 13. 54′. 19″. 54‴. KβL (*n.* 17.) de 59. 29′. 36″. 10‴. GBM (*n.* 10.) de 40. deg. & GBβ (*n.* 14.) de 45. 35′. 16″. 16‴. avec leurs ſinus 24031 $\frac{1113}{1800}$, 86156 $\frac{69}{180}$, 64278, & 71431 $\frac{52}{75}$. Ainſi puiſque l'impreſſion que le poids F fait ſuivant la corde CM contre la puiſſance L, eſt égale à la puiſſance qu'il faudroit en R pour le ſoûtenir avec cette corde ſeule, & que d'ailleurs en cas d'équilibre (*prop.* 6. *n.* 2.) cette impreſſion eſt à la puiſſance L, (je ſuppoſe que la puiſſance E ne ſert alors qu'à empêcher que la corde CMNϖME ne gliſſe ſur le rouleau G) comme le produit des ſinus des angles KβL & GBβ au produit des ſinus des angles KβB & GBM; la puiſſance qu'il faudroit en R pour ſoûtenir le poids F avec la ſeule corde CM eſt auſſi à la puiſſance L, comme le produit des ſinus des angles KβL & GBβ au produit des ſinus des angles KβB & GBM, c'eſt-à-dire ici, comme 747, 520, 045, 047, 657. à 187, 680, 905, 132, 445. Cette puiſſance R étant donc ici (*n.* 8.) de 38 liv. $\frac{30798}{75861}$; la puiſſance L ſera dans ce cas de 9 liv. $\frac{30662560245348816417}{50707618137360307677}$. c'eſt-à-dire, d'un peu plus que de 9 liv. $\frac{1}{2}$.

II.

1°. Telle eſt la maniere de calculer la valeur de la puiſſance L pour tous les cas où les directions OP & AP de la machine CA & du poids F feroient quelque angle entre-elles. Voici preſentement pour le cas où ces directions ſeroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horiſon, comme on le ſuppoſe ordinairement.

Calcul de la dépenſe des forces qu'il faut employer ſur les Machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion, ſuppoſé que les lignes de directions des poids ſoient paralleles entr'elles.

2°. Soient donc Hρ & Hλ paralleles aux lignes CO & OA. De-là, & de ce que CO eſt perpendiculaire en C à Mρ, & que l'angle HCO eſt (*n.* 6. *art.* 1.) de 1. 58′. 58″. 56‴. il ſuit que l'angle HρC eſt droit, & que l'angle HCρ eſt de 88. 1′. 1″. 4‴. Ce qui fait que par l'analogie des ſinus de ces angles avec les côtez qui leur ſont

opposez dans le triangle $HC\rho$, son côté HC de (*n.* 6. *a.* 1.) 10. pouces $\frac{138}{3459}$. donne $H\rho$ de 10. pouces $\frac{792770}{17284623}$. c'est-à-dire, d'environ 10. pouces $\frac{1}{24}$.

3°. D'ailleurs puisque le bras de gruau VT fait (*n.* 1. *a.* 1.) avec l'horison auquel OS est perpendiculaire, un angle de 60. deg. HO étant perpendiculaire à ce bras de gruau, l'angle $HO\mu$ sera de 60. deg. & l'angle $H\mu O$ sera droit. Ce qui, selon HO de (*n.* 1. *a.* 1.) 2. pouces, donnera $H\mu$ de 1 pouce $\frac{73204}{100000}$.

4°. De plus puisque les directions AX & OS du poids F & de la machine CA passent ici pour paralleles, DZ celle de leur impression commune sera non seulement aussi parallele à ces lignes, mais encore elle divisera en D le rayon OA, en sorte que OD soit à DA, comme le poids F à la pesanteur de la machine CA, c'est-à-dire (*n.* 1. *a.* 1.) comme 100. à 15. Ce qui, selon OA de (*n.* 1. *art.* 1.) 2. pouces, sera OD, & par consequent aussi son égale $\mu\nu$ de 1. pouce $\frac{17}{23}$.

5°. Ajoûtant donc $H\mu$ de (*n.* 3.) 1. pouce $\frac{73204}{100000}$. avec $\mu\nu$ de (*nomb.* 4.) 1. pouce $\frac{17}{23}$. l'on aura $H\nu$ de 3. pouces $\frac{1082692}{2300000}$. c'est-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{1}{2}$. Et parce que $H\rho$ de (*n.* 2.) 10. pouces $\frac{1}{24}$. & $H\nu$ de 3. pouces $\frac{1}{2}$ sont les sinus des angles CZH & DZH; & que OD & DA de (*n.* 4.) 1. pouce $\frac{17}{23}$. & 2. pouces, sont aussi les sinus des angles OPD & OPA, que le parallelisme supposé des lignes OS, DZ, & AX, qu'on suppose ici, rend infiniment aigus: le produit des sinus des angles CZH & OPD sera au produit des sinus des angles DZH & OPA, comme $17\frac{32}{69}$ à 7. Ainsi puisque le poids F est (*prop.* 1. *n.* 4.) à la puissance qui appliquée suivant CM, le soûtiendroit

avec cette corde seule, comme le premier de ces produits au second ; ce poids étant (*n.* 1. *a.* 1.) de 100 livres, cette puissance sera de 40 liv. $\frac{20}{241}$.

6°. La valeur de cette puissance reviendra encore la même en prenant à l'ordinaire pHν pour un levier dont l'appui est en H, & qui a un poids de 115 livres perpendiculairement appliqué à son extrêmité ν par où la direction DZ de l'impression commune à la pesanteur de la machine CA de 15 livres, & au poids F de 100 livres, passe d'une force, qui dans ce cas des directions OS & AX supposées paralleles est égale à la somme de ces pesanteurs ; car ce poids de 115 livres étant à cette puissance comme Hp de (*n.* 2.) 10. pouces $\frac{1}{24}$. à Hν de (*n.* 5.) 3. pouces $\frac{1}{2}$. l'on aura encore 40. liv. $\frac{20}{241}$. pour la valeur de cette puissance.

7°. Presentement pour avoir la valeur de la puissance L dans le cas present, soient prises sur la corde CM, & sur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B, où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG qui soient entr'elles comme la puissance de 40. livres $\frac{20}{241}$. qu'on vient de voir (*n.* 5. *&* 6.) necessaire pour retenir le poids F avec la seule corde CR, est au poids du rouleau G, qu'on suppose (*n.* 9. *a.* 1.) de 5. livres ; & achevant le parallelogramme RG, soit sa diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puissance L. Cela fait, puisque (*n.* 10. *a.* 1.) l'angle GBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY, comme 40. livres $\frac{20}{241}$. & 5. avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & RBY, qui leur sont opposez ; & par consequent l'on aura aussi cette analogie : comme 45 $\frac{20}{241}$. somme des côtez RB & RY à leur difference 35 $\frac{20}{241}$. Ainsi 274747. tangente de 70. deg. moi-

tié de la somme des angles RYB & RBY à 214001 $\frac{1006}{2171}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 57′. 14″. 13‴. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 57′. 14″. 13‴. pour la valeur du plus grand RYB, ou de son égal YBG. D'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 2′. 45″. 47‴. lequel ajoûté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (*n.* 12. *a.* 1.) de 22. 57′. donnera 67. 59′. 45″. 47‴. pour la valeur de l'angle KBβ.

8°. Cet angle étant presque le même que dans le nombre 14. de l'article 1. où on l'a vû de 68. 32′. 16″. 16‴. & toutes choses d'ailleurs étant égales, le produit des sinus des angles Kβλ & GBβ sera encore ici au produit des sinus des angles KβB & GBM environ comme (*n.* 18. *a.* 1.) 7475200450476 57. à 18768090513 2445. Ainsi puisque l'impression de 40. livres $\frac{20}{241}$. que fait ici (*n.* 5. & 6.) le poids F joint à la pesanteur de la machine CA, suivant la corde CM contre la puissance L, est en cas d'équilibre à cette puissance L (*prop.* 6. *n.* 2.) comme le premier de ces produits au second; cette puissance L sera ici d'environ 10. livres $\frac{11474235014572560}{18015233085648 4614}$. c'est-à-dire, d'un peu plus de 10. livres.

III.

Comparaison des machines sans frottemens, dont il est ici question avec elles-mêmes prises à l'ordinaire.

1°. Voyons presentement ce qu'il faudroit de forces en L suivant Lβ dans l'usage ordinaire où la machine CA & le rouleau G ne tournent que sur leurs centres fixes O & G. En ce cas il est clair que la puissance qu'il faudroit, par exemple, en R pour soûtenir le poids F, seroit à ce poids, (je n'y compte point les frottemens) comme le rayon AO du rouleau HA au rayon CO de la poulie CF; c'est-à-dire ici (*n.* 1. *a.* 1.) comme 2. à 12. Ainsi ce poids étant (*n.* 1. *a.* 1.) de 100. livres, cette puissance

ne feroit jamais que de 16 livres $\frac{2}{3}$; au lieu qu'en évitant les frottemens, elle feroit ici de 38. liv. $\frac{30798}{75861}$. (*n.* 8. *a.* 1.) dans le cas où les directions OP & AP feroient entr'elles un angle OPA de 6'. & de 40. livres $\frac{20}{241}$. & (*n.* 5. *&* 6. *art.* 2.) de 40. livres $\frac{20}{241}$. dans celui où ces directions feroient paralleles entr'elles, & toutes deux perpendiculaires à l'horifon. C'eft déja dans le premier cas près de 22. livres, & dans le fecond près de 23. livres $\frac{1}{2}$. qu'il en coûte pour les frottemens qu'on y fauve, comme fi ces frottemens pouvoient faire près d'une fois & demi autant de réfiftance que le poids F, qu'on voit n'en faire alors pour fa part que 16 $\frac{2}{3}$. à la puiffance qui lui feroit appliquée fuivant CR.

2°. De plus puifque le poids F ainfi appliquée à la machine CA mobile feulement autour de fon centre fixe, ne tire la corde CM (*n.* 1.) que d'une force de 16 $\frac{2}{3}$. la puiffance L, qui appliquée au levier LN foûtiendroit ce poids à l'aide du rouleau G, mobile feulement auffi autour de fon centre G, devroit être à cette réfiftance de 16 livres $\frac{2}{3}$. (je n'y comprends point encore les frottemens) comme le rayon de ce rouleau à la perpendiculaire tirée de fon centre G fur la direction Lβ de cette puiffance; c'eft-à-dire, puifque (*n.* 9. *a.* 1.) ce rayon eft de 2. pouces, ce levier de 10. & l'angle NLβ de 82. deg. comme 2. à 11 $\frac{11039}{12500}$. Ce qui donneroit alors 2. livres $\frac{358766}{445617}$. pour la valeur de la puiffance L. 2. livres $\frac{358766}{445617}$. de réfiftance eft donc toute la part que le poids F peut avoir à ce que la puiffance L en fentiroit dans l'ufage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G; & le furplus doit être compté pour les frottemens que cette poulie & ce rouleau fouffriroient dans ce dernier ufage. L'on vient

de voir (*n.* 18. *a.* 1. *&* *n.* 8. *a.* 2.) qu'en les ſauvant à la maniere de M. Perault, ce que cette puiſſance L y trouve de réſiſtance dans les circonſtances preſentes, eſt d'environ 9 livres $\frac{1}{2}$, ou 10 livres, c'eſt-à-dire, plus de triple de ce que le poids F lui en feroit pour ſa part dans l'uſage ordinaire de la poulie CA & du rouleau G; il faudroit donc pour y gagner quelque choſe, & même il faudroit, pour n'y rien perdre, que dans ce dernier uſage la réſiſtance des frottemens fût plus que double de celle du poids F. Ce que l'on aura ſans doute bien de la peine à ſe perſuader.

3°. Mais l'inconvenient en paroîtra encore plus grand, ſi l'on fait réfléxion que lorſqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir repriſe, il faut encore plus de forces dans la puiſſance L qu'il ne lui en a fallu pour l'abaiſſer. La démonſtration s'en tire de ce que par l'article 4. de la pénultiéme réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. Ce que la puiſſance L employe de forces dans l'abaiſſement du levier LN doit être à ce qu'elle en employe dans l'élevation de ce levier, comme la réſiſtance que lui fait le poids F pour ſa part ſuivant la corde CM, eſt à cette même réſiſtance plus celle des frottemens de cette même corde avec le rouleau G. Et qui pis eſt encore, ces frottemens ſont d'autant plus conſiderables, ſelon M. Perault lui-même, qu'il ne demande que très-peu de forces à la puiſſance E pour empêcher ſa corde de gliſſer ſur le rouleau G; c'eſt-à-dire, ſuivant l'article 1. de la réfléxion que je viens de citer, que très-peu de difference de la réſiſtance de ces frottemens à celle que le poids F fait ſuivant CM.

4°. Je ne parle point ici de la force qu'on voit par l'art. 1. de la ſeconde réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. qu'il faudroit à la puiſſance E, lorſqu'il s'agit de relever le levier LN pour avoir repriſe; parce que M. Perault l'a ingenieuſement ſuppléé par une machine qu'il appelle *Main*, au travers de laquelle paſſe la

corde que l'on voit ici tenir à la puiſſance E, & qui la retient ſans qu'il en coûte aucunes forces. Je ne dis rien non plus de ce qu'il faudroit de forces à cette même puiſſance E pour dans l'abaiſſement du levier LN, empêcher ſa corde de gliſſer ſur le rouleau G; parce qu'on la peut encore ſuppléer par un poids ſuſpendu à l'extrêmité de ſa corde, & égal à ce qu'elle doit avoir de forces; c'eſt-à-dire, par l'article 1. de la pénultiéme réfléxion qui ſuit la démonſtration de la propoſition 7. égal à la difference qui eſt entre la réſiſtance que le poids F fait ſuivant la corde CM, & celle du frottement de cette corde avec le rouleau G. Je paſſe auſſi la peſanteur du rouleau G, qui au lieu d'aider comme en abaiſſant le levier LN, nuit lorſqu'il le faut relever. Je paſſe même ce que la roideur des cables qui ſe doivent entortiller autour des rouleaux dont on ſe ſert ici, demande encore de forces, de peur de m'engager dans une diſcuſſion qui me menât trop loin.

IV.

De quel ſecours il ſeroit de ſauver par un contre-poids la peſanteur de la roue & du rouleau qui doivent monter avec le poids dans les machines ſans frotement dont il eſt ici queſtion.

1°. Ce que l'on peut oppoſer à ces inconveniens, c'eſt que la peſanteur de la roue CF & de ſon rouleau HA, qu'on compte ici, ſe peut ſauver comme M. Perault l'a fait à la Machine ſans frottement qu'il a inſerée dans l'art. 4. de ſes Notes ſur le chap. 5. liv. 10. de ſa Traduction de Vitruve. Mais ce remede, ſans même entrer dans les inconveniens qui lui ſont encore particuliers, n'eſt que d'un très-petit ſecours. L'on en jugera par ce qui ſuit.

2°. L'on a vû (*n.* 3. *a.* 2. que Hμ eſt d'un pouce $\frac{73204}{100000}$. & parce que (*Hyp.*) Oλ eſt un parallelogramme, & que (*n.* 1. *a.* 1.) OA eſt de 2. pouces; $\mu\lambda$ eſt auſſi de 2. pouces. Ainſi Hλ eſt de 3. pouces $\frac{73204}{100000}$. c'eſt-à-dire, d'environ 3. pouces $\frac{7}{10}$. Puiſque donc Hρ eſt (*n.* 2. *a.* 2.) de 10. pouces $\frac{1}{24}$. & que le poids F eſt à la puiſſance qu'il faudroit ſur la corde CM pour demeurer contre lui ſeul en équilibre ſur le point H, comme Hρ à Hλ, cette puiſſan-

ce seroit encore, sans compter la pesanteur de la machine CA, de 34. livres $\frac{286}{341}$.

3°. Présentement pour avoir la valeur de la puissance L dans le cas présent, soient prises sur la corde CM, & sur la ligne de direction BY du rouleau G, depuis le point B où cette corde & cette ligne concourent, des parties BR & BG, qui soient entr'elles comme la puissance de 34 livres $\frac{286}{341}$. qu'on vient de voir (*n.* 2.) necessaire pour soûtenir ici le poids F avec la seule corde CR, est au poids du rouleau G, qu'on suppose (*n.* 9. *a.* 1.) de 5. livres; & achevant le parallelogramme RG, soit sa diagonale YB, qui prolongée rencontre en β la direction Lβ de la puissance L. Cela fait, puisque (*n.* 10. *a.* 1.) l'angle CBM est de 40. deg. l'angle GBR sera de 140. deg. L'on aura donc dans le triangle BRY les deux côtez RB & RY comme 34 livres $\frac{286}{341}$. & 5. avec 140. deg. pour la somme des angles RYB & RBY, qui leur sont opposez; & par consequent l'on aura aussi cette analogie: comme 39. livres $\frac{286}{341}$. somme des côtez RB & RY à leur difference 29 $\frac{286}{341}$. ainsi 274747. tangente de 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY à 205266 $\frac{2555}{2717}$. tangente de la moitié de leur difference. Ce qui donnera 64. 1'. 33''. 55'''. pour cette moitié de difference, laquelle moitié étant ajoûtée à 70. deg. moitié de la somme des angles RYB & RBY, donnera 134. 1'. 33''. 55'''. pour la valeur du plus grand RYB, ou de son égal YGB: d'où l'on aura l'angle GBβ de 45. 58'. 26''. 5'''. lequel ajoûté à l'angle GBK, que l'on a trouvé (*n.* 12. *a.* 1.) de 22. 57'. donnera 68. 55'. 26''. 5'''. pour la valeur de l'angle KBβ.

4°. Cet angle étant presque le même que dans le nombre 14. de l'article 1, où on l'a trouvé de 68. 32'. 16''. 16'''. & toutes choses d'ailleurs étant égales, le produit des



Fig. 417.

des ſinus des angles Kβλ & GBβ, ſera encore ici au produit des ſinus des angles KβB & GBM environ comme (*nomb.* 18. *art.* 1.) 74752004504765 7 à 18768090513244 5. Ainſi puiſque l'impreſſion de 34 livres $\frac{286}{341}$ que fait ici (*nomb.* 2.) le ſeul poids F ſuivant la corde CM contre la puiſſance L, eſt en cas d'équilibre à cette puiſſance L (*prop.* 6. *n.* 2.) comme le premier de ces produits au ſecond ; cette puiſſance ſera encore ici d'environ 8 livres $\frac{19041447007343 8304}{25490433536125 1037}$; ou, ce qui revient preſqu'au même, d'environ 8 livres $\frac{3}{4}$. quoique l'on n'y compte point la peſanteur de la rouë CF & de ſon rouleau BA.

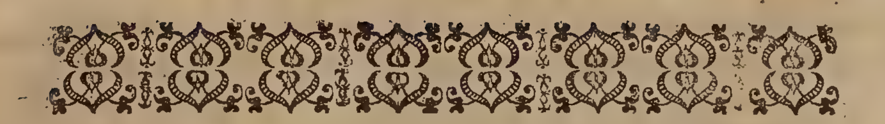
5. Le poids F fera donc encore ici contre la puiſſance L près du triple de ce qu'il lui feroit de reſiſtance pour ſa part dans l'uſage ordinaire, où l'on a vû (*n.* 3. *art.* 3.) que la machine CA & le rouleau G tournant ſur leurs centres fixes, la reſiſtance de ce poids contre cette puiſſance ne feroit que de 2 livres $\frac{358766}{445617}$. Il faudroit donc encore, même pour ne rien perdre à ſauver les frottemens, comme fait M. Perault, que dans l'uſage ordinaire de ces Machines, la reſiſtance de leurs frottemens fût près de double de celle du poids F. Ce qui eſt encore très-difficile à croire. Ajoûtez à ceci les nombres 5. & 6. de l'art. 3.

6. Tels ſont les inconveniens auſquels la premiere Machine ſans frottement, que M. Perault a inſerée dans l'art. 4. de ſes Notes ſur le ch. 5. liv. 10. de ſa Traduction de Vitruve, eſt encore ſujette. L'application en eſt aiſée à faire. M. Perault a encore crû rendre cette Machine d'un uſage plus facile qu'elle n'eſt ici, en faiſant monter à plomb la rouë CF avec ſon rouleau BA ; mais l'on a vû que c'eſt tout le contraire dès le commencement de cet Ecrit.

EXAMEN
DE L'OPINION
DE M. BORELLI,

Sur les proprietez des Poids suspendus par des cordes.





AVERTISSEMENT.

C'EST ici l'Examen promis dans la réflexion qui ſuit la preuve de la premiere propoſition du Projet de la Nouvelle Mécanique. On a été naturellement conduit par les principes qu'on y ſuit, à une propoſition ſur les proprietez des poids ſuſpendus par des cordes, qui s'eſt trouvée la même que celle que Monſieur Borelli avoit critiquée dans Stévin & dans Hérigone; & ç'a été par la neceſſité de la juſtifier, qu'on s'eſt trouvé engagé à l'examen de ſa critique.

On diviſe cet examen en deux Chapitres: Dans le premier on fait voir que le ſentiment que M. Borelli reprend dans Hérigone, dans Stévin & dans les autres, bien loin d'être contraire, comme il l'a crû, à la ſoixante-huitiéme Propoſition du Tome premier de ſon Traité du Mouvement des Animaux, en eſt une ſuite ſi neceſſaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il y ſeroit infailliblement entré. On indique enſuite dans ce même Chapitre quelques paralogiſmes que cet Auteur a commis, lors même qu'il croyoit en voir dans les raiſonnemens qu'il a critiquez.

Dans le ſecond Chapitre, après avoir encore donné quelques démonſtrations du ſentiment d'Hérigone & des autres, toutes differentes de celles que M. Borelli a critiquées, on rend par la méthode de la Nouvelle Mécanique les Lemmes ſur leſquels cet Auteur a fondé tout

ce qu'il a dit de la force des Muſcles, beaucoup plus generaux qu'ils ne le peuvent être par la ſienne.

Au reſte ſi l'on attaque une erreur où M. Borelli eſt tombé, on n'en eſt pas moins perſuadé du mérite extraordinaire de ce grand homme, dont les principaux Ouvrages doivent être mis au nombre des Livres les plus originaux qui ayent paru dans ce ſiecle-ci; mais il n'y a perſonne qui ne puiſſe faire un faux pas, ſur-tout dans des matieres auſſi délicates que celles-ci, & où le paralogiſme ſe gliſſe auſſi facilement.

Tout ce qu'on citera de cet Auteur dans cet Examen, ſera pris du Tome premier de ſon Traité du Mouvement des Animaux, de l'Edition de Rome, faite en 1680. *On ſpecifie l'Edition, à cauſe des pages qu'on en citera quelquefois.*





EXAMEN DE L'OPINION DE M. BORELLI,

Sur les proprietez des Poids suspendus par des cordes.

ETAT DE LA QUESTION.

MONSIEUR BORELLI dans son Traité du Mouvement des Animaux, Tome 1. ch. 13. a fait une fort longue digression pour prouver qu'Hérigone, Stévin & plusieurs autres, se sont trompez, d'avoir avancé comme proposition generale, que *le poids T soûtenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puissances R & S, est à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de sa ligne de direction à chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, dont elle est diagonale.* Cet Auteur dit (*pag.* 137.) que cette proposition prise dans toute son étendue & sans restriction, lui paroît suspecte, pour Fig. 12.

» bien des raisons ; & même qu'il la croit capable de jet-
» ter dans l'erreur.

Il réduit toutes ces prétendues raisons à trois. 1°. Il dit » (*pag.* 138.) avoir démontré dans le Scholie de la 68. » proposition du Tome 1. de ce Traité, que les deux » puissances R & S appliquées au poids T suivant des » directions obliques, peuvent demeurer en équilibre » avec lui, non seulement quelque rapport qu'elles ayent » entr'elles, fût-il plus grand ou moindre que celui de » NC à CM, mais encore de quelque maniere que » le rapport de la somme de ces deux puissances à ce » poids, fût different de celui de la somme de NC & MC » à CH. 2°. Il a fait, dit-il, aussi plusieurs experiences qui lui paroissent confirmer ce sentiment. 3°. Enfin il a crû voir du paralogisme dans deux démonstrations qu'il a critiquées, dont la premiere paroît être du P. Pardie, & l'autre commune au reste des Auteurs qu'il attaque.

Il est constant que de toutes ces raisons, la premiere est non seulement la principale, mais encore l'unique qui puisse servir à la décision de ce differend. Car, 1°. en fait d'exactitude & de précision, l'experience ne prouve rien ; sur-tout ici, où la resistance qui vient du frottement des poulies avec leurs pivots, &c. rend ces sortes d'experiences possibles en tant de manieres differentes, qu'il n'y a presque point de sentiment pour ou contre lequel on n'en puisse faire à son gré. 2°. Qu'il y ait, ou qu'il n'y ait point de paralogisme dans les sentimens que cet Auteur critique, on n'en peut rien conclure, non plus contre le sentiment qu'il attaque ; puisque la verité ne dépend point du tout de la maniere dont on l'a démontre.

Toute la question présente se réduit donc à sçavoir si M. Borelli a démontré dans le Scholie de sa 68. proposition, Tome 1. » que les deux puissances R & S appli-» quées au poids T suivant des directions obliques, peu-» vent demeurer en équilibre avec lui, non seulem[ent]

quelque rapport qu'elles ayent entr'elles, fût-il plus « grand ou moindre que celui de NC à CM, mais en- « core de quelque maniere que le rapport de la somme « de ces deux puissances à ce poids, fût different de ce- « lui de la somme de NC & MC à CH. « Que dis-je ? Ce seroit assez pour détruire la proposition qu'il rejette, s'il avoit seulement démontré un cas où ce poids pût ainsi demeurer en équilibre avec ces puissances, sans être à chacune d'elles, comme la partie CH de sa ligne de direction, qui fait la diagonale du parallelogramme MN, à chacune des parties de leurs cordes, qui lui servent de côtez. Mais bien loin de l'avoir fait, la proposition d'où il tire le Scholie en question, prouve tout le contraire, je veux dire le sentiment d'où il a crû qu'elle le devoit éloigner.

C'est ce qu'on va faire voir dans le premier Chapitre de cet Examen : & dans le second, après avoir encore donné quelques démonstrations de ce même sentiment, toutes differentes de celles que M. Borelli a critiquées, on rendra par la méthode de la Nouvelle Mécanique, les Lemmes qu'il a déduits de sa 68. proposition, beaucoup plus generaux qu'ils ne le peuvent être par la sienne.







CHAPITRE I.

SENTIMENT D'HERIGONE, de Stévin, &c.

SUR LES PROPRIETEZ DES POIDS suspendus par des cordes.

Démontré par la proposition même que M. Borelli avoit crû leur être contraire.

LE Scholie de la 68. proposition de M. Borelli, dont il est ici question, porte, 1°. » Qu'avec les mêmes » inclinaisons de cordes, le poids qui y est suspendu, & » les forces qui le soûtiennent, peuvent varier en mille » manieres differentes, sans que pour cela il cesse de faire » équilibre avec elles, pourvû que la *puissance* R soit à » *la partie* X *de ce poids*, comme GC à GF, ou comme » AC à CH; & que la *puissance* S soit à *son autre partie* Z, » comme IC à IK, ou comme BC à CH......... 2°. Ce mê- » me Scholie porte reciproquement qu'en retenant les » mêmes poids, *c'est-à-dire ici, les mêmes forces*, (pourvû » que celui du milieu soit moindre que les deux extrê- » mes) on peut changer l'inclinaison de leurs cordes, » sans en rompre l'équilibre.

Fig. 1.

Il est clair que la premiere partie de ce Scholie peut avoir deux sens bien differens. 1°. Elle peut signifier que dans cette variation de poids & de forces, où cet Auteur veut que l'équilibre se conserve sans changer l'inclinaison de leurs cordes, ce poids demeure toûjours à chacune de ces puissances en même raison que la diagonale CH du parallelogramme MN, à chaque partie de leurs cordes, qui lui sert de côté; & en cela on va voir que cette consequence est parfaitement juste, mais aussi

(Cor.

(*Cor.* 21. *Th.* 1. *Nouv. Mécanique*) parfaitement conforme au ſentiment que cet Auteur attaque. 2°. Au contraire, ſi on lui fait ſignifier que cet équilibre puiſſe ſubſiſter ſans un tel rapport, alors on conclud très-mal, & même autant contre cet Auteur que contre Hérigone, &c. J'en dis tout autant de la ſeconde partie de ce même Scholie; & pour le démontrer, je vais faire voir que la propoſition d'où M. Borelli le tire, prouve tout le contraire, & que s'il y eût fait un peu plus d'attention, elle l'auroit infailliblement conduit au ſentiment d'où il a crû qu'elle le devoit éloigner; je veux dire, à croire (du moins pour tous les cas qu'elle comprend) que *le poids T ſoûtenu avec les cordes obliques AC & BC par deux poids ou deux puiſſances R & S, eſt toûjours à chacun d'eux ou d'elles, comme la partie HC de ſa ligne de direction, à chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, dont elle eſt la diagonale.* Voici comment.

DEMONSTRATION
ſuivant M. Borelli.

Selon cet Auteur (*prop.* 68.) lorſque les puiſſances R & S ſoûtiennent enſemble le poids T, la puiſſance R ſoûtient pour ſa part une partie X de ce poids, de même qu'elle feroit, ſi elle étoit appliquée ſuivant ſa même direction AC avec cette partie X au levier horiſontal CG; & la puiſſance S ſoûtient auſſi pour la ſienne l'autre partie Z de ce même poids, de même qu'elle feroit, ſi elle étoit auſſi appliquée ſuivant ſa même direction CB avec cette partie Z au levier CI qu'on ſuppoſe encore horiſontal & égal au premier: & par conſequent ſi l'on regarde (*Cor.* 2. *Lem.* 2. *Nouv. Mécan.*) l'impreſſion que la puiſſance S fait ſuivant CB ſur le nœud C qui retient enſemble les cordes de ces puiſſances & de ce poids, comme compoſée de deux impreſſions particulieres, dont l'une eſt ſuivant l'horiſontale CO, & l'autre ſuivant la perpendiculaire CH; on trouvera que ce que cette puiſſance lui en fait ſuivant CO, eſt égal à la reſi-

ſtance que feroit alors contre ce même point, & ſuivant cette même ligne, le levier CG pour empêcher la corde ACX de ſe redreſſer ; c'eſt-à-dire, égal à la charge de l'appui G de ce même levier. Or ſoient appellées G, I, les charges des appuis G, I, c'eſt-à-dire, les efforts dont le nœud C eſt tiré tout à la fois de C vers G, & vers I ; leſquels efforts directement contraires doivent être égaux entr'eux, puiſque (*hyp.*) aucun d'eux n'emporte le nœud C vers aucun des côtez G, I ; ainſi l'on aura ici $G=I$. Cela poſé,

1°. L'on aura R. G : : AC. CG : : CG. CF : : CI. CF.

Et conſequemment $G=\frac{R \times CF}{CI}$.

2°. L'on aura de même S. I : : BC. CO : : CI. CK. Et conſequemment auſſi $I=\frac{S \times CK}{CI}$.

Donc $\frac{R \times CF}{CI}=G=I=\frac{S \times CK}{CI}$, ou $R \times CF = S \times CK$; d'où reſulte R. S : : CK. CF. (en prenant $CI=CG$ pour ſinus total, & *ſ* pour la marque des ſinus) : : *ſ*CIK. *ſ*CGF : : *ſ*HCB. *ſ*HCA (ſoit le parallelogramme MN) : : *ſ*HCM. *ſ*CHM : : HM. CM : : CN. CM. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

Voilà ce que M. Borelli devoit premierement conclure de ſa 68. propoſition, ſinon en general, du moins pour tous les cas qu'elle comprend : Sçavoir, que *lorſque deux puiſſances R & S ſoûtiennent enſemble quelque poids T avec des cordes ſeulement, elles ſont toûjours entr'elles en même raiſon que les parties CN & MC de leurs cordes, qui ſervent de côtez au parallelogramme MN, qui a pour diagonale une partie CH de la ligne de direction du poids qu'elles ſoûtiennent.* De-là en faiſant MP & NQ perpendiculaires ſur HC, ces lignes marquant toûjours CP égale à HQ, cet Auteur auroit trouvé, comme il a fait (*p.* 137.)

que *chacune des puissances R & S*, étant toûjours (*par le Corol. de sa 69. prop.*) à tout ce poids, comme chacun des côtez CN & MC du parallelogramme MN, à la somme de leurs sublimitez CP & CQ, *lui est aussi toûjours comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale CH de ce même parallelogramme.* Ce qu'il falloit démontrer.

Quoique cette consequence suive necessairement de la 68. proposition de M. Borelli, cependant parce que cette proposition ne peut pas s'appliquer aux cas où une de ces puissances se trouve avoir sa direction au-dessous de l'horisontale qui passe par le point où leurs cordes se communiquent, elle n'en est pas une suite si generale que du Théoreme premier des poids suspendus par des cordes de la Nouvelle Mécanique. C'est pour cela qu'on se contente ici de dire, que si cet Auteur eût fait un peu plus d'attention à sa 68. prop. il auroit apperçû que tout ce que nous venons d'en conclure, est absolument vrai, du moins pour tous les cas qu'elle comprend.

Telle est la consequence que M. Borelli devoit tirer de sa 68. proposition; s'il l'eût fait, il auroit apperçû, 1°. que la premiere partie du Scholie qu'il en tire, n'est vraye qu'en cas que la variation du poids T & des forces R & S, entre lesquels il dit que l'équilibre se peut conserver sans changer l'inclinaison de leurs cordes, soit telle que ce poids demeure toûjours à chacune de ces puissances en même raison, que la diagonale CH du parallelogramme MN, à chaque partie de leurs cordes qui lui sert de côté. 2°. Il auroit encore vû que la seconde partie de ce même Scholie, est absolument fausse; puisqu'il n'est pas possible de faire le moindre changement auquel que ce soit des angles ACB, ACH & BCH, sans changer en même tems le rapport qui est, ou entre les côtez du parallelogramme MN, ou entre quelqu'un d'eux & sa diagonale; c'est-à-dire, puisque (*hyp.*) on ne change rien au rapport qui est entre ce poids & chacune de ces puissances, sans faire cesser la ressemblance de ces deux rapports; & par consequent aussi, suivant ce qui

vient d'être conclu de la 68. proposition de M. Borelli ; sans rompre l'équilibre de ce poids avec ces puissances.

AUTRE DEMONSTRATION. *encore suivant M. Borelli.*

Fig. 2. La prop. 69. Tom. 1. de M. Borelli, donne encore plus simplement ce qu'on vient de déduire de la prop. 68. du même Tome. Dans cette prop. 69. M. Borelli suppose comme là, & comme nous ci-après dans la Fig. 2. que les puissances R, S, soûtiennent le poids T seulement avec des cordes CR, CS, CT, attachées ensemble par un nœud commun & mobile C. Et après avoir pris CG. CH :: R. S. & fait GP, HQ, perpendiculaires en P, Q, sur la direction CT du poids T, prolongée vers D; il démontre exactement, & sans leviers, que R+S. T :: GC+CH. CP+CQ.

Or je dis que de cela suit encore la proposition que M. Borelli conteste à Hérigone, à Stévin, &c. Pour le voir, soit parallelement à CS la droite GD, qui rencontre en D la direction TC du poids T, prolongée jusques-là : l'on aura ainsi un triangle rectangle DPG semblable au rectangle CQH; d'où résulte GP. HQ :: DP. CQ :: DG. CH. Or on verra ci-après dans la Remarque de la prop. 3. du Chapitre suivant, que GP=HQ. Donc aussi DP=CQ, & DG=CH; & consequemment CP+CQ=CP+DP=CD. Or la prop. 69. Tome 1. de M. Borelli, donne R+S. T :: CG+CH. CP+CQ. Donc aussi R+S. T :: CG+CH. CD. De sorte que cet Auteur ayant pris ici CG. CH :: R. S. l'on y aura, selon lui-même, les puissances R, S, & le poids T, en raison des lignes CG, CH, CD. Or puisque ci-dessus l'on avoit DG=CH, & ces deux droites sont (*hyp.*) paralleles entr'elles, si l'on mene la droite DH, le quadrilatere CGDH se trouvera être un parallelogramme, de qui CG, CH, seront les côtez, & CD la diagonale. Donc, suivant M. Borelli, les puissances R, S, sont non seulement comme les côtez CG, CH, du parallelogramme

CGDH, pris sur leurs directions ; mais aussi au poids T, comme ces côtez correspondans sont à la diagonale CD de ce parallelogramme, prise de même sur la direction de ce poids. *Ce qu'il falloit encore démontrer suivant M. Borelli, qui le contestoit.*

REMARQUE.

Ayant démontré, comme l'on vient de faire, que le sentiment dont il est ici question, bien loin d'être contraire aux prop. 68. 69. Tom. 1. de M. Borelli, comme cet Auteur l'a crû, en est une suite si necessaire, que s'il eût fait encore quelques pas, il l'auroit infailliblement trouvé : c'est encore une nouvelle raison de ne nous point arrêter aux experiences qu'il objecte à Stévin, à Hérigone, & aux autres ; & de ne toucher à la critique qu'il a faite de leurs raisonnemens, que pour indiquer les fausses suppositions sur lesquelles il s'est appuyé pour y trouver du paralogisme. Il y en a trois que voici.

1°. Dans la critique qu'il a faite du premier de ces raisonnemens, qui paroît être du P. Pardie, après avoir dit que si l'on regarde la corde AC comme une verge de fer mobile autour du point fixe A, à laquelle le poids T soit attaché, ce poids sera soûtenu avec cette verge par ce point fixe, de même que sur un plan CI perpendiculaire à AC ; il fait IL perpendiculaire à l'horisontale LC, & (*pag.* 139.) il dit : *Patet quod pondus T....... ad vim quâ idem T innititur, & comprimit idem planum IC, est ut IC ad LC.* Cela seroit vrai (*Corol.* 20. *Th.* 26.) si BC étoit parallele à CI perpendiculaire (*Hyp.*) à AC ; mais non pas (*Corol.* 17. *Th.* 26.) lorsqu'elle lui est oblique, comme ici, où le poids S aide au poids T, à charger le plan CI, qui ne le seroit que par ce poids T, si BC lui étoit parallele. Fig. 38.

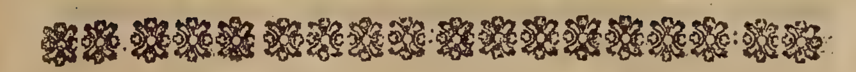
2°. Dans la critique qu'il fait ensuite du raisonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. après avoir regardé le poids T soûtenu par les cordes AC & BC, comme s'il l'étoit Fig. 40.

ſur les plans CK perpendiculaire à AC, & CG perpendiculaire à CB, inégalement inclinez, il dit (*pag.* 141.) *Tunc pondus T dum moveri niteretur per duas rectas inclinatas CK & CG, cogeretur moveri, aut niſum exercere per diagonalem CO ſecantem angulum GCK bifariam.* Pour cela il faudroit que ces deux plans CK, CO, fuſſent également inclinez, & conſequemment auſſi les directions RC, SC, qu'on leur ſuppoſe perpendiculaires.

Outre cette ſuppoſition, M. Borelli ſe ſert encore ici de la premiere qu'il a déja faite contre le P. Pardie. Il dit (*pag.* 141.) après avoir fait CP perpendiculaire à l'horiſontale KG : *Idem pondus abſolutum T ad vim quâ comprimit planum CO, eandem rationem habebit quàm CO ad OP.* Cela ſeroit vrai, ſi ce poids T étoit retenu ſur CO par une puiſſance d'une direction parallele à CO.

3°. Enfin ſi ces deux ſuppoſitions ne lui ſuffiſant pas encore pour trouver à redire au raiſonnement d'Hérigone, de Stévin, &c. il y en ajoûte une troiſiéme qui ne vaut pas mieux. *Vis*, dit-il au même endroit, *quam patitur planum CO à compreſſione ponderis T æqualis eſt viribus ambarum potentiarum R & S, quæ ſuſtinendo idem pondus in tali ſitu plani CO inclinati vicem ſupplent.* Cela eſt faux. La force réſultante du concours des deux autres, eſt toûjours moindre que leur ſomme, tant que leurs directions font quelque angle entr'elles ; outre que cette force réſultante le long du plan CO, étant ainſi parallele à ce plan, ne ſeroit pas celle de ſa compreſſion qui réſulteroit du concours de cette force parallele & de la peſanteur du poids ſoûtenu par elle ſur ce plan.

On ne démontre point ici la fauſſeté de toutes ces ſuppoſitions : elle eſt trop évidente par le Th. 26. des Surfaces de la Nouv. Méc. pour s'y arrêter davantage. D'ailleurs c'eſt, ce me ſemble, avoir ſuffiſamment répondu à M. Borelli, que d'avoir démontré, comme l'on vient de faire, le ſentiment d'Hérigone, de Stevin, &c. par la propoſition même que cet Auteur croyoit leur être contraire : c'eſt auſſi tout ce qu'on s'étoit propoſé dans ce premier Chapitre. Paſſons au ſecond.



CHAPITRE II.

NOUVELLES DEMONSTRATIONS du sentiment d'Hérigone, de Stévin, &c.

Sur les proprietez des poids suspendus par des cordes.

AVEC QUELQUES PROPOSITIONS de M. Borelli, rendues par la méthode de la Nouvelle Mécanique, beaucoup plus generales qu'elles ne le peuvent être par la sienne.

AVERTISSEMENT.

Le poids T étant soûtenu par deux ou plusieurs puissances R, S, &c. si des extrêmitez G, H, &c. des parties CG, CH, &c. de leurs cordes qui leur soient proportionnelles, on fait GP, HQ, &c. perpendiculaires sur sa ligne de direction CD, elles y désigneront depuis leurs points de rencontre P, Q, &c. jusqu'au point C, où cette ligne concourt avec ces cordes, certaines parties CP, CQ, &c. dont nous parlerons souvent dans la suite. C'est pourquoi nous leur allons donner des noms. FIG. 56.

DEFINITION I.

Lorsque ces parties CP, CQ, &c. se trouveront au-dessus du point C, nous les appellerons les *sublimitez* des puissances qui les auront déterminées par leurs proportionnelles.

DEFINITION II.

Et celles des lignes qui se trouveront au-dessous de ce

même point C, nous les appellerons les *profondeurs* de ces mêmes puissances.

Selon ces définitions, CP est la sublimité *de la puissance R dans les fig.* 5. *&* 6. *CQ est encore la* sublimité *de la puissance S dans la fig.* 5. *mais dans la fig.* 6. *CQ est la* profondeur *de cette même puissance.*

On avertit encore que lorsqu'on comparera à la sublimité ou à la profondeur de ces puissances, des parties de leurs cordes qui leur soient proportionnelles, on ne l'entendra pas indifferemment de toutes les proportionnelles qu'on pourroit leur assigner, mais seulement de celles qui déterminent les sublimitez ou les profondeurs en question.

PROPOSITION I.

Fig. 5. 6. 7. 8. *LE poids T soûtenu avec les cordes AC & BC par les puissances R & S, & en équilibre avec elles; est toûjours à chacune d'elles, comme la partie DC de sa ligne de direction, à chacun des côtez GC & HC du parallelogramme GH, dont elle est diagonale.*

DEMONSTRATIONS.

1°. Voyez celle qu'on a donnée du Th. 1.

2°. Voyez ci-après la Remarque qui suit le Corollaire de la prop. 3.

Fig. 5. 6. 3°. Soient conçûs les leviers MC & NC placez chacun en ligne droite avec chacune des directions AC & BC des puissances R & S. De leurs points d'appui M & N pris à discrétion, soient tirées MF & NK perpendiculairement à ces mêmes lignes reciproquement prises, & ML avec NO perpendiculaires aussi à la ligne de direction DCE de ce même poids. Enfin de quelqu'un des points D de cette même ligne faite DH & DG paralleles à AC & à CB. Cela fait, il est clair que le levier CN étant (*hyp.*) en ligne droite avec la ligne de direction CB de

de la puiſſance S, ſupplée neceſſairement tout l'effet de cette puiſſance ; & que par conſequent la puiſſance R pourroit ſuivant ſa même direction AC, ſoûtenir ſeule le poids T avec ce levier ainſi placé, de même qu'elle le ſoûtient preſentement avec la puiſſance S. Pour la même raiſon, la puiſſance S pourroit auſſi le ſoûtenir ſeule avec le levier CM, de même qu'elle le ſoûtient preſentement avec la puiſſance R : le poids T eſt donc ſoûtenu par le concours d'action des puiſſances R & S, de même qu'il le ſeroit par la ſeule puiſſance R appliquée avec lui au levier NC, ou bien par la ſeule puiſſance S appliquée auſſi avec lui au levier CM. Or dans le premier cas la puiſſance R ſeroit (*Th. 21. Cor. 13. de la Nouv. Mécan.*) au poids T, comme NO à NK ; c'eſt-à-dire, comme le ſinus de l'angle NCO, ou de DCH à celui de l'angle NCK, ou de CHD. Et dans le ſecond cas le poids T, pour la même raiſon, ſeroit à la puiſſance S, comme MF à ML ; c'eſt-à-dire encore, comme le ſinus de l'angle MCF, ou de CHD, à celui de l'angle MCL, ou de HDC. Donc la puiſſance R, le poids T, & la puiſſance S, ſont entr'eux, comme les ſinus des angles DCH, CHD, & HDC ; c'eſt-à-dire, comme les lignes DH, CD, & CH. Le poids T eſt donc à la puiſſance R, comme CD à DH, ou à GC ; & à la puiſſance S, comme la même CD à CH. *Ce qu'il falloit démontrer.*

4°. Si au lieu des puiſſances R & S, les cordes AC & BC étoient attachées aux extrêmitez de quelque levier AB, dont l'appui D fût dans la ligne de direction DCE du poids T, il eſt clair qu'en quelque ſituation que ce levier ſe trouvât alors, il y demeureroit, & que la charge de ſon point d'appui ſeroit alors égale au poids T. Il eſt encore clair que les extrêmitez A & B de ce même levier ſeroient auſſi tirées ſuivant AC & BC, chacune avec une force égale à celle de la puiſſance R ou S, qu'elle ſupplée. Or les forces avec leſquelles les points A & B de ce levier ſeroient ainſi tirées ſuivant AC & BC, ſeroient entr'elles (*Th. 21. Cor. 13. Nouv. Mécan.*) FIG. 7. 8.

comme DF & DK tirées du point D perpendiculairement sur BC & AC; c'est-à-dire, en faisant le parallelogramme GH, comme les sinus des angles DCH & CDH, ou comme les côtez DH & HC de ce parallelogramme. Ces mêmes forces seroient aussi (*Th.* 21. *part.* 2. 3. 4.) chacune à la charge du point d'appui D de ce levier, c'est-à-dire, au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez à la diagonale DC: les forces des puissances R & S, c'est-à-dire, ces mêmes puissances elles-mêmes, sont donc entr'elles, comme DH, ou GC & HC; & au poids T, comme chacun de ces mêmes côtez du parallelogramme GH à sa diagonale DC. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On pourroit encore démontrer cette même proposition en se servant des plans inclinez, pourvû qu'on en prît un qui fût perpendiculaire à la direction de quelqu'une des deux puissances qui soûtiennent ce poids: car cette puissance, & la charge de ce plan alors égales, n'ayant qu'un même rapport avec ce poids, non plus qu'avec l'autre puissance qu'on considere en ce cas comme le soûtenant seule sur ce plan; on trouveroit par le Cor. 9. du Th. 26. que ce poids est toûjours à chacune de ces puissances, comme le sinus de l'angle que leurs cordes font entr'elles, à chacun des sinus des angles que font avec la ligne de direction de ce poids chacune de ces cordes reciproquement prises. Tout cela est presentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

COROLLAIRE I.

Fig. 5. 6. 7. 8. On peut conclure generalement de ces démonstrations, ce que nous n'avons conclu (*chap.* 1.) de la 68. prop. de M. Borelli, que pour les cas qu'elle comprend; sçavoir, qu'il n'y en a aucun de possible, où l'on puisse conserver l'équilibre du poids T avec les puissances R & S, en changeant le rapport qu'elles ont entr'elles, ou avec lui, à moins qu'on ne change en même tems l'inclinaison de ces cordes, sans changer aussi le rapport de ces mêmes puissances, ou entr'elles, ou avec ce poids; parce

que sans cela il n'est pas possible de faire que chacun des côtez CH & CG du parallelogramme GH, continue d'être à sa diagonale DC, comme chacune des puissances R & S au poids T; ce qui doit cependant être, comme on le vient de voir, pour qu'elles fassent équilibre avec lui.

On peut comparer ce Corollaire aux Scholies des propositions 68. & 69. de M. Borelli.

COROLLAIRE II.

Il suit encore de ces démonstrations que chacune des puissances R & S est au poids T, comme chacune des parties GC & HC de leurs cordes, qui leur sont proportionnelles, à la somme (*fig.* 5.) de leurs sublimitez, ou à la difference (*fig.* 6.) qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre; parce que dans le parallelogramme GH les angles GCD & CDH étant égaux, aussi-bien que les lignes GC & DH; de plus les angles qui se font en P & en Q, étant aussi (*avert.*) égaux, les triangles GPC & HDQ sont non seulement semblables, mais encore leurs côtez CP & DQ sont égaux. Donc (*fig.* 5.) CP plus CQ est égal à DQ plus CQ; & (*fig.* 6.) CP moins CQ sera aussi égal à DQ moins CQ. Or (*fig.* 5.) DQ plus CQ est égal à CD, de même (*fig.* 6.) que DQ moins CQ. Donc (*fig.* 5.) CP plus CQ est égal à CD, aussi-bien (*fig.* 6.) que CP moins CQ. Or selon les démonstrations précedentes, chacune des puissances R & S est au poids T, comme chacune de leurs proportionnelles CG & HC à CD. Donc chacune de ces mêmes puissances est à ce poids, comme chacune de ces mêmes proportionnelles à CP (*fig.* 5.) plus CQ, ou (*fig.* 6.) à CP moins CQ; c'est-à-dire, (*Déf.* 1. & 2.) à la somme (*fig.* 5.) de leurs sublimitez, ou bien (*fig.* 6.) à la difference qui est entre la sublimité de l'une & la profondeur de l'autre. FIG. 5. & 6.

COROLLAIRE III.

D'où l'on voit que la ſomme des deux puiſſances qui ſoûtiennent un poids avec des cordes, eſt toûjours à ce poids, comme la ſomme des longueurs de leurs cordes, qui leur ſont proportionnelles, à la ſomme de leurs ſublimitez, ou à la difference qui eſt entre la ſublimité de l'une & la profondeur de l'autre.

On peut comparer encore ces deux derniers Corollaires à la 69. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

PROPOSITION II.

Fig. 9. *DE quelque maniere qu'un poids T ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances A, B, D, E, F, &c. que ce ſoit, appliquées à un même nœud C, ſi l'on prend ſur leurs nœuds autant de parties CG, CR, CM, CN, CP, &c. qui leur ſoient proportionnelles, & que ſous deux de ces parties, par exemple, ſous GC & RC, l'on faſſe un parallelograme RG, dont la diagonale CH faſſe encore avec une autre de ces parties CM le parallelogramme HM, dont la diagonale CL faſſe encore avec une autre de ces parties CN le parallelogramme LN, dont la diagonale CQ faſſe encore avec une autre de ces parties CP le parallelogramme PQ, & ainſi juſqu'à la derniere de ces proportionnelles. On verra, 1°. que la diagonale du dernier de ces parallelogrammes, qui eſt ici CK, ſera dans la ligne de direction du poids T. 2°. Et que chacune de ces puiſſances ſera à ce poids, comme chacune des proportionnelles, ſelon qu'elles leur répondent, eſt à cette même diagonale.*

DEMONSTRATION.

1°. Puiſque (*hyp.*) la puiſſance A eſt à la puiſſance B comme CG à CR, il réſultera (*Lem. 2.*) de leur concours d'action ſur le point C une impreſſion composée ſuivant CH, d'une force qui ſera (*Cor. 1. du même*

Lem.) à chacune de ces puiſſances, comme CH à chacune des lignes CG & CR qui les repreſentent: l'impreſſion que font enſemble ces deux puiſſances ſur le point C, eſt donc la même que celle que feroit ſeule ſur ce même point quelque nouvelle puiſſance, qui lui étant appliquée ſuivant CH, au lieu d'elles, leur ſeroit à chacune, comme CH à chacune des lignes CG & CR; & par conſequent les trois puiſſances A, B, D, doivent faire enſemble la même impreſſion ſur le point C que cette nouvelle puiſſance (je l'appele H) feroit alors avec la puiſſance D. Or (*Lem.* 2.) l'impreſſion qui réſulteroit alors du concours d'action des puiſſances D & H ſur le point C, ſe feroit ſuivant CL, d'une force qui ſeroit (*Cor.* 1. *du même Lemme*) à celle de la puiſſance D, comme CL à CM. Donc l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des trois puiſſances A, B, D, ſur le point C, ſe fait en effet ſuivant CL, d'une force qui eſt à celle de la puiſſance D, comme CL à CM: elles ne font donc toutes trois enſemble ſur ce point que la même impreſſion que feroit ſeule quelqu'autre puiſſance (je l'appelle L) qui appliquée ſuivant CL, au lieu de ces trois, ſeroit à la puiſſance D, comme CL à CM; & par conſequent les quatre puiſſances A, B, D, E, ne doivent faire ſur le point C que la même impreſſion que feroit alors la puiſſance L avec la puiſſance E. Or (*Lem* 2.) l'impreſſion qui réſulteroit alors du concours d'action de ces deux dernieres puiſſances ſur le point C, ſe feroit ſuivant CQ, d'une force qui ſeroit (*Cor.* 2. *du même Lem.*) à celle de la puiſſance E, comme CQ à CN. Donc l'mpreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des quatre puiſſances A, B, D, E, ſur le point C, ſe fait en effet ſuivant la ligne CQ, d'une force qui eſt à celle de la puiſſance E, comme CQ à CN. On prouvera de même que l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action des cinq puiſſances A, B, D, E, F, ſe fait auſſi ſuivant CK, d'une force qui eſt à la puiſſance F, comme CK à CP. Et ainſi toûjours de même jûſqu'à

la derniere des puiſſances appliquées à ce poids. D'où il ſuit que l'impreſſion compoſée qui réſulte du concours d'action de toutes ces puiſſances ſur le point C, en quelque nombre qu'elles ſoient, ſe fait toûjours ſuivant la diagonale du dernier des parallelogrammes faits comme l'on vient de dire, c'eſt-à-dire ici, ſuivant CK; & par conſequent (*Th.* 1. *Nouv. Méc.*) cette diagonale eſt toûjours en ligne droite avec TC, c'eſt-à-dire, dans la ligne de direction du poids T. *Ce qu'il falloit démontrer.*

2°. On vient de voir que le poids T eſt ſoûtenu par les puiſſances A, B, D, E, F, &c. de même qu'il le ſeroit, par exemple ici, par la puiſſance F aidée d'une autre ſuivant CQ, à qui elle ſeroit comme CP à CQ (les directions de toutes demeurant toûjours les mêmes): Donc (*prop.* 1.) la puiſſance F eſt au poids T, comme CP à CK. Or (*hyp.*) la puiſſance F eſt à chacune des puiſſances E, D, B, A, &c. comme CP à chacune des parties de leurs cordes CN, CM, CR, CG, &c. Donc chacune de ces puiſſances eſt au poids T, comme chacune de ces proportionnelles, ſelon qu'elles leur répondent, eſt à la diagonale CK. Ce qu'on vient de dire de la puiſſance F, ſe prouvera de même de toute autre dont la proportionnelle feroit un des côtez du parallelogramme qu'on vient de démontrer, avoir toûjours ſa diagonale, comme ici CK, dans la ligne de direction du poids T: ainſi en general de quelque maniere qu'un poids ſoit ſoûtenu avec des cordes par quelque nombre de puiſſances que ce ſoit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puiſſances eſt toûjours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles qui ſervent de côtez aux parallelogrammes dont il eſt ici queſtion, eſt à la diagonale du dernier, qu'on vient de voir ſe trouver toûjours dans ſa ligne de direction.

COROLLAIRE.

D'où l'on voit que toutes ces puiſſances priſes enſemble, ſont toûjours au poids T, qu'elles ſoûtiennent, com-

me la somme de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la diagonale du parallelogramme qu'on vient de démontrer (*n.* 1.) se trouver toûjours dans la ligne de direction de ce poids : de sorte que lorsque toutes ces puissances sont égales entr'elles, ces mêmes proportionnelles l'étant aussi, la somme de toutes ces puissances est à ce poids, comme une de ces proportionnelles à une partie de cette diagonale divisée en autant d'égales qu'il y a de telles puissances ; c'est-à-dire ici, comme laquelle que ce soit des lignes CG, CR, CM, CN, CP, à $\frac{1}{5}$ de CK.

PROPOSITION III.

Toutes choses étant les mêmes que dans la proposition précedente, on trouvera presentement que chacune des puissances A, B, D, E, F, &c. est au poids T qu'elles soûtiennent, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, &c. à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs. Fig. 9. 10.

DEMONSTRATION.

De toutes les pointes des parallelogrammes GR, HM, LN, QP, &c. tirez Gg, Hh, Rr, Ll, Mm, Qq, Nn, Pp, &c. perpendiculairement sur la ligne de direction du poids T, prolongée indéfiniment de part & d'autre. Cela fait, vous trouverez par le Lemme 10. 1°. $Ch = Cg - Cr$. 2°. $Cl = Cm - Ch$. Donc $Cl = Cm - Cg + Cr$. 3°. $Cq = Cl + Cn$. Donc $Cq = Cm - Cg + Cr + Cn$. 4°. $Ck = Cq - Cp$. Donc $Ck = Cm - Cg + Cr + Cn - Cp$. Enfin continuant toûjours ainsi jusqu'à la diagonale qui se trouve toûjours (*prop.* 2.) dans la ligne de direction du poids T, on trouvera de même que cette diagonale est toûjours égale à $Cm - Cg + Cr + Cn - Cp \pm$, &c. Or on vient de voir (*prop.* 2.) que chacune des puissances A, B, D, E, F, &c. est aussi toûjours au poids T qu'elles soûtien- Fig. 9.

nent, comme chacune de leurs proportionnelles CG, CR, CM, CN, CP, à cette même diagonale. Donc chacune de ces puissances est à ce poids, comme chacune de ces proportionnelles à $Cm + Cr + Cn - Cg - Cp \pm$, &c. c'est-à-dire (*Déf.* 1. & 2.) à la somme de leurs sublimitez *Cm*, *Cr*, *Cn*, &c. moins la somme de leurs profondeurs *Cg*, *Cp*, &c. D'où l'on voit en general, que de quelque maniere qu'un poids soit soûtenu avec des cordes par quelque nombre de puissances que ce soit, appliquées à un même nœud, chacune de ces puissances est toûjours à ce poids, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AUTRE DEMONSTRATION.

FIG. 10. Soient encore les lignes CG, CR, CM, CN, CP, &c. proportionnelles aux puissances A, B, D, E, F, &c. concevez par le point C, où elles se communiquent, un plan horisontal OH, c'est-à-dire, perpendiculaire à la ligne de direction du poids T; tirez ensuite des extrêmitez de ces proportionnelles, G, R, M, N, P, &c. autant de perpendiculaires sur le plan OH, & sur la ligne de direction du poids T indéfiniment prolongée de part & d'autre; en faisant depuis C sur le plan OH autant de lignes CH, CQ, CL, CO, CK, &c. qui joignent ce point avec les perpendiculaires qui tombent sur ce plan, on aura autant de parallelogrammes rectangles H*g*, Q*r*, L*m*, O*n*, K*p*, &c. qui exprimeront (*Lem.* 2. *Cor.* 2.) que chacune de ces puissances, par exemple, la puissance A, fait la même impression sur le point C, que feroient deux autres puissances appliquées à ce point, l'une suivant CH, & l'autre suivant C*g*, à chacune desquelles celle-ci seroit comme CG à chacune de ces mêmes lignes. Le point C est donc tiré vers bas suivant la ligne de direction du poids T par la puissance A d'une force (*Cor.* 1. *du même Lemme*) à qui cette puissance est comme CG à C*g*. Pour

la

la même raison il est encore tiré suivant la ligne de direction du même poids. 1°. Vers bas, par la puissance F d'une force à qui elle est comme CP à C*p*, &c. 2°. Vers haut, par la puissance B d'une force à qui elle est comme CR à C*r*; par la puissance D d'une force à qui elle est comme CM à C*m*; par la puissance E d'une force à qui elle est comme CN à C*n*, &c. Or (*hyp.*) la puissance A est à chacune des puissances B, D, E, F, &c. comme sa proportionnelle CG à chacune des leurs CR, CM, CN, CP, &c. Donc la puissance A est à chacune des forces avec lesquelles le point C est tiré suivant la ligne de direction du poids T. 1°. Vers bas, par les puissances A, F, &c. comme CG à chacune de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. 2°. Vers haut, par les puissances B, D, E, &c. comme la même CG à chacune de leurs sublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. Donc cette même puissance A est à la somme de toutes les forces avec lesquelles le point C est tiré suivant la ligne de direction du poids T. 1°. Vers bas, par les puissances A, F, &c. comme sa proportionnelle CG à la somme de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. 2°. Vers haut par les puissances B, D, E, &c. comme la même CG à la somme de leurs sublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. Or la somme faite de la pesanteur de ce poids, & des forces avec lesquelles le point C est tiré vers bas suivant la ligne de direction de ce même poids par les puissances A, F, &c. étant diamétralement opposée à la somme de celles avec lesquelles ce même point est tiré en même tems vers haut suivant cette même ligne par les puissances B, D, E, &c. & aucune de ces deux sommes de force ne l'emportant sur l'autre; puisque (*hyp.*) le poids T ne monte ni descend : c'est une consequence necessaire qu'elles soient égales. Donc la puissance A est non seulement à la somme des forces avec lesquelles le point C est tiré vers bas suivant la ligne de direction du poids T par les puissances A, F, &c. comme sa proportionnelle CG à la somme de leurs profondeurs C*g*, C*p*, &c. mais aussi à la somme faite de cette premiere & de la pesanteur de ce même poids,

comme la même CG à la somme des sublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. des puissances B, D, E, &c. Donc la puissance A est à cette derniere somme moins la premiere, c'est-à-dire, à la pesanteur seule du poids T, ou à ce poids lui-même, comme sa proportionnelle CG à la somme des sublimitez C*r*, C*m*, C*n*, &c. moins la somme des profondeurs C*g*, C*p*, &c. Or (*hyp.*) chacune des puissances B, D, E, F, &c. est à la puissance A, comme chacune de leurs proportionnelles CR, CM, CN, CP, &c. à sa proportionnelle CG. Donc chacune des puissances A, B, D, E, F, &c. est au poids T qu'elles soûtiennent, comme chacune de leurs proportionnelles à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

On voit presentement en general que la somme de toutes les puissances qui soûtiennent un poids avec des cordes qui se tiennent par un même nœud, en quelque nombre qu'elles soient, quelque proportion qu'elles ayent entr'elles, & de quelque maniere qu'elles lui soient appliquées, est toûjours à ce poids, comme la somme des parties de leurs cordes qui leur sont (*chap. 2. avert.*) proportionnelles à la somme de leurs sublimitez moins celle de leurs profondeurs.

On peut comparer tout ceci avec les propositions 70. 73. 74. *de M. Borelli; & on verra non seulement qu'elles sont très-limitées, mais encore qu'avec sa méthode on ne peut pas aller si loin.*

REMARQUE.

Fig. 2. & 21. En faisant la seconde des deux démonstrations précedentes, il m'en est encore venu une de la premiere proposition. La voici.

Le poids T étant donc soûtenu avec des cordes par deux puissances R & S, des angles G & H du parallelogramme GH, dont la diagonale CD fait partie de la ligne de direc-

tion de ce poids, soient faites GM & HN paralleles à cette diagonale, & perpendiculaires à MCN, achevez les parallelogrammes MP & NQ. Cela fait, vous trouverez encore de la maniere que nous avons fait, la seconde des deux démonstrations précedentes, que le poids T est aux puissances R & S, comme la partie CD de sa ligne de direction aux parties CG & CH de leurs cordes, qui font les côtez du parallelogramme CH, dont elle est diagonale.

Car (*Cor. 6. Lem. 3. Nouv. Méc.*) la puissance R fait sur le point C la même impression que feroient deux autres puissances appliquées à ce point, l'une suivant CP, & l'autre suivant CM, à chacune desquelles celle-ci seroit comme CG à chacune de ces lignes. Le point C reçoit donc en même tems deux impressions differentes de la puissance R, l'une suivant CP, d'une force qui est à celle de cette puissance (*Cor. 5. du même Lem.*) comme CP à CG, & l'autre suivant CM, d'une force qui est aussi (*par le même Cor.*) à celle de cette même puissance, comme CM à CG. Pour la même raison ce même point C reçoit encore en même tems deux impressions differentes de la puissance S, l'une suivant CQ, d'une force qui est à celle de cette puissance, comme CQ à CH, & l'autre suivant CN, d'une force qui est aussi à celle de cette même puissance, comme CN à CH. Or, 1°. la force de l'impression que reçoit le point C de la puissance R suivant CM, est égale à celle qu'il reçoit en même tems de la puissance S suivant CN; puisqu'elles sont diamétralement opposées, & qu'aucune des deux (*hyp.*) ne surmonte l'autre. La force de la puissance R est donc à celle de l'impression que reçoit le point C de la puissance S suivant CN, comme CG à CM. Or CM est égale à CN, puisque les triangles GPD & HQC semblables, & GD égale à CH, rendent GP égale à HQ, & que les parallelogrammes MP & NQ rendent aussi GP égale à CM, & HQ égale à CN. Donc la puissance R est à la force de l'impression que le point C reçoit de la puissance S suivant CN, comme CG à CN. Or on vient de voir que

la force de cette même impression est à la puissance S, comme CN à CH. Donc la puissance R est à la puissance S, comme CG à CH. 2°. On vient de voir aussi que la puissance S est à la force de l'impression qu'elle fait sur le point C suivant CQ, comme CH à CQ. Donc la puissance R est aussi à la force de cette même impression comme CG à CQ, c'est-à-dire, comme CG à DP, puisque les triangles GPD & HQC semblables, & GD égale à CH, rendent DP égale à CQ. On vient de voir encore que cette même puissance R est à la force de l'impression qu'elle fait sur ce même point C suivant CP, comme CG à CP. Donc la puissance R est à la somme, ou à la difference des forces de ces deux impressions faites sur le point C suivant CP & CQ, par elle & par la puissance S, comme CG à la somme ou à la difference de ces deux lignes. Or (*fig.* 2.) la somme de ces deux lignes, ou (*fig.* 11.) leur difference est égale à la diagonale CD du parallelogramme GH; & (*fig.* 2.) la somme, ou (*fig.* 11.) la difference des forces de ces deux impressions, est aussi égale au poids T. Donc la puissance R est au poids T, comme CG à CD. On vient de démontrer (*n.* 1.) que cette même puissance R est aussi à la puissance S, comme CG à CH. Donc les puissances R & S, & le poids T sont entr'eux comme les lignes CG, CH & CD; & par consequent ce poids est à chacune d'elles, comme la partie CD de sa ligne de direction à chacune des parties de leurs cordes, qui sont les côtez du parallelogramme GH, dont elle est diagonale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On voit de-là que si par le point C, où se communiquent les deux cordes qui soûtiennent quelque poids que ce soit, on fait MN perpendiculaire à la ligne de direction de ce poids, & qu'après avoir pris de part & d'autre sur cette ligne CM & CN égales entr'elles, on fasse aux points M & N les perpendiculaires MG & NH, qui rencontrent aux points G & H les cordes des puissances qui soûtiennent ce poids; elles en détermineront des par-

ties CG, CH, qui seront toûjours proportionnelles à ces mêmes puissances.

Si M. Borelli eût fait reflexion que les puissances R & S n'agissent pas seulement contre le poids T, mais aussi l'une contre l'autre, & que de même qu'elles concourent ensemble pour empêcher que ce poids n'attire à lui (fig. 2.) *le nœud C, de même aussi chacune d'elles concourt avec lui pour empêcher que l'autre ne l'emporte. Si, dis-je, il avoit fait cette reflexion, il auroit vû sans doute que chacune de ces puissances fait impression sur ce nœud, non seulement suivant la direction du poids qu'elles soûtiennent, pour le tenir toûjours à même hauteur, mais aussi suivant l'horisontale MCN, pour empêcher qu'aucune d'elles ne l'attire ni à droit ni à gauche. D'où il auroit infailliblement conclu que ces impressions horisontales, étant diamétralement opposées, doivent toûjours être égales. De-là voyant qu'elles augmentent ou diminuent necessairement à mesure que les angles que font les cordes de ces puissances avec la ligne de direction du poids qu'elles soûtiennent, s'approchent ou s'éloignent de l'angle droit, il auroit enfin apperçû l'impossibilité de faire, sinon aucun, du moins un tel changement à leurs directions, sans en rompre l'équilibre.*

Je dis sinon aucun changement, *parce qu'il a été démontré* (Cor. 1. prop. 1.) *qu'il n'est pas possible d'y en faire aucun sans rompre l'équilibre qui est* (hyp.) *entre ces puissances, & le poids qu'elles soûtiennent. Nous l'avons même conclu* (Chap. 1.) *de la 68. proposition d'où cet Auteur tire un Scholie tout contraire par un raisonnement dont le défaut est presentement aisé à découvrir. Voyez-le.*

Sur ce qu'on vient de dire de l'usage des impressions horisontales que font sur le nœud C (fig. 2. & 11.) *les puissances R & S, il est aisé de juger de celui des impressions semblables que font aussi sur le nœud C de leurs cordes suivant le plan OH* (fig. 10.) *les puissances A, B, D, E, F, &c. aussi ne s'y arrêtera-t'on pas davantage.*

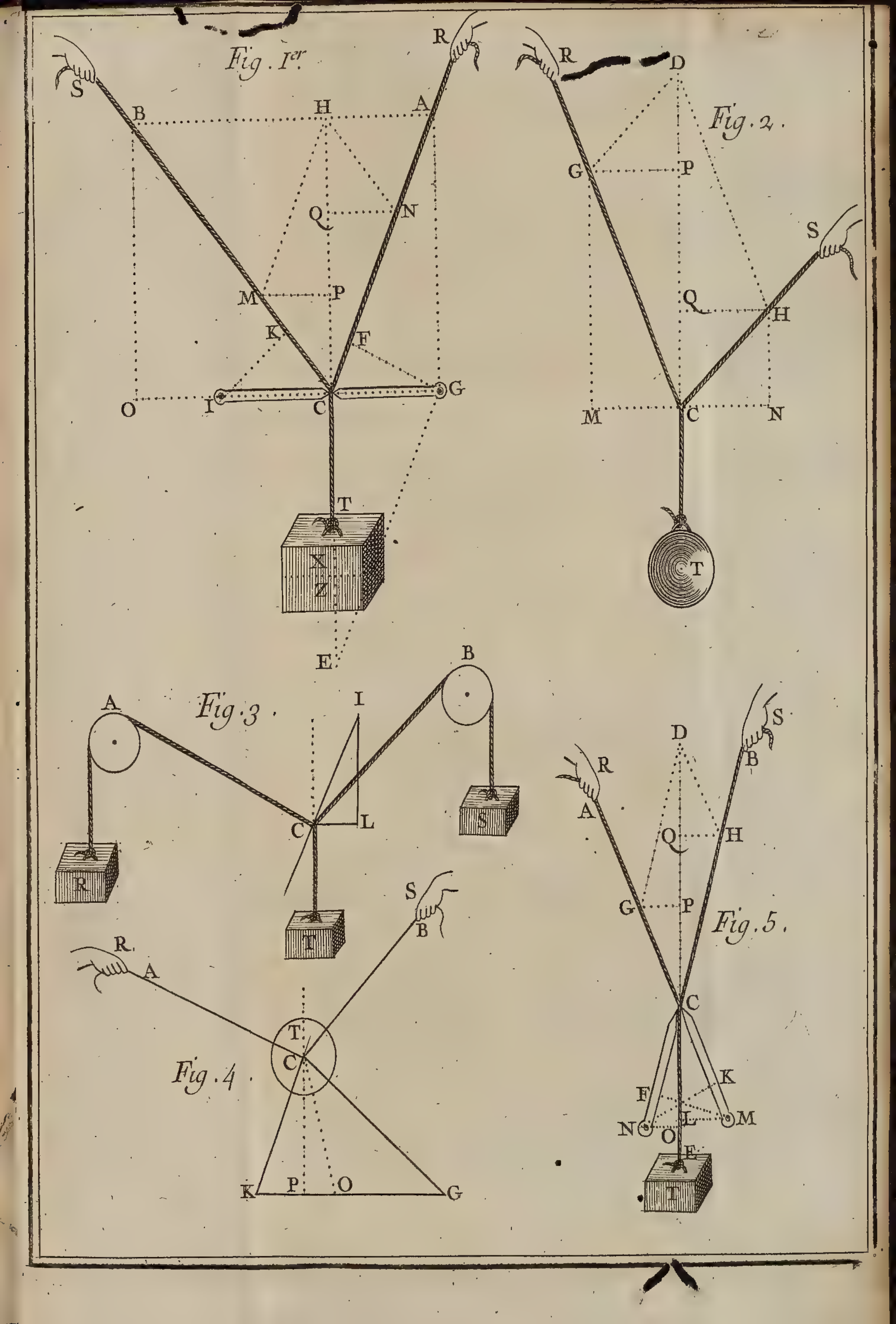
On peut encore comparer le Th. 7. & son premier Corollaire (Nouv. Mécan.) *à la 78. prop. de M. Borelli.*

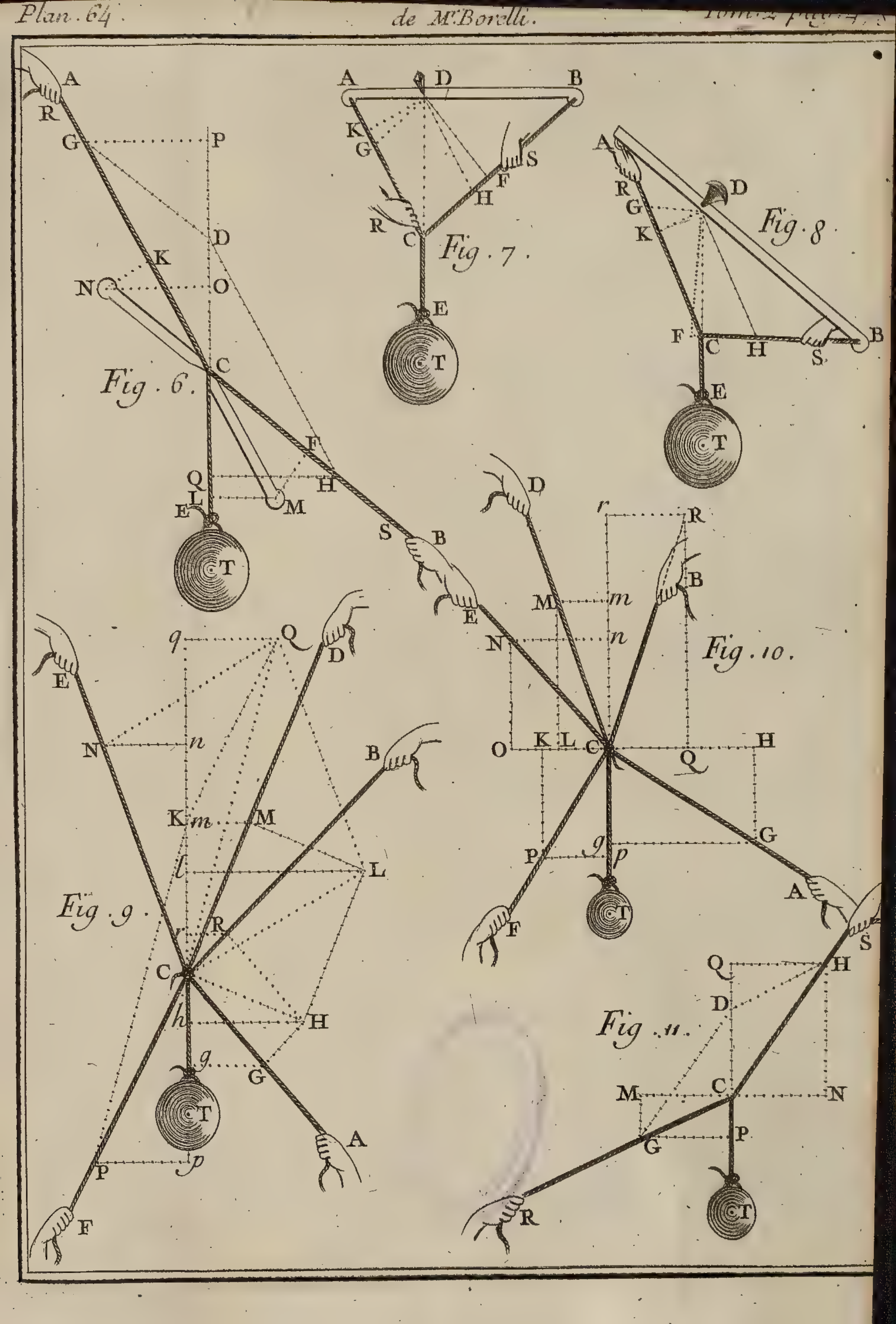
On peut aussi comparer les Corollaires 2. 3. 4. du même Th. à la 71. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

On peut enfin comparer les Corollaires 5. 6. 7. 8. du même Th. 7. à la 72. prop. de M. Borelli, & au Corollaire qu'il en tire.

Tels sont les principes generaux de tout ce que cet Auteur a dit des poids suspendus par des cordes, & de l'usage qu'il en a fait pour exprimer la force des muscles. C'est ce qu'on s'étoit proposé d'établir dans ce Chapitre par la méthode de la Nouvelle Mécanique. Qu'on voye presentement si la sienne peut aller jusques-là, & si elle peut conduire à la solution du Problême 16. pag. 355. tom. II.

Fin du second Tome.


Fig. 1er.
S
R
B
H
A
Q
N
M
P
K
F
O
I
C
G
T
X
Z
E
Fig. 2.
R
D
G
P
S
Q
H
M
C
N
T
Fig. 3.
A
I
B
C
L
R
S
T
Fig. 4.
S
B
R.
A
T.
C
K
P
O
G
Fig. 5.
D
S
B
R
A
Q
H
G
P
C
K
F
N
L
M
O
T


Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.

EXTRAIT DES REGISTRES DE L'ACADEMIE Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

MEssieurs Saurin, de Mairan & de Beaufort, qui avoient été nommez pour examiner la *Nouvelle Mécanique de feu M. Varignon*, ayant dit que cet Ouvrage, dont le Projet avoit été imprimé en 1687. avoit été reçû des Sçavans avec une approbation generale, étoit attendu avec impatience par le merite de l'essai, & la grande reputation de l'Auteur, qu'il seroit à souhaiter qu'il eût pû y mettre la derniere main, & prendre soin lui-même de l'Edition; que cependant l'Ouvrage étoit excellent dans l'état où il étoit, & digne du nom de M. Varignon: la Compagnie a jugé qu'il meritoit d'être imprimé. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 10. Decembre 1724.

FONTENELLE, *Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.*

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la grace de Dieu Roy de France & de Navarre: A nos amez & féaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de nôtre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Nôtre amé & féal le *sieur Jean-Paul Bignon, Conseiller ordinaire en notre Conseil d'Etat, & Président de notre Académie Royale des Sciences*; Nous ayant fait très-humblement exposer, que depuis qu'il Nous a plû donner à notredite Académie, par un Reglement nouveau, de nouvelles marques de notre affection, elle s'est appliquée avec plus de soin à cultiver les Sciences, qui font l'objet de ses exercices; en sorte qu'outre les Ouvrages qu'elle a déja donnez au Public, elle seroit en état d'en produire encore d'autres, s'il Nous plaisoit lui accorder de nouvelles Lettres de Privilege, attendu que celles que Nous lui avons accordées en datte du 6. Avril 1699. n'ayant point de tems limité, ont été déclarées nulles par un Arrêt de notre Conseil d'Etat du treiziéme Août 1713. Et desirant donner au sieur Exposant toutes les facilitez & les moyens qui peuvent contribuer à rendre utiles au Public les travaux de notredite Académie Royale des Sciences; Nous avons permis & permettons par ces Présentes à ladite Académie, de faire imprimer, vendre ou débiter dans tous les lieux de notre obéïssance, par tel Imprimeur qu'elle voudra choisir, en telle forme, marge, caractere, & autant de fois que bon lui semblera, *toutes ses Recherches ou Observations journalieres, & Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Assemblées*; comme aussi *les Ouvrages, Memoires ou Traitez de chacun des Particuliers qui la composent*, & generalement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître sous son nom, après avoir fait examiner lesdits Ouvrages, & jugé qu'ils sont dignes de l'impression; & ce pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la date desdites Présentes.

Faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre Royaume, comme aussi à tous Imprimeurs, Libraires, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire aucun desdits Ouvrages imprimez par l'Imprimeur de ladite Académie, en tout ni en partie, par extrait ou autrement, sans le consentement par écrit de ladite Académie ou de ceux qui auront droit d'eux; à peine contre chacun des contrevenans de confiscation des Exemplaires contrefaits au profit de sondit Imprimeur, de trois mille livres d'amende, dont un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, un tiers audit Imprimeur, & l'autre tiers au Dénonciateur, & de tous dépens, dommages & interêts; à condition que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, & ce dans trois mois de ce jour; que l'impression de chacun desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & ce en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de les exposer en vente, il en sera mis de chacun deux Exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre trés-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur Daguesseau, le tout à peine de nullité des Presentes: Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire joüir ladite Académie ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empchement: Voulons que la copie desdites Presentes qui sera imprimée au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenuë pour dûëment signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conseillers & Secretaires foi soit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'execution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Paris le vingt-troisiéme jour du mois de Juin l'an de grace mil sept cens dix-sept, & de notre Regne le deuxiéme. Par le Roy en son Conseil.

Signé, FOUQUET.

Il est ordonné par l'Edit du Roy du mois d'Août 1686. & Arrêt de son Conseil, que les Livres dont l'impression se permet par Privilege de Sa Majesté, ne pourront être vendus que par un Libraire ou Imprimeur.

Registré le present Privilege, ensemble la cession écrite ci dessous sur le Registre IV. de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, p. 155. N. 205. conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arrest du Conseil du 13. Août 1703. A Paris le 3. Juillet 1717. Signé, DELAUNE, *Syndic.*

Nous soussigné Président de l'Académie Royale des Sciences, déclarons avoir en tant que besoin cedé le present Privilege à ladite Académie, pour par elle & les differens Académiciens qui la composent, en joüir pendant le tems & suivant les conditions y portées. Fait à Paris le premier Juillet 1717.

Signé, J. P. BIGNON.

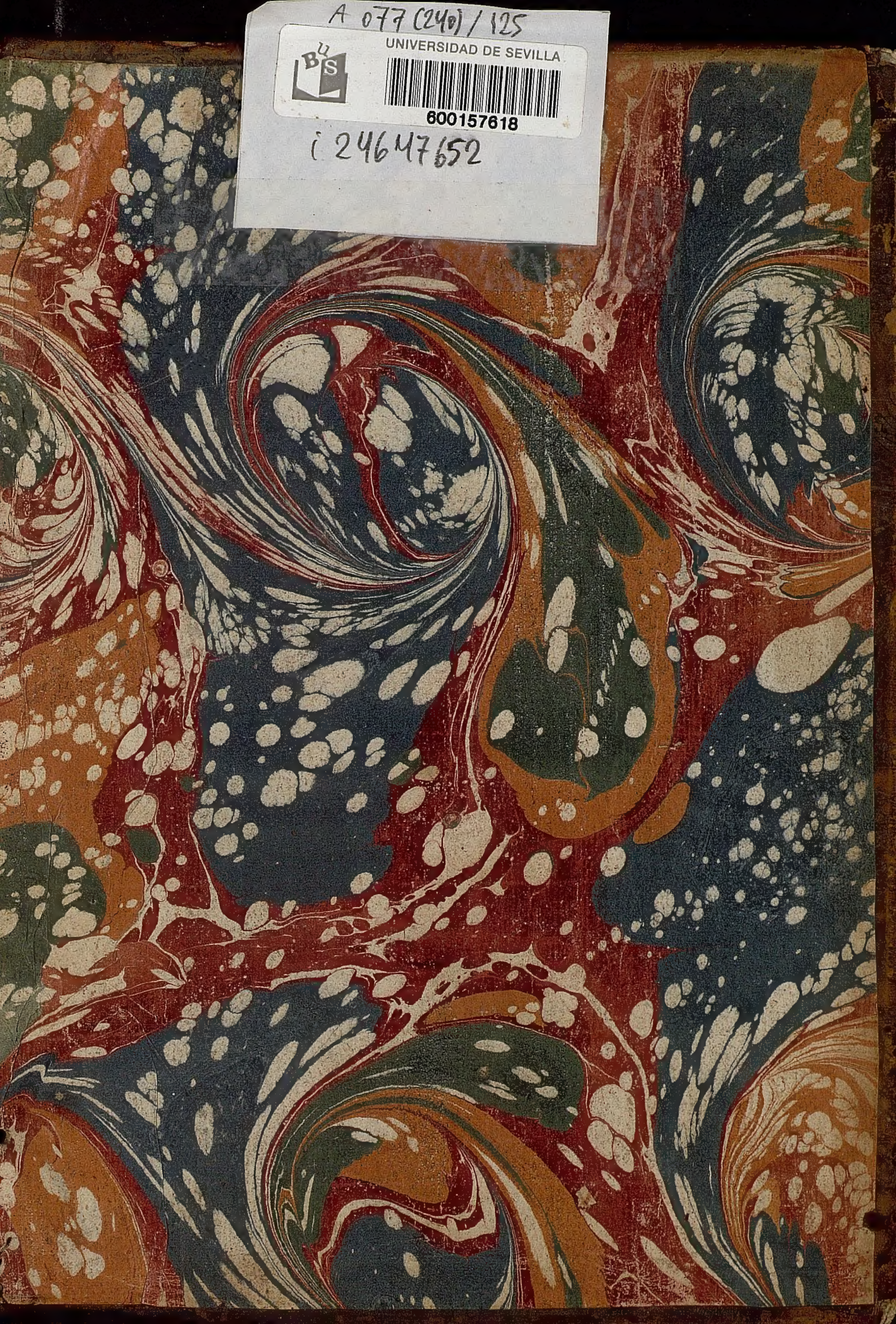
Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 6. Decembre 1724.

PAr déliberation faite selon la forme ordinaire, la Compagnie a résolu de permettre au sieur JOMBERT, Marchand Libraire, d'imprimer la *Nouvelle Mécanique de M. Varignon*, & de lui ceder à cet égard le Privilege qu'elle a obtenu du Roy en datte du 29. Juin 1717. En foi de quoi j'ai signé le present Certificat. A Paris ce 6. Decembre 1724.

FONTENELLE, *Sec. perp. de l'Ac. R. des Sc.*








77
NOUVELL
TOM. II